

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PAOLO MURATORI

**Differenziabilità delle funzioni convesse a
valori in spazi di successioni**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 47 (1972), p. 353-388

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__353_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

DIFFERENZIABILITÀ DELLE FUNZIONI CONVESSE
A VALORI IN SPAZI DI SUCCESSIONI

PAOLO MURATORI *)

Introduzione.

Nella prima parte di questo lavoro si trovano delle condizioni equivalenti alla differenziabilità di una funzione convessa, in termini della sua duale, da uno spazio vettoriale topologico localmente convesso a uno spazio di funzioni a valori reali con l'ordinamento dell'involuppo superiore. Questi risultati possono essere considerati come una generalizzazione di risultati di [1], [5]. Nella seconda parte del lavoro si prova che la continuità di una funzione convessa, da certi spazi di Banach a certi spazi normati di successioni reali con l'ordinamento dell'involuppo superiore, assicura la differenziabilità della funzione su di un sottoinsieme denso del proprio dominio. Questi risultati possono essere visti come una generalizzazione dei risultati di [1].

1. Premesse.

In tutto il seguito:

(a) Intendiamo che X sia uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, che σ sia una famiglia di sottoinsiemi di X limitati e simmetrici ($A \in \sigma \Rightarrow A = -A$) tali che $\bigcup_{A \in \sigma} A = X$ e tali che

$$\{\{b \in X^* = \mathcal{L}(X, R); |\langle h, b \rangle| \leq 1 \ \forall h \in A\}; A \in \sigma\}$$

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Bologna.

sia una base per una topologia vettoriale su X^* . Con X^* , denoteremo X^* con tale topologia. Si intenderà poi che sia

$$w = \{ \{ b \in X^*; | \langle h, b \rangle | < 1 \quad \forall h \in B \}; B \subset X, B \text{ finito} \}.$$

(b) Se f è una funzione da X allo spazio topologico Y con topologia \mathcal{J} diremo che f è $(X, \sigma; (Y, \mathcal{J}))$ -differenziabile in $a \in X$ se esiste $b \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che

$$\forall A \in \sigma, \forall O \in \mathcal{J} \text{ con } a \in O \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tale che}$$

$$0 < |t| \leq \delta \Rightarrow \frac{f(a+tx) - f(a)}{t} \in b(x) + O \quad \forall x \in A.$$

(c) Se E è un insieme diverso dal vuoto e Z uno spazio vettoriale topologico di funzioni da E a \mathbb{R} ed f una funzione da X a Z indicheremo con f^* la funzione da $\mathcal{L}(X, Z)$ a Z definita nel modo seguente:

$$f^*(b)(y) = \sup \{ b(x)(y) - f(x)(y); x \in X \}, b \in \mathcal{L}(X, Z), y \in E.$$

Analogamente poniamo

$$f^{**}(x)(y) = \sup \{ b(x)(y) - f^*(b)(y); b \in \mathcal{L}(X, Z) \} \quad \forall x \in X, \forall y \in E.$$

Si dirà poi che f da X a Z è involuppo superiore di funzioni affini da X a Z se esiste una funzione h da $\mathcal{L}(X, Z)$ a Z tale che

$$f(x)(y) = \sup \{ b(x)(y) - h(b)(y); b \in \mathcal{L}(X, Z) \} \quad \forall x \in X, \forall y \in E.$$

(d) Sia \mathcal{H} l'insieme delle successioni in \mathbb{R}^+

$$\mathcal{H} = \{ g : N \rightarrow \mathbb{R}^+ \}.$$

Se $g \in \mathcal{H}$, indicheremo con $l_{p, g}$ lo spazio

$$l_{p, g} = \{ x : N \rightarrow \mathbb{R}; \sum_{k=1}^{\infty} |g(k)x(k)|^p < +\infty \} \quad 1 \leq p < +\infty$$

con la norma

$$\| x; l_{p, g} \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g(k)x(k)|^p \right)^{1/p}$$

e con $l_{\infty, g}$ lo spazio

$$l_{\infty, g} = \{x : N \rightarrow R; \sup \{|g(k)x(k)|; k \in N\} < +\infty\}$$

con la norma

$$\|x; l_{\infty, g}\| = \sup \{|g(k)x(k)|; k \in N\}.$$

2. Condizioni di differenziabilità.

TEOREMA 1. *Siano X e σ come in (a); Z e E come in (c). Sia β una famiglia di sottoinsiemi di E contenente tutti gli insiemi costituiti da un punto. Indicheremo con \mathcal{C} la topologia vettoriale per Z avente come base di intorni dello zero gli insiemi*

$$\{\{\varphi \in Z; |\varphi(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in B\}; \varepsilon \in R^+, B \in \beta\}$$

e con \mathfrak{J} la topologia vettoriale per X^* avente come base di intorni dello zero gli insiemi

$$\{\{z \in X^*; |\langle h, z \rangle| \leq 1 \forall h \in A\}; A \in \sigma\}.$$

Sia f una funzione da X a Z inviluppo superiore di funzioni affini da X a Z e sia a un punto di X . Sono allora equivalenti le due seguenti affermazioni:

(I) f è $(X, \sigma; (Z, \mathcal{C}))$ -differenziabile in a con differenziale $b \in \mathcal{L}(X, Z)$;

(II) $\forall A \in \sigma$ e $\forall B \in \beta$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sup \{f(a + \delta x)(y) - f(a)(y); x \in A, y \in B\} < +\infty;$$

esiste $b \in \mathcal{L}(X, Z)$ tale che se $(y_n)_{n \in N}$ è una successione in un arbitrario $B \in \beta$ e $(b_n)_{n \in N}$ è una successione in $\mathcal{L}(X, Z)$ per cui

$$f(a)(y_n) - [b_n(a)(y_n) - f^*(b_n)(y_n)] \rightarrow 0,$$

allora

$$b_n(\cdot)(y_n) - b(\cdot)(y_n) \xrightarrow{\mathfrak{J}} 0.$$

DIMOSTRAZIONE.

(II) \Rightarrow (I).

Poichè f è involuppo superiore di funzioni affini da X a Z esiste una funzione g da $\mathcal{L}(X, Z)$ a Z tale che

$$f(x)(y) = \sup \{ \xi(x)(y) - g(\xi)(y); \xi \in \mathcal{L}(X, Z) \} \quad \forall x \in X, \forall y \in E.$$

Proviamo che da quest'ultima segue che

$$(1) \quad f(x)(y) = f^{**}(x)(y) \quad \forall x \in X, \forall y \in E.$$

Infatti

$$g(\xi)(y) \geq \xi(x)(y) - f(x)(y) \quad \forall x \in X, \forall \xi \in \mathcal{L}(X, Z), \forall y \in E;$$

perciò $f^*(\xi)(y) < +\infty$ per ogni fissato $\xi \in \mathcal{L}(X, Z)$ e $y \in E$; inoltre

$$g(\xi)(y) \geq f^*(\xi)(y) \quad \forall \xi \in \mathcal{L}(X, Z) \text{ e } \forall y \in E.$$

Quindi

$$f(x)(y) \leq \sup \{ \xi(x)(y) - f^*(\xi)(y); \xi \in \mathcal{L}(X, Z) \} = f^{**}(x)(y);$$

ma $f^{**}(x)(y) \leq f(x)(y)$ perchè

$$f^*(\xi)(y) = \sup \{ \xi(x)(y) - f(x)(y); x \in X \} \geq \xi(x)(y) - f(x)(y)$$

e quindi

$$\xi(x)(y) - f^*(\xi)(y) \leq f(x)(y).$$

Da ciò segue la (1).

