

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIO ANDREA ZANZOTTO

Sulla disintegrazione delle misure negli spazi localmente compatti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 48 (1972), p. 127-136

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__127_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA DISINTEGRAZIONE DELLE MISURE
NEGLI SPAZI LOCALMENTE COMPATTI

PIO ANDREA ZANZOTTO *)

È ben nota l'importanza (soprattutto per le sue applicazioni al Calcolo delle probabilità) del teorema che garantisce l'esistenza di una « disintegrazione » per un'assegnata misura positiva μ su E , rispetto a un'assegnata applicazione μ -propria p di E in T (E, T spazi localmente compatti con base numerabile): ossia l'esistenza di una famiglia $(\lambda_t)_{t \in T}$ di misure di probabilità su E , tale che, posto $\nu = p(\mu)$, λ_t risulti concentrata su $p^{-1}(t)$ per ν -quasi ogni t , e si abbia:

$$\mu = \int \lambda_t d\nu(t).$$

Nella presente nota il concetto di disintegrazione viene presentato in un certo numero di formulazioni diverse, delle quali si dimostra l'equivalenza ((2.1)).

Questa presentazione consente poi di ottenere una nuova e più semplice dimostrazione del teorema di esistenza ((3.1)), la quale, a differenza di quelle note (cfr., ad es., [3], § 3, n. 1, th. 1), non fa uso del teorema di Dunford-Pettis, e si basa invece esclusivamente su un'immediata conseguenza di risultati classici, riguardanti la derivazione delle misure in uno spazio metrico.

*) Indirizzo dell'autore: Scuola Normale Superiore, Pisa.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R. Desidero ringraziare i professori E. De Giorgi e G. Letta che mi hanno seguito durante lo svolgimento della presente ricerca.

0. NOTAZIONI E TERMINOLOGIA. Le notazioni e la terminologia saranno sostanzialmente identiche a quelle adottate in [1], [2], [3], con le semplificazioni derivanti dal fatto che ciascuno degli spazi topologici considerati nel seguito sarà supposto localmente compatto e dotato di base numerabile.

Se E è un siffatto spazio, si denoterà con $\mathcal{K}(E)$ lo spazio di Riesz delle funzioni numeriche finite, continue su E e a supporto compatto; con $\mathcal{K}_+(E)$ il cono degli elementi positivi di $\mathcal{K}(E)$.

È facile vedere che esiste una parte numerabile \mathcal{G} di $\mathcal{K}_+(E)$, dotata della seguente proprietà:

(0.1) Ogni elemento di $\mathcal{K}_+(E)$ è l'involuppo superiore di una successione crescente di elementi di \mathcal{G} .

(In effetti, se $\mathcal{O}\mathcal{L}$ è una base numerabile, per la topologia di E , costituita da insiemi relativamente compatti, basta scegliere, per ogni coppia (U, V) di elementi di $\mathcal{O}\mathcal{L}$, con $\bar{U} \subset V$, un elemento $f_{U, V}$ di $\mathcal{K}_+(E)$, tale che si abbia $I_{\bar{U}} \leq f_{U, V} \leq I_V$, e denotare poi con \mathcal{G} l'insieme delle funzioni della forma $\sup_{i \in I} \alpha_i f_{U_i, V_i}$, dove $(\alpha_i)_{i \in I}$ sia una famiglia finita di numeri razionali positivi, e dove, per ogni i , (U_i, V_i) sia una coppia di elementi di $\mathcal{O}\mathcal{L}$, con $\bar{U}_i \subset V_i$).

Per *misura positiva* su E si intenderà una misura di Radon positiva su E (ossia una forma lineare positiva su $\mathcal{K}(E)$). Per *misura* su E si intenderà una misura di Radon su E (ossia la differenza di due misure di Radon positive).

Si denoterà con $\mathcal{M}(E)$ lo spazio di Riesz delle misure su E , con $\mathcal{M}_+(E)$ il cono delle misure positive. Per ogni misura μ , si porrà:

$$\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leq 1, f \in \mathcal{K}(E)} |\mu(f)|,$$

e la misura μ si dirà *limitata* quando risulti $\|\mu\| < +\infty$. La misura μ si dirà poi una *misura di probabilità*, se è positiva e tale che $\|\mu\| = 1$. Per ogni punto x di E , si denoterà con ε_x la misura di probabilità $f \mapsto f(x)$ (misura di Dirac).

