

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

IVAR MASSABÒ

**Estensioni di una struttura paracomplessa
su un corpo algebricamente chiuso ad un suo
ampliamento trascendente semplice**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 48 (1972), p. 113-125

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__113_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ESTENSIONI DI UNA STRUTTURA PARACOMPLESSA
SU UN CORPO ALGEBRICAMENTE CHIUSO
AD UN SUO AMPLIAMENTO TRASCENDENTE SEMPLICE

IVAR MASSABÒ *)

Il risultato di questa nota è stato ottenuto generalizzando uno studio delle strutture paracomplesse sul corpo degli operatori differenziali fratti (cfr. [I] pp. 332-335). Il problema affrontato è stato quello di caratterizzare tutte le possibili estensioni di una struttura paracomplessa data su un corpo algebricamente chiuso ad un suo ampliamento trascendente.

1. Notazioni e definizioni.

Nel seguito denoteremo con \mathcal{K} un corpo commutativo; se η è un automorfismo di \mathcal{K} denoteremo con k^η il trasformamto di k mediante η , con \mathcal{K}_η il sottocorpo di \mathcal{K} fisso rispetto ad η .

DEFINIZIONE 1. *Diremo che $\mu=(\eta, \theta)$ è una struttura paracomplessa su \mathcal{K} se:*

- i) η è un automorfismo involutorio di \mathcal{K} .
- ii) θ è un ordinamento di \mathcal{K}_η .
- iii) per ogni $k \in \mathcal{K}$ risulta kk^η , necessariamente appartenente a \mathcal{K}_η , positivo o nullo rispetto a θ cioè $kk^\eta \geq 0$ (θ).

Diremo inoltre η coniugio della struttura paracomplessa μ su \mathcal{K} .

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Via L. B. Alberti, 4 Università di Genova, 16132, Genova.

Supporremo che $\mu = (\eta, \theta)$ sia una struttura paracomplessa assegnata sul corpo.

DEFINIZIONE 2. Diremo che Γ è una retta \mathcal{K}_η -proiettiva contenuta in $P^1(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{\infty\}$ se Γ è immagine di $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ mediante una proiettività di $P^1(\mathcal{K})$; chiameremo $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ retta \mathcal{K}_η -proiettiva prototipo.

DEFINIZIONE 3. Diremo segmento aperto $\overline{\alpha\beta}$ di \mathcal{K}_η di estremi α e β ($\alpha, \beta \in \mathcal{K}_\eta$) l'insieme dei punti $z \in \mathcal{K}_\eta$ tali che $\alpha < z < \beta$ (θ); definizioni analoghe varranno per segmenti chiusi, semiaperti a destra, semiaperti a sinistra.

OSSERVAZIONE 1. Il gruppo delle proiettività di $P^1(\mathcal{K})$ opera transitivamente sulle rette \mathcal{K}_η -proiettive contenute in $P^1(\mathcal{K})$.

DEFINIZIONE 4. Diremo che un sottoinsieme γ di Γ , retta \mathcal{K}_η -proiettiva in $P^1(\mathcal{K})$, è un arco aperto di Γ se è immagine di un segmento aperto di \mathcal{K}_η mediante una qualche proiettività di $P^1(\mathcal{K})$; ovvie le definizioni di archi chiusi, semiaperti a destra, semiaperti a sinistra.

Poiché l'insieme vuoto è un arco consideriamo anche la retta Γ come arco. Così il complementare rispetto a Γ di un arco di Γ è ancora un arco.

DEFINIZIONE 5. Sia Γ una retta \mathcal{K}_η -proiettiva di $P^1(\mathcal{K})$, diremo filtro d'archi su Γ un insieme \mathfrak{F} di archi di Γ tale che:

- i) ogni arco di Γ contenente un arco di \mathfrak{F} appartiene a \mathfrak{F} .
- ii) l'intersezione di due archi appartenenti ad \mathfrak{F} sta in \mathfrak{F} .
- iii) nessun arco di \mathfrak{F} è vuoto.

DEFINIZIONE 6. Diremo nocciolo di un filtro \mathfrak{F} l'insieme intersezione di tutti gli archi di \mathfrak{F} .