Proviamo ora che

$$(2) \quad f^*(b)(y) = b(a)(y) - f(a)(y) \quad \forall y \in E.$$

Dalla (1), tenendo presente la definizione di $f^{**}(a)(y)$, segue che, fissato ad arbitrio $y \in E$, esiste una successione $(b_{yn})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(X, Z)$ tale che

$$(3) \quad b_{yn}(a)(y) - f^*(b_{yn})(y) \rightarrow f^{**}(a)(y) = f(a)(y);$$

perciò, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_1 \in N$ tale che

$$(4) \quad f(a)(y) - \varepsilon \leq b_{y_n}(a)(y) - f^*(b_{y_n})(y) \quad \forall n \geq n_1.$$

Fissati $x \in X$ e $y \in E$, la funzione

$$\xi \rightarrow \xi(x)(y)$$

da $\mathcal{L}(X, Z)$ a R è w_y -continua con

$$w_y = \{ \{ \xi \in \mathcal{L}(X, Z); |\xi(t)(y)| \leq \varepsilon, \forall t \in A \}; \varepsilon \in R^+, A \subseteq X, A \text{ finito} \};$$

infatti se $\xi_n \xrightarrow{w_y} 0$, $\xi_n \in \mathcal{L}(X, Z)$, allora $\xi_n(x)(y) \rightarrow 0$. Quindi $f^*(\cdot)(y)$ è w_y -inferiormente semicontinua perchè involucro superiore di funzioni w_y -continue. Inoltre dalla (3), poichè vale (II), si ha

$$b_{y_n}(\cdot)(y) \xrightarrow{\mathfrak{J}} b(\cdot)(y);$$

perciò $b_{y_n} \xrightarrow{w_y} b$; quindi esiste $n_2 \geq n_1$ tale che

$$(5) \quad f^*(b)(y) - \varepsilon \leq f^*(b_{y_n})(y) \quad \forall n \geq n_2.$$

Dalle (4) e (5) segue che

$$f^*(b)(y) - 2\varepsilon \leq b_{y_n}(a)(y) - f(a)(y) \quad \forall n \geq n_2$$

da cui $f^*(b)(y) \leq b(a)(y) - f(a)(y)$, che, unita alla $f^*(b)(y) \geq b(a)(y) - f(a)(y)$, prova la (2). Posto

$$\omega(x)(y) = f(a+x)(y) - f(a)(y) - b(x)(y) \quad \forall x \in X, \forall y \in E,$$

dalla (2) segue che $\omega(x)(y) \geq 0 \quad \forall x \in X, \forall y \in E$; infatti

$$\begin{aligned} b(a)(y) - f(a)(y) &= f^*(b)(y) = \sup \{ b(z)(y) - f(z)(y); z \in X \} \geq \\ &\geq b(z)(y) - f(z)(y) \quad \forall z \in X, \forall y \in E, \end{aligned}$$

da cui

$$b(a)(y) - f(a)(y) \geq b(a+x)(y) - f(a+x)(y).$$

Proviamo ora che $\forall A \in \sigma$ e $\forall O \in \mathcal{G}$, $0 \in O$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$(6) \quad 0 < |t| \leq \varepsilon \Rightarrow \omega(tx)/t \in O \quad \forall x \in A.$$

In caso contrario esistono $A \in \sigma$, $B \in \beta$, $\delta > 0$, una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A , una successione $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B , una successione $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^+ tali che

$$\omega(t_n x_n)(y_n) \geq t_n \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}, t_n \rightarrow 0.$$

Perciò

$$(7) \quad f(a + t_n x_n)(y_n) - f(a)(y_n) - b(t_n x_n)(y_n) \geq t_n \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per la (1) esiste una successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(X, Z)$ tale che

$$(8) \quad b_n(t_n x_n + a)(y_n) - f^*(b_n)(y_n) \geq f(t_n x_n + a)(y_n) - \frac{1}{2} \delta t_n.$$

Dalle (7) e (8) discende

$$b_n(t_n x_n + a)(y_n) - f^*(b_n)(y_n) - f(a)(y_n) - b(t_n x_n)(y_n) \geq \frac{1}{2} \delta t_n,$$

da cui, tenendo presente la (1) la definizione di f^{**} e la (2), segue

$$(9) \quad \begin{aligned} f(a)(y_n) &\geq f(a)(y_n) - f^*(b_n)(y_n) \geq \\ &\geq f(a)(y_n) - (b_n - b)(t_n x_n)(y_n) + \frac{1}{2} \delta t_n. \end{aligned}$$

Proviamo ora che

$$(10) \quad \sup \{(b_n - b)(x_n)(y_n); n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Per la (II), tenendo presente la continuità di b , si può affermare che esistono $\delta_2 > 0$, $M_1 > 0$ tali che

$$\omega(x)(y) \leq M_1 \quad \forall x \in \delta_2 A, \forall y \in B;$$

dalla definizione di ω discende quindi che

$$\begin{aligned} f(x)(y) &= f(a)(y) + b(x-a)(y) + \omega(x-a)(y) \leq \\ &\leq f(a)(y) + b(x-a)(y) + M_1 \quad \forall x-a \in \delta_2 A, \forall y \in B; \end{aligned}$$

dalla (2) discende che

$$(11) \quad \sup \{ \xi(x)(y) - f(x)(y); x - a \in \delta_2 A \} \geq \sup \{ \xi(x)(y) - f(a)(y) - \\ - b(x-a)(y) - M_1; x - a \in \delta_2 A \} = -M_1 + \xi(a)(y) - f(a)(y) + \\ + \sup \{ (\xi - b)(x)(y); x \in \delta_2 A \} = -M_1 + f^*(b)(y) + (\xi - b)(a)(y) + \\ + \sup \{ (\xi - b)(x)(y); x \in \delta_2 A \} \quad \forall \xi \in \mathcal{L}(X, Z) \text{ e } \forall y \in B.$$

Dalle (8), (11) si ottiene

$$b_n(t_n x_n + a)(y_n) \geq f(t_n x_n + a)(y_n) - \frac{1}{2} \delta t_n + f^*(b_n)(y_n) \geq \\ \geq f(t_n x_n + a)(y_n) - \frac{1}{2} \delta t_n + f^*(b)(y_n) + (b_n - b)(a)(y_n) - M_1 + \\ + \sup \{ (b_n - b)(x)(y_n); x \in \delta_2 A \},$$

da cui

$$\sup \{ (b_n - b)(x)(y_n); x \in \delta_2 A \} \leq M_1 - (f^*(b)(y_n) + f(t_n x_n + a)(y_n) - \\ - b(t_n x_n + a)(y_n)) + (b_n - b)(t_n x_n)(y_n) + \frac{1}{2} t_n \delta \leq M_2 + (b_n - b)(t_n x_n)(y_n)$$

per un certo $M_2 > 0$ perchè

$$f^*(b)(y_n) + f(t_n x_n + a)(y_n) - b(t_n y_n + a)(y) \geq 0.$$

Preso $n_3 \in \mathbb{N}$ tale che $2 t_n \leq \delta_2 \quad \forall n \geq n_3$ risulta

$$(b_n - b)(t_n x_n)(y_n) \leq \frac{1}{2} \sup \{ (b_n - b)(x)(y_n); x \in \delta_2 A \} \quad \forall n \geq n_3;$$

e quindi

$$\sup \{ (b_n - b)(x)(y_n); x \in \delta_2 A \} \leq 2M_2 \quad \forall n \geq n_3;$$

da ciò segue la (10).