La *convergenza vaga* di una successione (μ_n) di misure verso una misura μ sarà la convergenza semplice di (μ_n) verso μ (espressa dalla relazione: $\mu(f) = \lim_n \mu_n(f)$ per ogni elemento f di $\mathcal{K}(E)$). Sussiste per

essa il seguente criterio (cfr. [6], (7.2.8)), del quale ci serviremo nel seguito:

(0.2) Sia \mathcal{G} una parte di $\mathcal{K}_+(E)$, godente della proprietà (0.1). Affinché una successione (μ_n) di misure su E converga vagamente, basta che si abbia $\sup_n \|\mu_n\| < +\infty$ e che, per ogni elemento f di \mathcal{G} , la successione numerica $(\mu_n(f))$ converga.

Ricordiamo che, per una misura positiva su E , le nozioni di *integrabilità essenziale* e di *integrale essenziale* si riducono (grazie all'esistenza di una base numerabile per la topologia di E) alle comuni nozioni di integrabilità e di integrale. Così pure, la nozione di funzione (o insieme) *localmente trascurabile* si confonde con quella di funzione (o insieme) trascurabile.

Per ogni misura positiva μ su E , e per ogni funzione numerica g localmente μ -integrabile (cioè tale che fg sia μ -integrabile per ogni $f \in \mathcal{K}(E)$), denoteremo con $g \cdot \mu$ la *misura di base* μ , definita dalla densità g (ossia la misura $f \mapsto \int fg d\mu$).

Data una misura positiva μ su E , e un'applicazione p di E in uno spazio T (localmente compatto e dotato di base numerabile), la quale sia μ -propria (cioè tale che $g \circ p$ sia μ -integrabile per ogni $g \in \mathcal{K}(T)$), denoteremo con $p(\mu)$ la *misura immagine* di μ attraverso p (ossia la misura ν su T definita dalla relazione: $\nu(g) = \int (g \circ p) d\mu$ per $g \in \mathcal{K}(T)$).

Infine, data una misura positiva ν sullo spazio T , e un'applicazione $t \mapsto \lambda_t$ di T in $\mathcal{M}_+(E)$, la quale sia scalarmente ν -integrabile rispetto alla dualità $\langle \mathcal{M}(E), \mathcal{K}(E) \rangle$ (cioè tale che la funzione scalare $t \mapsto \lambda_t(f)$ sia ν -integrabile per ogni $f \in \mathcal{K}(E)$), denoteremo con $\int \lambda_t d\nu(t)$ la misura positiva μ su E definita dalla relazione:

$$\mu(f) = \int \lambda_t(f) d\nu(t) \text{ per } f \in \mathcal{K}(E).$$

1. Alcuni risultati sulla derivazione delle misure.

Sia T uno spazio localmente compatto, dotato di base numerabile.

Com'è ben noto, lo spazio T è metrizzabile. Più precisamente, esiste una distanza, compatibile con la topologia di T , tale che ogni insieme limitato risulti relativamente compatto (cfr. [4], § 2, Exerc. 19). Noi considereremo, nel seguito del paragrafo, T munito di una siffatta distanza.

È allora possibile identificare le misure positive su T con le « misure di Borel regolari su T » (nel senso di [5]) che siano finite sugli insiemi limitati. Di conseguenza è possibile applicare alle misure positive su T la teoria della derivazione esposta in [5].

Richiameremo qui brevemente alcuni dei concetti e dei risultati di questa teoria, adattando alla presente situazione il linguaggio impiegato in [5].

Per relazione di ricoprimento (in T) si intende un insieme di coppie del tipo (t, A) , con t punto di T e A parte di T contenente t .

Se \mathcal{R} è una relazione di ricoprimento, e se t è un punto di T , si denota con $\mathcal{R}(t)$ l'insieme costituito dalle parti A di T tali che si abbia $(t, A) \in \mathcal{R}$. Per ogni parte S di T , si pone poi $\mathcal{R}(S) = \bigcup_{t \in S} \mathcal{R}(t)$.

La relazione di ricoprimento \mathcal{R} si dice *fine* in un assegnato punto t di T se ad $\mathcal{R}(t)$ appartengono insiemi di diametro arbitrariamente piccolo.

Se ν è una misura positiva su T , la relazione di ricoprimento \mathcal{R} si dice godere della *proprietà di Vitali* rispetto a ν , se verifica le condizioni seguenti:

(1) Ogni elemento di $\mathcal{R}(T)$ è un insieme boreliano di T .

(2) \mathcal{R} è fine in ciascun punto di T .