DEFINIZIONE 7. Diremo che un punto $s \in \Gamma$ è un punto aderente ad un filtro d'archi \mathfrak{F} su Γ se ogni arco aperto di Γ contenente s ha intersezione non vuota con ogni arco del filtro \mathfrak{F} .

NOTA. Un filtro d'archi a nocciolo vuoto ammette al più un punto aderente.

DEFINIZIONE 8. Diremo sezione di \mathcal{K}_η una coppia di sottoinsiemi (A, B) di \mathcal{K}_η complementari e tali che ogni elemento di A precede ogni elemento di B nell'ordinamento θ .

La sezione (A, B) si dirà propria se A e B sono entrambi non vuoti altrimenti impropria.

DEFINIZIONE 9. Diremo sezione continua di \mathcal{K}_η una sezione (A, B) di \mathcal{K}_η tale che:

o A possiede massimo o B possiede minimo o $A = \emptyset$ e $B = \mathcal{K}_\eta$ o $A = \mathcal{K}_\eta$ e $B = \emptyset$.

Diremo lacuna di \mathcal{K}_η una sezione propria (A, B) di \mathcal{K}_η tale che: né A ha massimo né B ha minimo (quindi le due sezioni improprie sono continue).

Sia (A, B) una sezione propria su \mathcal{K}_η allora rimane univocamente determinato il filtro d'archi su $P^1(\mathcal{K}_\eta) = \mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ avente per base i segmenti aperti $\overline{\alpha\beta}$ con $\alpha \in A$ e $\beta \in B$.

Alla sezione impropria $(\emptyset, \mathcal{K}_\eta)$ associamo il filtro d'archi generato dagli archi del tipo

$$\{\alpha \mid \alpha \in \mathcal{K}_\eta \text{ .\& . } \alpha < \beta (\theta)\} \text{ con } \beta \in \mathcal{K}_\eta$$

e alla sezione impropria $(\mathcal{K}_\eta, \emptyset)$ il filtro degli archi del tipo

$$\{\alpha \mid \alpha \in \mathcal{K}_\eta \text{ .\& . } \alpha < \beta (\theta)\} \text{ con } \beta \in \mathcal{K}_\eta$$

In tal modo si realizza una corrispondenza bigettiva tra le sezioni di \mathcal{K}_η e i filtri d'archi a nocciolo vuoto su $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$.

OSSERVAZIONE 2. La corrispondenza dianzi descritta è tale che ad ogni sezione continua viene associato un filtro d'archi a nocciolo vuoto il cui punto aderente è l'elemento di separazione della sezione, alle sezioni improprie vengono associati filtri d'archi aventi come punto aderente il punto ∞ e alle lacune vengono associati filtri d'archi privi di punti aderenti.

DEFINIZIONE 10. Se \mathcal{K}' è una estensione del corpo \mathcal{K} e $\mu = (\eta, \theta)$ è una struttura paracomplexa su \mathcal{K} , diremo che la struttura paracomplexa $\mu' = (\gamma, \sigma)$ su \mathcal{K}' estende μ (o che è una estensione di μ) se:

- i) γ subordina η su \mathcal{K} .
- ii) σ induce θ su \mathcal{K}_η .

2. Estensioni trascendenti semplici di corpi paracompleksi algebricamente chiusi.

Siano \mathcal{K} un corpo algebricamente chiuso, $\mu=(\eta, \theta)$ una struttura paracomplessa di \mathcal{K} e $\mathcal{K}(x)$ l'estensione trascendente (semplice) di \mathcal{K} .

Se γ è il coniugio di una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende μ allora x^γ è un elemento di $\mathcal{K}(x)$ della forma:

$$x^\gamma = \frac{ax+b}{cx+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathcal{K}$ e $ad-bc=1$.

Detta $h(z)$ la funzione

$$h(z) = \frac{az^n+b}{cz^n+d} \quad z \in \mathcal{K}$$

il luogo di punti di \mathcal{K} di equazione $z=h(z)$ è non vuoto e rappresenta, con l'eventuale aggiunta del punto ∞ , una retta \mathcal{K}_η -proiettiva in $\mathcal{K} \cup \{\infty\}$ che indicheremo con Γ_γ sicché ad ogni coniugio γ resta associata in modo unico una retta Γ_γ \mathcal{K}_η -proiettiva in $P^1(\mathcal{K})$.