Dalla (10), poichè $t_n \rightarrow 0$, si ha

$$(b_n - b)(t_n x_n)(y_n) \rightarrow 0$$

e quindi dalla (9) segue che

$$f(a)(y_n) - [b_n(a)(y_n) - f^*(b_n)(y_n)] \rightarrow 0.$$

Dunque per la (II) si ha

$$(12) \quad b_n(\cdot)(y_n) - b(\cdot)(y_n) \xrightarrow{\mathfrak{J}} 0.$$

L'insieme

$$U = \left\{ z \in X^*; |z(x)| \leq \frac{1}{4} \delta, \quad \forall x \in A \right\}$$

è un intorno dello zero di \mathfrak{J} ; perciò per la (12) esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $(b_n - b)(\cdot)(y_n) \in U$ per $n \geq n_1$; quindi

$$|(b_{n_1} - b)(t_{n_1}, x_{n_1})(y_{n_1})| = t_{n_1} |(b_{n_1} - b)(x_{n_1})(y_{n_1})| \leq \frac{1}{4} t_{n_1} \delta;$$

dalla (9) segue quindi

$$f(a)(y_{n_1}) \geq f(a)(y_{n_1}) + \frac{1}{4} \delta t_{n_1},$$

che è assurdo. Dunque vale la (6).

$$(I) \Rightarrow (II).$$

Cominciamo col dimostrare che dalla (I) segue la (1). Infatti se vale la (I) allora si ha

$$(13) \quad f(x)(y) = f(a)(y) + b(x-a)(y) + \omega(x-a)(y) \quad \forall x \in X, \forall y \in E,$$

con ω soddisfacente la seguente condizione:

$$\forall A \in \sigma \text{ e } \forall O \in \mathfrak{C}, \quad 0 \in O,$$

esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$0 < |t| \leq \varepsilon \Rightarrow \omega(tx)/t \in O \quad \forall x \in A.$$

Poichè $f(\cdot)(y)$ è convessa si ha

$$f(x)(y) \geq f(a)(y) + b(x-a)(y) \quad \forall x \in X, \forall y \in E^1)$$

perciò

$$\begin{aligned} b(a)(y) - f(a)(y) &\leq f^*(b)(y) = \sup \{ b(x)(y) - f(x)(y); x \in X \} \leq \\ &\leq \sup \{ b(x)(y) - f(a)(y) - b(x-a)(y); x \in X \} = b(a)(y) - f(a)(y). \end{aligned}$$

Dalla (13) con la dichiarata condizione su ω segue subito la prima parte dell'affermazione (II). Sempre dalla (13) segue che

$$\begin{aligned} f^*(\xi)(y) &= \sup \{ \xi(x)(y) - f(x)(y); x \in X \} = \\ &= \sup \{ \xi(x)(y) - f(a)(y) - b(x-a)(y) - \omega(x-a)(y); x \in X \} = \\ &= -f(a)(y) + \xi(a)(y) + \sup \{ (\xi - b)(x)(y) - \omega(x)(y); x \in X \} \\ &\quad \forall \xi \in \mathcal{L}(X, Z). \end{aligned}$$

Sia ora $(y_n)_{n \in N}$ una successione in un fissato $B \in \beta$ e $(b_n)_{n \in N}$ una successione in $\mathcal{L}(X, Z)$ tale che, posto

$$\varepsilon_n = f(a)(y_n) - b_n(a)(y_n) + f^*(b_n)(y_n),$$

risulti $\varepsilon_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Tenendo presente l'ultima eguaglianza si ha

$$(14) \quad \sup \{ (b_n - b)(x)(y_n) - \omega(x)(y_n); x \in X \} = \varepsilon_n.$$

Supponiamo per assurdo che $(b_n - b)(\cdot)(y_n) \not\rightarrow 0$; allora esistono $A \in \underline{\sigma}$ e una successione $(n_j)_{j \in N}$ in N tali che

$$(b_{n_j} - b)(\cdot)(y_{n_j}) \notin \{ z \in X^*; |z(x)| \leq 1 \quad \forall x \in A \};$$

quindi esiste una successione $(x_{n_j})_{j \in N}$ in A tale che

$$(15) \quad (b_{n_j} - b)(x_{n_j})(y_{n_j}) > 1 \quad \forall j \in N.$$

1) Ciò si vede, per esempio, col ragionamento fatto in analoga circostanza nella dimostrazione del Teorema 1 di [4].

Per la (13) esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$$|t| \leq \delta_1 \Rightarrow |\omega(tx)(y)| \leq \frac{\delta_1}{2} \quad \forall x \in A, \forall y \in B;$$

perciò ricordando le (14), (15) si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n_j} = \sup \{ (b_{n_j} - b)(x)(y_{n_j}) - \omega(x)(y_{n_j}); x \in X \} &\geq \delta_1 (b_{n_j} - b)(x_{n_j})(y_{n_j}) - \\ &- \omega(\delta_1 x_{n_j})(y_{n_j}) \geq \delta_1 - \frac{1}{2} \delta_1 = \frac{1}{2} \delta_1 \quad \forall j \in N \end{aligned}$$

che è un assurdo perchè $\varepsilon_{n_j} \rightarrow 0$; quindi

$$(b_n - b)(\cdot)(y_n) \xrightarrow{\mathfrak{J}} 0.$$

Ciò prova la (II).

TEOREMA 2. *Siano X e σ come in (a). Sia Z uno spazio normato di successioni reali tali che se $\alpha, \beta \in Z$*

$$(i) \quad 0 \leq \alpha \leq \beta \Rightarrow \|\alpha\| \leq \|\beta\|$$

$$(\alpha \leq \beta \text{ significa che } \alpha(k) \leq \beta(k) \quad \forall k \in N)$$

(ii) *se $\alpha, \beta \in Z$ e $\alpha \leq \beta$, allora qualunque sia la successione γ in R risulta*

$$\alpha \leq \gamma \leq \beta \Rightarrow \gamma \in Z$$

$$(iii) \quad \alpha \in Z \Leftrightarrow |\alpha| \in Z (|\alpha|(k) = |\alpha(k)|)$$

$$(iv) \quad \exists \alpha_1 \in Z \text{ tale che } \alpha_1(k) > 0 \quad \forall k \in N.$$

Sia f una funzione da X a Z inviluppo superiore di funzioni affini da X a Z tale che

$$\sup_{\xi \in \mathcal{L}(X, Z)} f^*(\xi)(\cdot) \in Z$$

e sia a un punto di X .

Allora sono equivalenti le affermazioni:

(I)

f è (X, σ, Z) -differenziabile in a con differenziale $b \in \mathcal{L}(X, Z)$ e

$$f^*(b) = b(a) - f(a);$$

(II)

(i)' $\forall A \in \sigma, \exists \delta_1 > 0$ tale che

$$\sup \{ \| f(a + \delta_1 x) \|; x \in A \} < +\infty;$$

(ii)' esiste $b \in \mathcal{L}(X, Z)$ tale che fissato ad arbitrio $\delta > 0$ e $A \in \sigma$ qualunque siano la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A , la successione $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^+ convergente a zero, la successione $(b_{kn})_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N}}}$ in $\mathcal{L}(X, Z)$ tali che

$$b_{kn}(t_n x_n + a)(k) - f^*(b_{kn})(k) - f(t_n x_n + a)(k) + \\ + \frac{1}{\| \alpha_1 \|} t_n^2 \delta \alpha_1(k) \geq 0 \quad \forall n, k \in \mathbb{N},$$

posto

$$b_{kn}(x)(k) = b_n(x)(k), \quad f^*(b_{kn})(k) = \bar{f}(b_n)(k) \quad \forall x \in X, \forall k, n \in \mathbb{N},$$

si abbia

$$(\| f(a) - b_n(a) + \bar{f}(b_n) \| \rightarrow 0) \Rightarrow (\| (b_n - b)(x_n) \| \rightarrow 0)$$

risultando $b_n(x) \in Z \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in X$ e $\bar{f}(b_n) \in Z \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

$$(iii)' \quad f^*(b) = b(a) - f(a).$$

DIMOSTRAZIONE.