(3) Per ogni parte S di T , e per ogni relazione di ricoprimento \mathcal{R}' , contenuta in \mathcal{R} e fine in ciascun punto di S , è possibile trovare una famiglia numerabile di elementi di $\mathcal{R}'(S)$, a due a due disgiunti, la quale ricopra S a meno di un insieme trascurabile per la misura ν .

Sussistono i due risultati seguenti (cfr. [5], (2.8.19) e (2.9.8)):

(1.1) *Esiste una successione (\mathcal{S}_n) di partizioni numerabili di T , costituite da insiemi boreliani e limitati, tale che, per ogni n , \mathcal{S}_{n+1} sia più fine di \mathcal{S}_n , e che si abbia*

$$\limsup_n \{ \text{diam } (A) : A \in \mathcal{S}_n \} = 0.$$

Inoltre, se (\mathcal{S}_n) è una siffatta successione, la relazione di ricoprimento \mathcal{R} , costituita da tutte le coppie (t, A) tali che A appartenga a \mathcal{S}_n per un opportuno n e che t sia un elemento di A , gode della proprietà di Vitali rispetto a una qualsiasi misura positiva su T .

1.2) Sia \mathfrak{R} una relazione di ricoprimento, godente della proprietà di Vitali rispetto a una misura positiva ν .

Per ogni funzione numerica h , localmente ν -integrabile, esiste allora un insieme ν -trascurabile N , tale che, per ogni punto t di $T-N$, si abbia:

$$\nu(A) > 0 \text{ per } A \in \mathfrak{R}(t), \quad \lim_{\text{diam}(A) \rightarrow 0, A \in \mathfrak{R}(t)} \frac{1}{\nu(A)} \int_A h d\nu = h(t).$$

Dai due risultati sopra enunciati discende immediatamente il seguente corollario (che è l'unico risultato di cui avremo bisogno per dimostrare il teorema di disintegrazione):

(1.3) Sia ν una misura positiva su T . È allora possibile associare ad ogni punto t di T una successione $(g_{t,n})_{n \in \mathbf{N}}$ di funzioni positive, ν -integrabili, con $\int g_{t,n} d\nu = 1$, in modo tale che, per ogni funzione ν -integrabile e limitata h , la relazione

$$(1.4) \quad h(t) = \lim_n \int h g_{t,n} d\nu$$

sia verificata per quasi ogni t (relativamente alla misura ν).

In effetti, per dimostrare il corollario enunciato, basta prendere (\mathfrak{F}_n) e \mathfrak{R} come in (1.1), N come in (1.2), e porre:

$$g_{t,n} = \begin{cases} \frac{1}{\nu(A_{t,n})} I_{A_{t,n}} & \text{se } t \in T-N, \\ 0 & \text{se } t \in N, \end{cases}$$

dove $A_{t,n}$ denota quello, tra gli insiemi della partizione \mathfrak{F}_n , al quale appartiene t . Dopo di ciò, la relazione (1.4) è evidentemente verificata per ogni punto t di $T-N$.

2. Il concetto di disintegrazione.

Siano ora E, T due spazi localmente compatti (ciascuno dotato di una base numerabile), μ una misura positiva su E , p un'applicazione μ -propria di E in T , ν la misura immagine di μ attraverso p . Siano inoltre

\mathcal{E} una parte numerabile di $\mathcal{K}_+(E)$, godente della proprietà (0.1), e \mathcal{I} una parte numerabile di $\mathcal{K}_+(T)$, godente della proprietà analoga, con T in luogo di E .

Sussiste la proposizione seguente:

(2.1) Per ogni applicazione $t \mapsto \lambda_t$ di T in $\mathfrak{M}_+(E)$, le condizioni seguenti sono equivalenti:

(a) L'applicazione $t \mapsto \lambda_t$ è scalarmente ν -integrabile, e si ha:

$$(2.2) \quad \int \lambda_t d\nu(t) = \mu;$$

inoltre esiste un insieme N , trascurabile per la misura ν , tale che, per ogni punto t di $T-N$, l'applicazione p risulti λ_t -propria e si abbia $p(\lambda_t) = \varepsilon_t$.

(b) Per ogni elemento f di $\mathcal{K}(E)$, e per ogni elemento g di $\mathcal{K}(T)$, la funzione $t \mapsto g(t)\lambda_t(f)$ è ν -integrabile, e si ha:

$$(2.3) \quad \int g(t)\lambda_t(f)d\nu(t) = \int (g \circ p)f d\mu.$$

(c) Per ogni elemento g di $\mathcal{K}_+(T)$, l'applicazione $t \mapsto g(t)\lambda_t$ di T in $\mathfrak{M}_+(E)$ è scalarmente ν -integrabile, e si ha:

$$(2.4) \quad \int g(t)\lambda_t d\nu(t) = (g \circ p) \cdot \mu.$$

(d) Per ogni elemento f di $\mathcal{K}_+(E)$, la misura limitata $p(f \cdot \mu)$ ammette come densità, rispetto a ν , la funzione $t \mapsto \lambda_t(f)$.