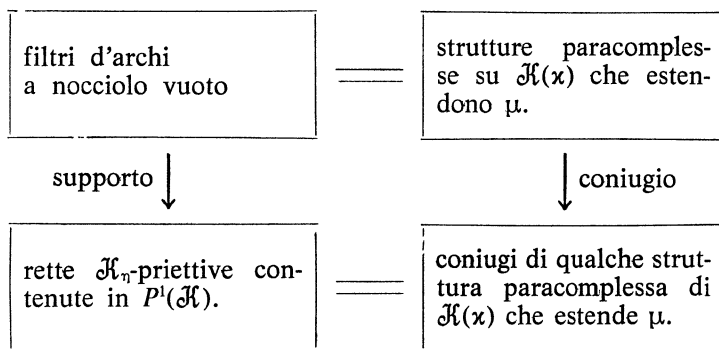
TEOREMA 1. *L'applicazione $\gamma \mapsto \Gamma_\gamma$ è una applicazione bigettiva dell'insieme dei coniugi di strutture paracomprese di $\mathcal{K}(x)$ che estendono μ all'insieme delle rette \mathcal{K}_η -proiettive contenute in $\mathcal{K} \cup \{\infty\}$.*

Se γ è il coniugio di una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende $\mu=(\eta, \theta)$ allora gli elementi del sottocorpo $\mathcal{K}(x)_\gamma$ si possono identificare con le funzioni razionali e coefficienti in \mathcal{K} che assumono valori in $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ su Γ_γ .

Sia \mathcal{F} un filtro d'archi a nocciolo vuoto su Γ_γ , l'insieme delle funzioni razionali a coefficienti in \mathcal{K} che assumono valori (strettamente) positivi, rispetto a θ , su qualche arco di \mathcal{F} determina un ordinamento $\theta_{\mathcal{F}}$ di $\mathcal{K}(x)_\gamma$ e risulta $(\gamma, \theta_{\mathcal{F}})$ una struttura paracomplessa su $\mathcal{K}(x)$ che estende μ .

TEOREMA 2. *L'applicazione $\mathcal{F} \mapsto (\gamma, \theta)$ è una applicazione bigettiva tra l'insieme dei filtri d'archi a nocciolo vuoto su Γ_γ e l'insieme delle strutture paracomplesse di $\mathcal{K}(x)$ che estendono μ e aventi γ come coniugio.*

OSSERVAZIONE 3. I teoremi 1) e 2) possono sintetizzarsi nell'asserzione di esistenza di un isomorfismo canonico tra « insiemi fibrati » come risulta dal seguente diagramma commutativo:



in cui le frecce verticali rappresentano le applicazioni che associano ad ogni filtro d'archi la retta supporto e ad ogni struttura paracomplessa il suo coniugio. Le applicazioni bigettive orizzontali essendo quelle dianzi definite.

OSSERVAZIONE 4. Due strutture paracomplesse su $\mathcal{K}(x)$ che estendono μ sono equivalenti, nel senso che esiste un automorfismo di $\mathcal{K}(x)$ che muta l'una nell'altra, allorché provengono da filtri d'archi a nocciolo vuoto con punti aderenti.

3. Dimostrazioni dei teoremi enunciati.

Per provare il teorema 1) determiniamo dapprima gli automorfismi involutori di $\mathcal{K}(x)$ che estendono l'automorfismo involutorio η di \mathcal{K} .

Poiché ogni automorfismo γ di $\mathcal{K}(x)$ è completamente individuato dalle immagini degli elementi di \mathcal{K} e dall'immagine x^γ di x , che può essere scritta sotto la forma:

$$x^\gamma = \frac{ax+b}{cx+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathcal{K}$ e $ad-bc=1$ (cfr. [2] pp. 158-159), risulta allora che ogni automorfismo γ di $\mathcal{K}(x)$ che estende η deve soddisfare alle due condizioni seguenti:

$$k^\gamma = k^\eta \quad \text{per ogni } k \in \mathcal{K}$$

esistono $a, b, c, d \in \mathcal{K}$ con $ad-bc=1$ tali che

$$x^\gamma = \frac{cx+d}{ax+b}$$

così γ individua, in modo unico, una matrice unitaria a coefficienti in \mathcal{K} .