$$(II) \Rightarrow (I).$$

Ragionando come nel Teorema 1 si ha

$$(1) \quad f(x) = f^{**}(x) \quad \forall x \in X.$$

Posto

$$\omega(x)(k) = f(a+x)(k) - f(a)(k) - b(x)(k) \quad \forall x \in X, \forall k \in N,$$

dalla (iii)' di (II) segue, ragionando come nel Teorema 1, che

$$(2) \quad \omega(x)(k) \geq 0 \quad \forall x \in X, \forall k \in N.$$

Proviamo che $\forall A \in \sigma$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$(3) \quad 0 < |t| \leq \delta \Rightarrow \left\| \frac{\omega(tx)}{t} \right\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

In caso contrario esistono $A \in \sigma$, $\delta > 0$, una successione $(x_n)_{n \in N}$ in A , e una successione $(t_n)_{n \in N}$ in R^+ tali che

$$\| \omega(t_n x_n) \| \geq t_n \delta \quad \forall n \in N, t_n \rightarrow 0.$$

Perciò

$$(4) \quad \| f(a + t_n x_n) - f(a) - b(t_n x_n) \| \geq t_n \delta.$$

Dalla (1) segue che $\forall k \in N \exists b_{kn} \in \mathcal{L}(X, Z)$ tale che

$$(5) \quad b_{kn}(t_n x_n + a)(k) - f^*(b_{kn})(k) - f(t_n x_n + a)(k) + \\ + \frac{1}{\| \alpha_1 \|} \delta t_n^2 \alpha_1(k) \geq 0 \quad \forall n, k \in N.$$

Proviamo ora che

$$(6) \quad f^*(b_n) \in Z, b_n(x) \in Z \quad \forall n \in N, \forall x \in X.$$

Dalla (1) segue che

$$(7) \quad \xi(x)(k) - f^*(\xi)(k) \leq f(x)(k) \quad \forall \xi \in \mathcal{L}(X, Z) \quad \forall k \in N$$

da cui

$$b_{kn}(x)(k) - f^*(b_{kn})(k) \leq f(x)(k) \\ - b_{kn}(x)(k) - f^*(b_{kn})(k) \leq f(-x)(k);$$

perciò

$$-\frac{1}{2} f(x)(k) - \frac{1}{2} f(-x)(k) \leq f^*(b_{kn})(k) \leq \sup_{\xi \in \Omega(\bar{X}, Z)} f^*(\xi)(k),$$

e di qui segue la prima delle (6). Tenendo presente la (ii), l'ipotesi che $\sup_{\xi \in \Omega(\bar{X}, Z)} f^*(\xi)(\cdot) \in Z$ e $f(x)(\cdot) \in Z \quad \forall x \in X$, dalle due precedenti disuguaglianze segue che

$$|b_{kn}(x)(k)| \leq |f(x)(k)| + |f(-h)(k)| + \sup_{\xi \in \Omega(\bar{X}, Z)} f^*(\xi)(k)$$

e quindi la seconda delle (6), tenendo presenti le (ii) e (iii).

Dalle (2), (4) e (5), tenendo presente la (i) si ottiene

$$\begin{aligned} \delta t_n &\leq \|f(a + t_n x_n) - f(a) - b(t_n x_n)\| \leq \\ &\leq \left\| f(a + t_n x_n) - f(a) - b(t_n x_n) + b_n(t_n x_n + a) - f^*(b_n) - f(a + t_n x_n) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n^2 \delta \alpha_1 \right\| = \left\| b_n(a) - f^*(b_n) - f(a) + (b_n - b)(t_n x_n) + \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n^2 \delta \alpha_1 \right\|; \end{aligned}$$

d'altra parte è

$$\begin{aligned} -b_{kn}(a)(k) + f^*(b_{kn})(k) + f(a)(k) &\geq 0 \quad \forall n, k \in N \\ b_{kn}(a)(k) - f^*(b_{kn})(k) - f(a)(k) + b_{kn}(t_n x_n)(k) - b(t_n x_n)(k) + \\ &+ \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n^2 \delta \alpha_1(k) \geq 0 \quad \forall n, k \in N \end{aligned}$$

e quindi, per la (i),

$$\begin{aligned} (8) \quad \delta t_n &\leq \left\| b_n(a) - f^*(b_n) - f(a) + (b_n - b)(t_n x_n) + \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n^2 \delta \alpha_1 \right\| \leq \\ &\leq \left\| (b_n - b)(t_n x_n) + \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n^2 \delta \alpha_1 \right\| \leq \|(b_n - b)(t_n x_n)\| + \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n^2 \delta \|\alpha_1\|, \end{aligned}$$

da cui

$$(8)' \quad \frac{1}{2} \delta t_n \leq \|(b_n - b)(t_n x_n)\|$$

poichè si può sempre supporre che sia $t_n \leq \frac{1}{2}$.

Proviamo ora che $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$(9) \quad \| (b_n - b)(x_n) \| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infatti dalla (7) segue

$$b_{kn}(a + \delta_1 x_n)(k) \leq f^*(b_{kn})(k) + f(a + \delta_1 x_n)(k)$$

$$b_{kn}(a - \delta_1 x_n)(k) \leq f^*(b_{kn})(k) + f(a - \delta_1 x_n)(k)$$

$$-b_{kn}(a)(k) \leq f^*(b_{kn})(k) + f(-a)(k)$$

da cui

$$\begin{aligned} & |b_{kn}(\delta_1 x_n)(k) - b(\delta_1 x_n)(k)| \leq 2 |f^*(b_{kn})(k)| + \\ & + |f(-a)(k)| + |f(a + \delta_1 x_n)(k)| + |f(a - \delta_1 x_n)(k)| + |b(\delta_1 x_n)(k)| \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \| (b_n - b)(\delta_1 x_n) \| & \leq 2 \left\| \sup_{\xi \in \Omega(\bar{X}, Z)} f^*(\xi)(\cdot) \right\| + \| f(-a) \| + \\ & + \| f(a + \delta_1 x_n) \| + \| f(a - \delta_1 x_n) \| + \| b(\delta_1 x_n) \| ; \end{aligned}$$

ma $A = -A$ e vale (i)' di (II) onde possiamo supporre

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} (\| f(a + \delta_1 x_n) \| + \| f(a - \delta_1 x_n) \|) < +\infty ;$$

d'altra parte b è continua e quindi si può concludere che vale la (9).

Proviamo ora che

$$(10) \quad \| f(a) - b_n(a) + f^*(b_n) \| \rightarrow 0 ;$$

infatti

$$\begin{aligned} \| f(a) - b_n(a) + f^*(b_n) \| & \leq \left\| f(a) - b_n(a) + f^*(b_n) - (b_n - b)(t_n x_n) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n^2 \delta \alpha_1 \right\| + t_n \| (b_n - b)(x_n) \| + \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n^2 \delta \|\alpha_1\| \end{aligned}$$

da cui, per le (8) e (9), ricordando che $t_n \rightarrow 0$ segue la (10).

Dalla (10) per la (II) segue che

$$\| (b_n - b)(x_n) \| \rightarrow 0$$

che assieme alla (8)' genera una contraddizione; perciò la (3) è vera.