(e) Per ogni elemento f di \mathcal{E} , la misura limitata $p(f \cdot \mu)$ ammette come densità, rispetto a ν , la funzione $t \mapsto \lambda_t(f)$.

Mostriamo dapprima che (a) implica (b).

A questo scopo, supposta verificata la condizione (a), e fissate le funzioni $f \in \mathcal{K}(E)$, $g \in \mathcal{K}(T)$, osserviamo che, per ogni punto t di $T-N$, il complementare dell'insieme $p^{-1}(t)$ è λ_t -trascurabile, e quindi la funzione $g \circ p$ coincide quasi dappertutto, relativamente alla misura λ_t , con la costante $g(t)$, sicché la funzione $(g \circ p)f$ è integrabile (relativamente alla stessa misura λ_t) e ammette come integrale il numero

$$\int (g \circ p)f d\lambda_t = g(t)\lambda_t(f).$$

Ne segue

$$\int g(t)\lambda_t(f)d\nu(t) = \int d\nu(t) \int (g \circ p)fd\lambda_t = \int (g \circ p)f d\mu,$$

dove l'ultima eguaglianza è dovuta all'ipotesi (2.2) e al teorema d'integrazione rispetto a una misura definita come integrale di una famiglia di misure (cfr. [2], § 3, n. 4, th. 1).

È così provato che (a) implica (b).

È poi evidente che le condizioni (c) e (d) sono semplici riformulazioni della condizione (b), e che la condizione (d) implica la condizione (e).

Mostriamo che, inversamente, (e) implica (d).

A questo scopo, consideriamo due funzioni positive $f \in \mathcal{K}(E)$, $g \in \mathcal{K}(T)$. A norma di (0.1), la funzione f è l'involuppo superiore di una successione crescente (f_n) di elementi di \mathcal{G} .

Per ogni n , in virtù dell'ipotesi (e), la funzione $t \mapsto g(t)\lambda_t(f_n)$ è ν -integrabile e ammette come integrale il numero

$$\int g(t)\lambda_t(f_n)d\nu(t) = \int (g \circ p)f_n d\mu.$$

Ne segue la relazione (2.3), grazie al teorema di Lebesgue sulla convergenza monotona.

Mostriamo infine che le condizioni equivalenti (b), (c), (d) implicano la condizione (a).

Dall'ipotesi (d) discende intanto che, per ogni elemento f di $\mathcal{K}_+(E)$, la funzione $t \mapsto \lambda_t(f)$ è ν -integrabile e ammette come integrale il numero

$$\int \lambda_t(f)d\nu(t) = \| p(f \cdot \mu) \| = \mu(f);$$

e ciò prova la prima parte della condizione (a).

Per dimostrare la seconda parte, fissiamo $h \in \mathcal{K}(T)$ e consideriamo la funzione μ -integrabile $h \circ p$. Dalla relazione (2.2), grazie al già citato teorema d'integrazione rispetto a una misura definita come integrale di una famiglia di misure, discende che l'insieme $N(h)$, costituito dai punti t di T per i quali la funzione $h \circ p$ non è λ_t -integrabile, è ν -trascurabile. Inoltre, per ogni $g \in \mathcal{K}_+(T)$, la relazione (2.4) implica che la funzione $t \mapsto g(t) \int (h \circ p)d\lambda_t$ (definita sul complementare di $N(h)$) è ν -integrabile ed ammette come integrale il numero

$$\int d\nu(t)g(t) \int (h \circ p)d\lambda_t = \int (h \circ p)(g \circ p)d\mu = \int hgd\nu.$$

In altre parole: la misura di base ν definita dalla densità $t \mapsto \int (h \circ p)d\lambda_t (t \in T-N(h))$ coincide con la misura h.v. Ne segue che l'insieme $N'(h)$, costituito dai punti t di $T-N(h)$ per i quali la relazione

$$(2.5) \quad \int (h \circ p)d\lambda_t = h(t)$$

è falsa, è trascurabile per la misura ν .

Denotiamo con N la riunione degli insiemi $N(h) \cup N'(h)$, al variare di h in \mathcal{J} , e fissiamo un elemento t di $T-N$.