La condizione di involutorietà per un automorfismo γ di $\mathcal{K}(x)$ che estende η , ossia, $\gamma \circ \gamma = \text{id.}$, può così ora essere espressa nella forma: esiste $m \in \mathcal{K}$, $m \neq 0$ tale che:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a^\eta & b^\eta \\ c^\eta & d^\eta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix}$$

ovvero:

$$(2) \quad \begin{aligned} a^\eta a + b^\eta c &= m \\ a^\eta b + b^\eta d &= 0 \\ c^\eta a + d^\eta c &= 0 \\ c^\eta b + d^\eta d &= m \end{aligned}$$

(dalla prima e quarta delle relazioni (2) segue che $m \in \mathcal{K}_\eta$ in quanto: $m - m^\eta = a^\eta a - d^\eta d \in \mathcal{K}_\eta$).

Questo prova:

LEMMA 1. Condizione necessaria e sufficiente affinché un automorfismo γ di $\mathcal{K}(x)$ estenda l'automorfismo (involutorio) η di \mathcal{K} è che esistano $a, b, c, d \in \mathcal{K}$ con $ad-bc=1$ e $m \in \mathcal{K}_\eta$, $m \neq 0$ tale che:

$$x^\gamma = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$k^{\gamma} = k^{\eta} \text{ per ogni } k \in \mathfrak{K}$$

e risulta verificata la (1) o equivalentemente la (2).

OSSERVAZIONE 5. Se γ è un automorfismo involutorio di $\mathfrak{K}(x)$ che estende η , in base al lemma 1), esistono $a, b, c, d \in \mathfrak{K}$ con $ab - bc = 1$ e soddisfacenti le (2) e tali che

$$x^{\gamma} = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Se è $c \neq 0$, quest'ultima può porsi nella forma:

$$(3) \quad x^{\gamma} = \frac{a}{c} + \frac{m}{c^{\eta} c \left(x - \left(\frac{a}{c} \right)^{\eta} \right)}$$

(infatti, tenendo presente le (2) si ha

$$\begin{aligned} \frac{ax + b}{cx + d} &= \frac{a \left(x + \frac{d}{c} \right) + \frac{bc - ad}{c}}{c \left(x + \frac{d}{c} \right)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 \left(x + \frac{d}{c} \right)} \frac{c^{\eta}}{c^{\eta}} = \\ &= + \frac{a}{c} \frac{bc^{\eta} c - adc^{\eta}}{c^2 c^{\eta} \left(x + \frac{d}{c} \right)} = \frac{a}{c} + \frac{mc}{c^2 c^{\eta} \left(x + \frac{d}{c} \right)} = \frac{a}{c} + \frac{m}{c^{\eta} c \left(x - \left(\frac{a}{c} \right)^{\eta} \right)} \end{aligned}$$

sicché γ altro non è che una « trasformazione per raggi vettori reciproci »; mentre se è $c = 0$ (deve allora essere $d \neq 0$ nonché $a \neq 0$) x^{γ} assume la forma:

$$(4) \quad x^{\gamma} = \frac{a}{b} x + \frac{b}{d}$$

OSSERVAZIONE 6. Notiamo che nel caso x^{γ} si possa scrivere nella forma data dalla (3) risulta:

$$\left(x - \left(\frac{a}{c}\right)^\eta\right) \cdot \left(x - \left(\frac{a}{c}\right)^\eta\right)^\gamma = \left(x - \left(\frac{a}{c}\right)^\eta\right) \left(\frac{a}{c} + \frac{m}{cc^\eta}\right) \cdot \frac{1}{x - \left(\frac{a}{c}\right)^\eta - \frac{a}{c}} = \frac{m}{cc^\eta}.$$

OSSERVAZIONE 7. Notiamo ancora che nel caso x^η si possa scrivere nella forma (4), le relazioni (2) si presentano:

$$aa^\eta = m$$

$$a^\eta b + b^\eta d = 0$$

$$dd^\eta = m$$

sicché $m > 0$ (θ).

Passiamo ora a studiare i coniugi di strutture paracomplesse di $\mathcal{K}(x)$ che estendono la struttura paracomplessa $\mu = (\eta, \theta)$ sul corpo algebricamente chiuso \mathcal{K} .