Proviamo ora che

$$(I) \Rightarrow (II).$$

Se vale la (I) allora vale la (iii)' di (II); inoltre

$$(11) \quad f(x)(k) = f(a)(k) + b(x-a)(k) + \omega(x-a)(k) \quad \forall x \in X, \forall k \in N$$

essendo $b \in \mathcal{L}(X, Z)$ e ω tale che $\forall A \in \sigma$ e $\forall \varepsilon \in R^+$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |t| \leq \delta \Rightarrow \left\| \frac{\omega(tx)}{t} \right\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

Dalla (11) segue subito le (i)' di (II).

Proviamo ora la (ii)' di (II). Fissato dunque $A \in \sigma$, $\delta > 0$, e tre successioni $(x_n)_{n \in N}$, $(t_n)_{n \in N}$ e $(b_{kn})_{k \in N}$ come dichiarato in (II), proviamo che

$$(\| f(a) - b_n(a) + f^*(b_n) \| \rightarrow 0) \Rightarrow (\| b_n - b)(x_n) \| \rightarrow 0).$$

Anzitutto osserviamo che tuttora vale la (6).

Ragionando per assurdo, supponiamo che sia $\| f(a) - b_n(a) + f^*(b_n) \| \rightarrow 0$ e che esista $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$\| (b_n - b)(x_n) \| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in N.$$

Dalla (II) segue che

$$-b_{kn}(a + t_n x_n)(k) + f^*(b_{kn})(k) + f(a + t_n x_n)(k) - \frac{1}{\| \alpha_1 \|} t_n^2 \delta \alpha_1(k) \geq 0$$

e dalla (iii) segue (ragionando come nel Teorema 1 è $\omega(x-a)(k) \geq 0$)

$$-f(a + t_n x_n)(k) + f(a)(k) + b(t_n x_n)(k) \leq 0;$$

inoltre è

$$b_{kn}(a)(k) - f^*(b_{kn})(k) - f(a)(k) \leq 0;$$

di qui si deduce

$$(12) \quad (b_{kn} - b)(x_n)(k) + \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n \delta \alpha_1(k) \geq 0 \quad \forall n, k \in N.$$

Posto

$$\varepsilon_n = \| f(a) + f^*(b_n)(k) - b_n(a) \|,$$

dalla (11) si ottiene

$$(13) \quad \varepsilon_n + \delta t_n \geq \left\| \sup_{z \in X} \left[(b_n - b)(z) + \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n \delta \alpha_1 - \omega(z) \right] \right\|;$$

infatti

$$\begin{aligned} & \| f(a) + f^*(b_n) - b_n(a) \| + \delta t_n \geq \\ & \geq \left\| f(a) + f^*(b_n) - b_n(a) + \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n \delta \alpha_1 \right\| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 \leq f(a) + f^*(b_n) - b_n(a) &= \sup_{z \in X} [b_n(z) - b_n(a) + f(a) - f(z)] = \\ &= \sup_{z \in X} [(b_n - b)(z) - \omega(z)]; \end{aligned}$$

di qui segue la (13). Sempre dalla (11) discende l'esistenza di $\delta_1 > 0$, che non è restrittivo supporre < 1 , tale che

$$(14) \quad \|\omega(\delta_1 x)\| \leq \frac{1}{16} \varepsilon_0 \delta_1 \quad \forall x \in A.$$

Proviamo che

$$(15) \quad \begin{aligned} 2 \left\| \sup_{z \in X} \left[(b_n - b)(z) + \frac{1}{\|\alpha_1\|} t_n \delta \alpha_1 - \omega(z) \right] \right\| &\geq \\ &\geq \left\| (b_n - b)(\delta_1 x_n) + \frac{1}{\|\alpha_1\|} \delta t_n \alpha_1 - \omega(\delta_1 x_n) \right\|. \end{aligned}$$

Allo scopo poniamo

$$\begin{aligned}
 f_{1n}(k) &= (b_{kn} - b)(\delta_1 x_n)(k) + \frac{1}{\|\alpha_1\|} \delta t_n \alpha_1(k) \\
 f_{2n}(k) &= \omega(\delta_1 x_n)(k) \\
 f_{3n}(k) &= \sup_{z \in X} \left[(b_{kn} - b)(z)(k) + \frac{1}{\|\alpha_1\|} \delta t_n \alpha_1(k) + \omega(z)(k) \right] \\
 A_n &= \{k \in N; f_{1n}(k) \geq f_{2n}(k)\}, \quad B_n = N - A_n, \\
 f_{jA_n}(k) &= \begin{cases} f_{jn}(k) & \text{se } k \in A_n \\ 0 & \text{se } k \in B_n \end{cases}, \quad j=1, 2 \\
 f_{jB_n}(k) &= \begin{cases} f_{jn}(k) & \text{se } k \in B_n \\ 0 & \text{se } k \in A_n \end{cases}, \quad j=1, 2
 \end{aligned}$$

Tenendo presente la (12) e ricordando che $\omega(\delta_1 x_n)(k) \geq 0 \quad \forall k$, si può affermare in base alla (ii) che $f_{jA_n}, f_{jB_n} \in Z$. Poniamo poi

$$\begin{aligned}
 (f_{1n} - f_{2n})^-(k) &= -\min \{ (f_{1n} - f_{2n})(k), 0 \} \\
 (f_{1n} - f_{2n})^+(k) &= -\max \{ (f_{1n} - f_{2n})(k), 0 \};
 \end{aligned}$$

anche $(f_{1n} - f_{2n})^+ \in Z$ e $(f_{1n} - f_{2n})^- \in Z$.

Proviamo che esiste $n_1 \in N$ tale che

$$(16) \quad \|f_{1n}\| \geq 8 \|f_{2n}\|, \quad \|f_{1A_n}\| \geq 4 \|f_{1B_n}\| \quad \forall n \in N, n \geq n_1.$$

Infatti

$$\|f_{1n}\| \geq \| (b_n - b)(\delta_1 x_n) \| - t_n \delta \geq \delta_1 \varepsilon_0 - t_n \delta \geq \frac{1}{2} \delta_1 \varepsilon_0$$

se $n \geq n_1$ per un certo $n_1 \in N$; inoltre per la (14) $\|f_{2n}\| \leq \frac{1}{16} \varepsilon_0 \delta_1$; di qui segue la prima delle (16). Poi da $f_{2n} \geq f_{2B_n} \geq f_{1B_n} \geq 0$ segue che

$$\|f_{1B_n}\| \leq \|f_{2B_n}\| \leq \|f_{2n}\|;$$

quindi, supposta la seconda delle (16) falsa, poichè $f_{1n} = f_{1n_A} + f_{1n_B}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \|f_{1n}\| &\leq \|f_{1n_A}\| + \|f_{1n_B}\| \leq 5 \|f_{1n_B}\| \leq 5 \|f_{2n}\| \leq \\ &\leq \frac{5}{4} \|f_{1n}\|; \end{aligned}$$

che è un assurdo.

Perciò è vera anche la seconda delle (16).