Per ogni $h \in \mathcal{J}$, la funzione $h \circ p$ è allora λ_t -integrabile e verifica la relazione (2.5). Ma, poiché ogni elemento di $\mathcal{K}_+(T)$ è l'involuppo superiore di una successione crescente di elementi di \mathcal{J} , la conclusione sussiste per ogni elemento h di $\mathcal{K}_+(T)$. Ciò significa che p è λ_t -propria, e che si ha $p(\lambda_t) = \varepsilon_t$.

La proposizione è così completamente dimostrata.

OSSERVAZIONE. Dalla seconda parte della condizione (a) discende in particolare che, per ogni punto t di $T-N$, la misura λ_t è una misura di probabilità, ed è concentrata sull'insieme $p^{-1}(t)$ (nel senso che il complementare di questo insieme è λ_t -trascurabile).

Un'applicazione $t \mapsto \lambda_t$ di T in $\mathfrak{M}_+(E)$, per la quale siano soddisfatte le condizioni equivalenti della proposizione (2.1), sarà brevemente detta una *disintegrazione* della misura μ , rispetto all'applicazione μ -propria p .

3. Esistenza di una disintegrazione.

L'analisi del concetto di disintegrazione, svolta nel paragrafo precedente, permette ora di dimostrare in maniera molto semplice, facendo uso della sola proposizione (1.3), il seguente teorema di esistenza (cfr. [3], § 3, n. 1, th. 1):

(3.1) TEOREMA. *Nelle ipotesi precisate al principio del paragrafo precedente, esiste sempre una disintegrazione della misura μ , rispetto all'applicazione μ -propria p .*

Si fissi una funzione $f \in \mathcal{K}_+(E)$. La relazione $p(f \cdot \mu) \leq \|f\| \nu$ mostra che la misura limitata $p(f \cdot \mu)$ si può mettere nella forma

$$(3.2) \quad p(f \cdot \mu) = h_f \cdot \nu,$$

dove h_f è un'opportuna funzione ν -integrabile, tale che $0 \leq h_f \leq \|f\|$.

Sia $(g_{t,n})_{(t,n) \in T \times \mathbf{N}}$ una famiglia di funzioni, godente delle proprietà precisate in (1.3), e si denoti con N_f , l'insieme ν -trascurabile costituito dai punti t di T per i quali è falsa la relazione (1.4) con h_f in luogo di h .

Si denoti poi con N la riunione degli insiemi N_f , al variare di f in \mathcal{E} . Per ogni elemento t di $T-N$, e per ogni funzione $f \in \mathcal{E}$, si ha allora

$$h_f(t) = \lim_n \int h_f g_{t,n} d\nu = \lim_n \int (g_{t,n} \circ p) f d\mu$$

(dove l'ultima eguaglianza è dovuta alla relazione (3.2) e ai teoremi d'integrazione rispetto a una misura definita da una densità e rispetto a una misura immagine).

In altre parole, se t è un fissato elemento di $T-N$, la successione di misure di probabilità $(g_{t,n} \circ p) \cdot \mu (n \in \mathbf{N})$ converge, su ciascun elemento f di \mathcal{E} , verso il numero reale $h_f(t)$: in virtù di (0.2), essa converge dunque vagamente verso una misura positiva λ_t , verificante la relazione

$$\lambda_t(f) = h_f(t) \text{ per ogni } f \in \mathcal{E}.$$

Possiamo completare la definizione dell'applicazione $t \mapsto \lambda_t$ ponendo, ad esempio, $\lambda_t = 0$ per ogni elemento t di N . Dopo di ciò, per ogni $f \in \mathcal{E}$, la funzione $t \mapsto \lambda_t(f)$ coincide, sul complementare dell'insieme ν -trascurabile N , con la funzione h_f .

La condizione (e) della proposizione (2.1) è dunque soddisfatta (in virtù della relazione (3.2)), e il teorema è dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOURBAKI N., *Intégration*, Chap. 1, 2, 3, 4, deuxième édition (1965).
- [2] BOURBAKI N., *Intégration*, Chap. 5 (Intégration des mesures) (1956).
- [3] BOURBAKI N., *Intégration*, Chap. 6 (Intégration vectorielle) (1959).

- [4] BOURBAKI N., *Topologie générale*, Chap. 9 (deuxième édition) (1958).
- [5] FEDERER H., *Geometric measure theory*, Springer (1969).
- [6] LETTA G., *Théorie élémentaire de l'Intégration*, Corso di lezioni tenuto all'Università di Paris VII (Maitrise 1970-71, n. 323-324). Note ciclostilate.

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 aprile 1972.