Se γ è il coniugio di una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende μ risulta per ogni $s \in \mathcal{K}_\eta$ che $ss^\gamma \in \mathcal{K}(x)$ tale che $ss^\gamma \geq 0$ (θ) sicché ricordando le osservazioni 6), 7), in virtù del lemma 1) si ha il seguente:

LEMMA 2. Condizione necessaria e sufficiente affinché un automorfismo γ di $\mathcal{K}(x)$ sia il coniugio di una struttura paracomplessa di $\mathcal{K}(x)$ che estende μ , è che:

esistano $a, b, c, d \in \mathcal{K}$ con $ad - bc = 1$ e $m \in \mathcal{K}_\eta$, $m > 0$ (θ) tali che:

$$k^\gamma = k^\eta \text{ per ogni } k \in \mathcal{K}$$

$$x^\gamma = \frac{ax + b}{cx + d}$$

nonché:

$$\begin{vmatrix} a^\eta & b^\eta \\ c^\eta & d^\eta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix}$$

ovvero:

$$a^n a + b^n c = m$$

$$a^n b + b^n d = o$$

$$c^n a + d^n c = o$$

$$c^n b + d^n d = m$$

Poiché φ determina l'espressione

$$x^r = \frac{ax + b}{cx + d}$$

allora consideriamo la funzione (nella variabile z) seguente

$$h(z) = \frac{az^n + b}{cz^n + d} \quad z \in \mathcal{K} \cup \{\infty\}$$

e diciamo Γ_φ il luogo di equazione

$$z = h(z)$$

che risulta essere non vuoto per l'ipotesi fatta su \mathcal{K} di essere algebricamente chiuso e per la condizione di positività di m . Mediante una proiettività di $P^1(\mathcal{K})$ è possibile trasformare Γ_γ in $\mathcal{K}_n \cup \{\infty\}$. Pertanto Γ_γ è una retta \mathcal{K}_n -proiettiva contenuta nella retta \mathcal{K} -proiettiva $\mathcal{K} \cup \{\infty\}$.

OSSERVAZIONE 8. Nel caso sia $c \neq o$ la funzione $h(z)$ assume la forma:

$$h(z) = \frac{a}{c} + \frac{m}{cc^n \left(z - \frac{a}{c} \right)^n}$$

sicché l'equazione della retta \mathcal{K}_n -proiettiva Γ_γ diventa:

$$\left(z - \frac{a}{c} \right) \left(z - \frac{a}{c} \right)^n = \frac{m}{cc^n}$$

mentre nel caso $c=0$ l'equazione della retta \mathcal{K}_η -proiettiva Γ_φ è:

$$z = \frac{a}{d}z^n + \frac{b}{d}.$$

Se φ è il coniugio individuato da $\kappa^\varphi = \kappa$, Γ_φ è la retta \mathcal{K}_η -proiettiva prototipo $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$.

Dall'osservazione 8) appare chiaro che ogni retta Γ \mathcal{K}_η -proiettiva determina il coniugio di una struttura paracomplexa di $\mathcal{K}(\kappa)$ che estende μ e il teorema 1) resta così dimostrato.

ESEMPIO. Si consideri il caso particolare $\mathcal{K} = \mathbf{C}$ corpo dei numeri complessi dotato della ordinaria struttura paracomplexa. Allora l'insieme dei coniugi di strutture paracomplesse che estendono quella ordinaria è in corrispondenza bigettiva con le rette proiettive reali Γ contenute nella retta complessa (ovvero i cerchi o rette di $\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$). In questo caso ogni filtro d'archi a nocciolo vuoto ha un punto aderente. Il filtro d'archi resta individuato dal punto aderente $z_0 \in \Gamma$ e da una orientazione di Γ . Si ottiene così che la totalità delle strutture paracomplesse di $\mathbf{C}(\kappa)$ che estendono la struttura paracomplexa ordinaria di \mathbf{C} è una varietà reale di dimensione quattro.