Dalla (16), tenendo presente che $f_{1n} = f_{1n_A} + f_{1n_B}$, segue

$$2 \|f_{1n_A}\| \geq \|f_{1n_A}\| + \|f_{1n_B}\| \geq \|f_{1n}\|.$$

Inoltre, essendo $0 \leq (f_{1n} - f_{2n})^- \leq f_{2n}$, risulta

$$(17) \quad \|f_{2n}\| \geq \|(f_{1n} - f_{2n})^-\|.$$

Proviamo ora che

$$(18) \quad \|(f_{1n} - f_{2n})^+\| \geq \|(f_{1n} - f_{2n})^-\|;$$

infatti dalle (16) e (17) poichè $(f_{1n} - f_{2n})^+ = f_{1n_A} - f_{2n_A}$, segue che

$$\begin{aligned} \|(f_{1n} - f_{2n})^+\| &= \|f_{1n_A} - f_{2n_A}\| \geq \|f_{1n_A}\| - \|f_{2n_A}\| \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \|f_{1n}\| - \|f_{2n}\| \geq \|f_{2n}\| \geq \|(f_{1n} - f_{2n})^-\|. \end{aligned}$$

Poichè (vedi dimostrazione della (13)) $f_{3n} \geq 0$, si ha

$$f_{3n} \geq (f_{1n} - f_{2n})^+;$$

quindi

$$\begin{aligned} 2 \|f_{3n}\| &\geq 2 \|(f_{1n} - f_{2n})^+\| \geq \|(f_{1n} - f_{2n})^+\| + \|(f_{1n} - f_{2n})^-\| \geq \\ &\geq \|f_{1n} - f_{2n}\|; \end{aligned}$$

di qui segue la (15).

Dalle (13), (14) e (15) si ottiene

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon_n + \delta t_n) &\geq \| (b_n - b)(\delta_1 x_n) \| - t_n \delta - \frac{1}{16} \delta_1 \varepsilon_0 \geq \\ &\geq \delta_1 \varepsilon_0 - t_n \delta - \frac{1}{16} \delta_1 \varepsilon_0 ; \end{aligned}$$

ciò è un assurdo in quanto $t_n \rightarrow 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$; dunque vale la (I).

TEOREMA 3. *Siano $X \in \sigma$ come in (a) e Z sia uno spazio vettoriale di successioni in R dotato di due norme $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$, per cui valgono (i), (ii), (iii), (iv) del Teorema 2 e inoltre*

(v) *esistono dei numeri reali positivi M_k , $k \in N$ tali che*

$$| \alpha(k) | \leq M_k \| \alpha \|_i \quad \forall \alpha \in Z, \forall k \in N, i=1, 2.$$

Sia f una funzione convessa continua da X a Z e sia a un punto di X . Consideriamo le due seguenti affermazioni:

- (I) *f è $(X, Z, \sigma, \| \cdot \|_1)$ -differenziabile in a con differenziale $b \in \mathcal{L}(X; Z, \| \cdot \|_1 + \| \cdot \|_2)$*
- (II) *esiste $b \in \mathcal{L}(X; Z, \| \cdot \|_1 + \| \cdot \|_2)$ tale che, fissato ad arbitrio $A \in \sigma$, qualunque siano le successioni $(b_n)_{n \in N}$ in $\mathcal{L}(X; Z, \| \cdot \|_1 + \| \cdot \|_2)$ e $(x_n)_{n \in N}$ in A , si abbia*

$$\left(\sum_{i=1}^2 \| f(a) - b_k(a) + f^*(b_n) \|_i \rightarrow 0 \right) \Rightarrow \left(\| (b_n - b)(x_n) \|_1 \rightarrow 0 \right).$$

Allora (II) \Rightarrow (I).

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col provare che

$$(1) \quad \forall x \in X, \exists \xi \in \mathcal{L}(X; Z, \| \cdot \|_1 + \| \cdot \|_2)$$

tale che

$$f(x)(k) = \xi(x)(k) - f^*(\xi)(k) \quad \forall k \in N.$$

Infatti, poichè f è continua in x , fissato ad arbitrio $\varepsilon \in R^+$, esiste un

aperto O di X tale che

$$z \in O \Rightarrow |f(z)(k) - f(x)(k)| \leq M_k(\|f(z) - f(x)\|_1 + \|f(z) - f(x)\|_2) \leq M_k \varepsilon;$$

quindi $f(\cdot)(k)$ è continua in x , ed essendo convessa esiste $a(k) \in \mathcal{L}(X, R)$ tale che

$$(2) \quad \langle z - x, a(k) \rangle + f(x)(k) \leq f(z)(k) \quad \forall z \in X, \forall k \in N.$$

Posto

$$(3) \quad \xi(z)(k) = \langle z, a(k) \rangle \quad \forall z \in X, \forall k \in N$$

proviamo che

$$(4) \quad \xi(z) \in Z, \forall z \in X \text{ e } \xi \in \mathcal{L}(X; Z, \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2).$$

Dalla (2) segue che

$$|\xi(z-x)(k)| \leq |f(x)(k)| + |f(z)(k)| + |f(2x-z)(k)| \quad \forall k \in N, \forall z \in X;$$

quindi $\xi(z) \in Z$ per le (ii) e (iii) (del Teorema 2).

Sia ora $z_n \in X \forall n \in N, z_n \rightarrow x$; allora dalla (2) discende che

$$|\xi(z_n - x)(k)| \leq |f(z_n)(k) - f(x)(k)| + |f(2x - z_n)(k) - f(x)(k)|,$$

da cui, per la (i) del Teorema 2 e tenendo presente la continuità della f in x ,

$$\begin{aligned} \|\xi(z_n - x)\|_1 + \|\xi(z_n - x)\|_2 &\leq \|f(z_n) - f(x)\|_1 + \|f(z_n) - f(x)\|_2 + \\ &+ \|f(2x - z_n) - f(x)\|_1 + \|f(2x - z_n) - f(x)\|_2 \rightarrow 0; \end{aligned}$$

con ciò rimane dimostrata la (4), risultando ξ continua e lineare.

Proviamo ora la (1).

Dalla (2) segue che per ogni $k \in N$

$$\xi(z)(k) + (f(x)(k) - \xi(x)(k)) \leq f(z)(k) \quad \forall z \in X$$

e quindi $\xi(\cdot)(k) + (f(x)(k) - \xi(x)(k))$ è una minorante affine di $f(\cdot)(k)$; perciò (cfr. [3], p.)

$$-\xi(x)(k) + f(x)(k) \leq -f^*(\xi)(k);$$

dalla definizione di f^* segue che

$$f^*(\xi)(k) \geq \xi(x)(k) - f(x)(k);$$

quindi vale la (1).

Posto ora

$$\omega(x)(k) = f(a+x)(k) - f(a)(k) - b(x)(k) \quad \forall x \in X, \forall k \in N$$

proviamo che

$$(5) \quad \forall A \in \sigma, \forall \varepsilon \in R^+, \exists \delta > 0$$

tale che

$$\|\omega(tx)\|_2 \leq \varepsilon t, \quad \forall t \in R, |t| \leq \delta, \forall x \in A.$$

In caso contrario esistono $V \in \sigma, \delta \in R^+$, una successione $(x_n)_{n \in N}$ in A , una successione $(t_n)_{n \in N}$ in R^+ tali che

$$(6) \quad \|\omega(t_n x_n)\|_2 \geq t_n \delta \quad \forall n \in N, t_n \rightarrow 0.$$

Per la (1) $\forall n \in N$ esiste $b_n \in \mathcal{L}(X; Z, \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2)$ tale che

$$(7) \quad b_n(t_n x_n + a)(k) - f^*(b_n)(k) - f(t_n x_n + a)(k) = 0 \quad \forall k \in N.$$

Dalle (6), (7) tenendo presente che $\omega(x)(k) \geq 0 \quad \forall x \in X, \forall k \in N$ (Cfr. ragionamento fatto nella dimostrazione del Teorema 1), si ha

$$(8) \quad \delta t_n \leq \|b_n(a) - f^*(b_n) - f(a) + b_n(t_n x_n) - b(t_n x_n)\|_i \leq \|b_n(t_n x_n) - b(t_n x_n)\|_i, \quad j=1, 2.$$

Proviamo ora che esiste $M \in R^+$ tale che

$$(9) \quad \sum_{i=1}^2 \| (b_n - b)(x_n) \|_i \leq M \quad \forall n \in N.$$

Infatti, poichè f è continua in a , A è limitato e $t_n \rightarrow 0$, esistono $\delta_1 > 0$, $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che

$$(10) \quad \sum_{i=1}^2 \|f(t_n x_n + a \pm \delta_1 x_n)\|_i + \sum_{i=1}^2 \|f(t_n x_n + a)\|_i \leq M \quad \forall n \geq n_1.$$

Dalla (7) e dalla definizione di f^* segue che

$$b_n(z - (t_n x_n + a))(k) \leq -f(t_n x_n + a)(k) + f(z)(k) \quad \forall z \in X, \forall k \in N;$$

prendendo per z una volta $t_n x_n + a + \delta_1 x_n$ e un'altra $t_n x_n + a - \delta_1 x_n$ si ottiene

$$\begin{aligned} |\delta b_n(x_n)(k)| \leq & |f(t_n x_n + a)(k)| + |f(t_n x_n + a + \delta_1 x_n)(k)| + \\ & + |f(t_n x_n + a - \delta_1 x_n)(k)|, \end{aligned}$$

da cui, tenendo presente la (10) e che b è continua, segue la (9).