Questo risultato non può essere generalizzato a corpi \mathcal{K} algebricamente chiusi a causa dell'esistenza di lacune e quindi di filtri d'archi privi di punti aderenti.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2. Consideriamo il coniugio φ di una struttura paracomplexa di $\mathcal{K}(\kappa)$ che estende μ , per il teorema 1), sia $z = h(z)$ la equazione della retta \mathcal{K}_η -proiettiva in $P^1(\mathcal{K})$ Γ_γ , ad esso associata, allora ogni elemento $p \in \mathcal{K}(\kappa)$ viene trasformato mediante φ in una q tale che

$$q(z) = p(h(z))^n \quad z \in \mathcal{K} \cup \{\infty\}$$

e pertanto il sottocorpo di $\mathcal{K}(\kappa)$ fisso rispetto a φ , ossia $\mathcal{K}(\kappa)_\varphi$, è costituito da quelle funzioni razionali che assumono valori in $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ su Γ_φ .

Sia \mathcal{F} un filtro d'archi a nocciolo vuoto su Γ_φ e consideriamo l'insieme Q delle funzioni razionali a coefficienti in \mathcal{K} che assumono valori positivi rispetto a θ su qualche arco di \mathcal{F} . A partire da Q possiamo de-

finire su $\mathcal{K}(\kappa)_\varphi$ un ordinamento $\theta_{\mathcal{F}}$ in tal modo:

$$\alpha > \beta \ (\theta_{\mathcal{F}}) \text{ se } \alpha(z) - \beta(z) \in Q$$

Risultato $\theta_{\mathcal{F}}$ ristretto a \mathcal{K}_η coincidere con θ e se $ss^\varphi \geq 0$ ($\theta_{\mathcal{F}}$) qualunque sia $s \in \mathcal{K}(\kappa)$, ne segue che

$(\varphi, \theta_{\mathcal{F}})$ è una struttura paracomplexa di $\mathcal{K}(\kappa)$ che estende μ . L'applicazione così costruita che al filtro d'archi \mathcal{F} di Γ_φ associa la struttura paracomplexa $(\varphi, \theta_{\mathcal{F}})$ che estende $\mu = (\eta, \theta)$ è evidentemente ben definita.

Sia ora (φ, δ) una struttura paracomplexa di $\mathcal{K}(\kappa)$ che estende μ , trasformiamo, mediante una proiettività Π di $P^1(\mathcal{K})$ la retta \mathcal{K}_η -proiettiva prototipo $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$; parallelamente il sottocorpo $\mathcal{K}(\kappa)_\varphi$ si muta (tramite l'automorfismo associato alla proiettività Π) nel sottocorpo $\mathcal{K}(\kappa)_\circ$ delle funzioni razionali su \mathcal{K}_η , isomorfo al corpo $\mathcal{K}_\eta(\kappa)$. Riduciamo così il problema a quello di caratterizzare l'ordinamento δ_\circ (trasformato di δ) di $\mathcal{K}(\kappa)_\circ$.

Diciamo $\varepsilon \in \mathcal{K}(\kappa)_\circ$ la funzione identica $\varepsilon(z) = z$, questo elemento di $\mathcal{K}(\kappa)_\circ$ confrontato con gli elementi di \mathcal{K}_η li ripartisce in due classi A e B , ponendo in A quelli che precedono ε , nell'ordinamento δ_\circ , ed in B quelli che seguono ε . Così (A, B) è una sezione di \mathcal{K}_η e per quanto detto nel paragrafo 1 individua un filtro d'archi \mathcal{F}_\circ su $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ a nocciolo vuoto.

Possono presentarsi i seguenti casi per la sezione (A, B) :

- i) A e B sono non vuote e A possiede massimo;
- ii) A e B sono non vuote e B possiede minimo;
- iii) A è vuota (quindi) B è tutta \mathcal{K}_η ;
- iv) B è vuota (quindi) A è tutta \mathcal{K}_η ;

VI A e B sono non vuote, né A ha massimo né B ha minimo, e ricordiamo che in uno qualsiasi dei casi i), ii), iii), iv) è (A, B) una sezione continua mentre è una lacuna in v).

Supponiamo sia (A, B) una lacuna di \mathcal{K}_η allora il filtro d'archi \mathcal{F}_\circ a nocciolo vuoto su $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ non ha punti aderenti.