Proviamo ora che

$$(11) \quad \sum_{i=1}^2 \|f(a) - b_n(a) + f^*(b_n)\|_i \rightarrow 0.$$

Ciò segue, tenendo presenti le (8) e (9), dalla disuguaglianza

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \|f(a) - b_n(a) + f^*(b_n)\|_i \leq & \sum_{i=1}^2 \|f(a) - b_n(a) + f^*(b_n) - (b_n - b)(t_n x_n)\|_i + \\ & + t_n \sum_{i=1}^2 \|(b_n - b)(x_n)\|_i. \end{aligned}$$

Dalla (11) per la (II) si ottiene

$$\|(b_n - b)(x_n)\|_2 \rightarrow 0,$$

che assieme alla (8) genera una contraddizione; perciò vale la (I).

TEOREMA 4. *Sia X uno spazio di Banach ed esista un numero reale q , $1 < q < +\infty$, tale che*

$$2^{q-1} \|x\|_*^q + 2^{q-1} \|y\|_*^q - \|x+y\|_*^q \geq \|x-y\|_*^q \quad \forall x, y \in X^*.$$

Sia p un numero reale $q \leq p < +\infty$, ed f una funzione continua convessa da un aperto A di X a $l_{p/q, g_1} \cap l_{p, g_1^{1/q}} \cap l_{\infty, g_2}$ con norma

$$\| \cdot, l_{p/q, g_1} \| + \| \cdot, l_p, g_1^{1/p} \| + \| \cdot, l_{\infty, g_2} \| .$$

Se

(i) $g_1, g_2 \in \mathcal{H}$

(ii) $\exists g_3 \in \mathcal{H}$ tale che

$$g_3(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty, \quad g_1 g_3 / g_2 \in l_{p/q}, \quad g_3(k) / g_2(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

oppure

$$g_3(k) / g_2(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$$

(iii) $\exists \delta_1 > 0$ tale che

$$g_2(k) \geq \delta_1 \quad \forall k \in N,$$

allora f è $(X; (l_{p/q, g_1} \cap l_{p, g_1^{1/q}} \cap l_{\infty, g_2}; \| \cdot, l_{p, g_1^{1/p}} \|))$ -differenziabile su di sottoinsieme denso di A . Riferendoci alla (b) di 1 si intenderà che σ sia la famiglia dei sottoinsiemi limitati di X .

DIMOSTRAZIONE.

A. Poniamo

(1) $\varphi_n(x)(k) = n(1 + \|x\|) / g_2(k) \quad \forall x \in X, \forall k \in N$

$$\mathcal{A} = \{ \Psi : X \rightarrow R; \Psi \text{ affine e continua} \}$$

$$\mathcal{B}_{nk} = \{ \Psi \in \mathcal{A}; f(x)(k) \geq \Psi(x) \quad \forall x \in A, \}$$

$$\varphi_n(x)(k) \geq \Psi(x) \quad \forall x \in X, k \in N,$$

(2) $f_n(x)(k) = \sup \{ \Psi(x); \Psi \in \mathcal{B}_{nk} \} \quad \forall x \in X, \forall n, k \in N.$

Per ogni $x_0 \in A$ esistono $\delta \in R^+$ e $n_0 \in N$ tali che

(3) $f_n(x)(k) = f(x)(k)$ per $\|x - x_0\| \leq \delta \quad \forall k \in N, \forall n \geq n_0$

$$(4) \quad |f_n(x)(k) - f_n(x')(k)| \leq n \|x - x'\| / g_2(k) \quad \forall x, x' \in X, \forall n, k \in N.$$

Per la continuità di f in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} |g_2(k)f(z)(k) - \|f(x_0); L_{\infty, g_2}\| &\leq \|f(z); L_{\infty, g_2}\| - \|f(x_0); L_{\infty, g_2}\| \leq \\ &\leq \|f(z) - f(x_0); L_{\infty, g_2}\| \leq 1 \forall z \in A \text{ con } \|z - x_0\| \leq \delta, \forall k \in N. \end{aligned}$$

Sia ora $x \in A$ con $\|x - x_0\| \leq \delta/2$; poichè $f(\cdot)(k)$ è continua in x , per ogni $k \in N$ esiste $a(k) \in X^*$ tale che

$$(5) \quad f(z)(k) \geq f(x)(k) + \langle z - x, a(k) \rangle = \Psi(z) \quad \forall z \in A;$$

quindi

$$\begin{aligned} \langle z - x, a(k) \rangle &\leq f(z)(k) - f(x)(k) \leq \frac{1}{g_2(k)} [|g_2(k)f(z)(k)| + |g_2(k)f(x)(k)|] \leq \\ &\leq 2(1 + \|f(x_0); L_{\infty, g_2}\|) / g_2(k) \leq M / g_2(k) \end{aligned}$$

$\forall z \in A, \|z - x\| \leq \delta/2$ per un certo $M > 0$.

Da quest'ultima discende che

$$(6) \quad \|a(k)\| \leq 2M / (\delta g_2(k)) \quad \forall k \in N$$

perchè

$$\frac{\delta}{2} \|a(k)\| = \sup_{\|t\|=1} \left\langle \frac{\delta}{2} t, a(k) \right\rangle = \sup_{\|t\|=\delta/2} \langle t, a(k) \rangle \leq M / g_2(k).$$

Risulta

$$\begin{aligned} \Psi(z)(k) &= f(x)(k) + \langle x_0 - x, a(k) \rangle - f(x_0)(k) + f(x_0)(k) - \langle x_0, a(k) \rangle + \\ &+ \langle z, a(k) \rangle \leq |f(x_0)(k)| + |\langle x_0, a(k) \rangle| + |\langle z, a(k) \rangle| \end{aligned}$$

perchè

$$f(x)(k) + \langle x_0 - x, a(k) \rangle - f(x_0)(k) \leq 0;$$

quindi per la (6)

$$\Psi(z)(k) \leq |f(x_0)(k)| + 2M(\|x_0\| + \|z\|) / (\delta g_2(k)) \quad \forall z \in X, \forall k \in N.$$