Per un polinomio monoico di primo grado la condizione di positività rispetto a δ_\circ coincide con l'essere positivo, rispetto a θ , in un segmento

$\overline{\alpha\beta}$ con $\alpha \in A$ e $\beta \in B$ ovvero con l'essere positivo, rispetto a θ , su qualche arco di \mathcal{F} .

Poiché i soli polinomi irriducibili su \mathcal{K}_η sono:

i polinomi di primo grado;

i polinomi di secondo grado: $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$ (θ) (infatti il corpo \mathcal{K} è algebricamente chiuso ed è $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\eta(\sqrt{-2})$) ogni funzione razionale diversa da quella nulla su \mathcal{K}_η ha la forma:

$$p(z) = a_0 \frac{Q_1(z) \cdot Q_2(z) \dots Q_t(z)}{P_1(z) \cdot P_2(z) \dots P_s(z)}$$

ove $a_0 \in \mathcal{K}_\eta$, $a_0 \neq 0$ e $P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, \dots, Q_t$ sono polinomi a valori in \mathcal{K}_η per $z \in \mathcal{K}_\eta$; quelli eventuali di secondo grado sono della forma $(z - n)^2 + m^2$ con $n, m \in \mathcal{K}_\eta$ e $m \neq 0$ che ovviamente assumono valori positivi e sono positivi anche nell'ordinamento δ_0 di $\mathcal{K}(x)_0$ in quanto somme di quadrati.

Quindi p è positivo rispetto a δ_0 se e solo se nell'elenco seguente

$$a_0, P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_t$$

vi è un numero pari di elementi negativi e si ha ciò se e solo se $p(z)$ è positiva, rispetto a θ , in un segmento $\overline{\alpha\beta}$ con $\alpha \in A$, $\beta \in B$ ovvero se $p(z)$ è positiva, rispetto a θ , su qualche arco del filtro \mathcal{F}_0 .

Riportandoci alla situazione originaria mediante la proiettività Π^{-1} gli archi di \mathcal{F}_0 si trasformano in archi di Γ_φ e questi ultimi formano un filtro d'archi \mathcal{F} su Γ_φ a nocciolo vuoto senza punti aderenti, così il criterio di positività per gli elementi di $\mathcal{K}(x)_\varphi$, rispetto a δ , consiste nella positività, rispetto a θ , dei valori assunti dalle funzioni razionali su qualche arco di \mathcal{F} .

Se (A, B) è invece una sezione continua il filtro d'archi \mathcal{F} su $\mathcal{K}_\eta \cup \{\infty\}$ a nocciolo vuoto ha un punto aderente che coincide con l'elemento di separazione della sezione se questa è propria, con ∞ , se è impropria.

In modo analogo si prova che: se A ha massimo (rispettivamente B ha minimo) $m_0 \in \mathcal{K}_\eta$ il criterio di positività consiste nella positività, rispetto a θ , dei valori assunti localmente alla destra (rispettivamente alla

sinistra) di m_o ovvero nella positività rispetto a θ , dei valori assunti su qualche arco di \mathcal{F}_o se (A, B) è la sezione impropria $(\mathcal{K}_\eta, \emptyset)$ (rispettivamente $(\emptyset, \mathcal{K}_\eta)$) nell'assumere valori positivi, rispetto a θ , in intornoi destri (rispettivamente sinistri) del punto ∞ .

L'applicazione che ad ogni filtro d'archi su Γ_φ a nocciolo vuoto associa la struttura paracomplexa $(\varphi, \theta_{\mathcal{F}})$ dinanzi definita risulta essere bigettiva, come asserito nel teorema 2).

Notiamo ancora che mediante la proprietà di $\mathcal{K} \cup \{\infty\}$

$$z \mapsto \frac{1}{z - m_o}$$

$$z \mapsto -\frac{1}{z - m_o}$$

$$z \mapsto -z$$

i casi i) ii) iii) si riconducono al caso iv) da cui segue l'affermazione contenuta nell'osservazione 3.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DARBO G.: *Aspetti algebrico-categoriali della teoria dei dispositivi*, Symposia Mat., Vol. IV, 1970.
- [2] JACOBSON N.: *Lectures in abstract algebra*, Vol. III, 1964, Van Nostrand Company, Princeton New Jersey.

Manoscritto pervenuto in redazione il 13 aprile 1972.