Poichè $f(x_0) \in I_{\infty, g_2}$ esiste $M_1 \in R^+$ tale che

$$|f(x_0)(k)| \leq M_1/g_2(k) \quad \forall k \in N;$$

quindi, preso $n_0 \in N$ tale che

$$n_0 \geq \max \{M_1 + 2M \|x_0\|/\delta, 2M/\delta\},$$

si ottiene

$$\psi(z)(k) \leq n(1 + \|z\|)/g_2(k) \quad \forall n \geq n_0, \forall k \in N;$$

perciò $\psi(\cdot)(k)$ è una minorante affine sia di $f(\cdot)(k)$ che di $\varphi_n(\cdot)(k)$; quindi

$$f_n(x)(k) \leq f(x)(k) = \psi(x)(k) \leq f_n(x)(k);$$

ciò prova la (3). Dimostriamo ora la (4). Cominciamo col provare che, fissati $a \in X^*$, $\beta, \lambda \in R$, si ha

$$(7) \quad (\langle x, a \rangle + \beta \leq \lambda \|x\| + \lambda, \forall x \in X) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\langle x, a \rangle \leq \lambda \|x\|, \forall x \in X).$$

Infatti, supponiamo che esista $z \in X$ tale che $\langle z, a \rangle > \lambda \|z\|$; per ipotesi è

$$\beta - \lambda \leq \lambda \|tz\| - \langle tz, a \rangle = t(\lambda \|z\| - \langle z, a \rangle) \quad \forall t > 0$$

e quindi $\lambda \|z\| \geq \langle z, a \rangle$, da cui l'assurdo; quindi la (7) è vera. Negan-do la (4) esistono $x, y \in N, k \in N$ tali che

$$|f_n(x)(k) - f_n(y)(k)| > n \|x - y\|/g_2(k).$$

Possiamo supporre $f_n(x)(k) \geq f_n(y)(k)$. Fissato $\varepsilon \in R^+$ tale che sia

$$\varepsilon + n \|x - y\|/g_2(k) < f_n(x)(k) - f_n(y)(k),$$

per la definizione di f_n esistono $a(k) \in X^*$, $\beta \in R$ tali che

$$\langle z, a(k) \rangle + \beta \leq f_n(x)(z)(k) \quad \forall z \in X$$

$$\langle x, a(k) \rangle + \beta + \varepsilon \geq f_n(x)$$

$$\langle z, a(k) \rangle + \beta \leq n(1 + \|z\|) / g_2(k) \quad \forall z \in X;$$

quindi, ricordando anche la (7), si ottiene

$$\begin{aligned} \varepsilon + n \|x - y\| / g_2(k) < f_n(x)(k) - f_n(y)(k) \leq \beta + \langle x, a(k) \rangle + \varepsilon - \beta - \\ - \langle y, a(k) \rangle = \langle x - y, a(k) \rangle + \varepsilon \leq n \|x - y\| / g_2(k), \end{aligned}$$

che è un assurdo; perciò la (4) è vera.

B. Come nel Teorema 3 si prova che

$$(8) \quad \forall x \in A, \exists \xi \in \mathcal{L}(X; l_{p/q, g_1} \cap l_{p, g_1^{1/q}} \cap l_{\infty, g_2})$$

tale che

$$f(z)(k) \geq \xi(z-x)(k) + f(x)(k) \quad \forall k \in N, \forall z \in A.$$

Fissato $x_0 \in A$, per la continuità della f in x_0 , esiste δ_2 , $0 < \delta_2 \leq \delta$, tale che $\|f(z) - f(x_0); l_{\infty, g_2}\| \leq 1$ per $\|z - x_0\| \leq \delta_2$ e quindi

$$(9) \quad |f(z)(k)| \leq |f(x_0)(k)| + 1 / g_2(k) \quad \forall z \in A, \|z - x_0\| \leq \delta_2;$$

per le (3), (4) esiste un M_2 ($M_2 \geq n_0$) tale che

$$(10) \quad |f(x)(k) - f(y)(k)| \leq M_2 \|x - y\| / g_2(k)$$

$$\forall x, y \in A, \|x - x_0\| \leq \delta_2, \|y - x_0\| \leq \delta_2 \text{ e } \forall k \in N.$$

Supponiamo vere (i), (iii) e (ii) con la condizione $g_3(k) / g_2(k) \rightarrow 0$.
Poniamo

$$B = \{x \in X; \|x - x_0\| \leq \delta_2\}$$

supponendo (il che non è restrittivo) $B \subseteq A$,

$$\begin{aligned} F_{n,k} = \{x \in B; f(x)(k) - \rho^{s-1} \|x - y\|^s / s + g_3(k) / (n \rho g_2(k)) > \\ > \sup_{z \in B} \left(f(z)(k) - \frac{1}{s} \rho^{s-1} \|z - y\|^s \right); \end{aligned}$$

per un $\rho \geq n$ e un $y \in B$ con

$$\|x - y\|^{s-1} \leq sM_2/(\delta_1 \rho^{s-1}),$$

essendo $s = q/(q-1)$ e

$$E_{n,k} = \left\{ x \in B; f(x)(k) - \frac{n^{s-1}}{s} \|x - y\|^s + g_3(k)/(n^2 g_2(k)) > \right. \\ \left. > \sup_{z \in \bar{B}} \left(f(z)(k) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z - y\|^s \right) \right. \\ \left. \text{per un certo } y \in B \text{ con } \|x - y\|^{s-1} \leq sM_2/(\delta_1 n^{s-1}) \right\}$$

e proviamo che

$$(11) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \exists \bar{k}_n \in \mathbb{N} \text{ tale che } E_{n,k} \text{ è denso in } B \quad \forall k \geq \bar{k}_n.$$

Infatti, in caso contrario, esistono $n \in \mathbb{N}$ e una successione $(k_j)_j \in \mathbb{N}$ in \mathbb{N} con $k_j \rightarrow +\infty$ tale che E_{n,k_j} non sia denso in B . Come si è già detto, risulta $|f(x_0)(k)g_2(k)| \leq M_1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$; quindi per la (9), posto $M_2 = M_1 + 1$, si ha

$$(12) \quad |f(z)(k)| \leq M_2/g_2(k) \quad \forall z \in N, \quad \forall z \in B.$$

Fissato $k_{j_1} \in \mathbb{N}$ tale che

$$(13) \quad M_2/g_2(k_{j_1}) \leq g_3(k_{j_1})/(8n^2 g_2(k_{j_1}))$$

esistono $\delta_3 > 0$ e $\bar{x} \in B$ tali che

$$(14) \quad f(z)(k_{j_1}) - \frac{n^{s-1}}{s} \|x - y\|^s + g_3(k_{j_1})/(n^2 g_2(k_{j_1})) \leq \\ \leq \sup_{z \in \bar{B}} \left(f(z)(k_{j_1}) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z - y\|^s \right),$$

$$\forall x, y \in B \text{ con } \|x - y\|^{s-1} \leq sM_2/(m\delta_1 n^{s-1}) \text{ e } \|x - \bar{x}\| \leq \delta_3.$$

Proviamo ora che esiste $k_1 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall x \in B$ risulta

$$(15) \quad f(x)(k) \leq f(x)(k_{j_1}) + g_3(k_{j_1}) / (4n^2 g_2(k_{j_1})) \quad \forall k \geq k_1$$

$$(16) \quad - \sup_{z \in \bar{B}} \left(f(z)(k) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \right) \leq \\ \leq - \sup_{z \in \bar{B}} \left(f(z)(k_{j_1}) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \right) + \\ + g_3(k_{j_1}) / (4n^2 g_2(k_{j_1})), \quad \forall k \geq k_1.$$

Infatti preso $k_1 \in \mathbb{N}$ tale che $g_2(k) \leq (g_2(k_{j_1})) \quad \forall k \geq k_1$ (il che è possibile perchè $g_3(k) \rightarrow +\infty$ e $g_3(k)/g_2(k) \rightarrow 0$ e quindi anche $g_2(k) \rightarrow +\infty$), per le (12) e (13) si ha

$$(f(x)(k) - f(x)(k_{j_1})) \leq \frac{M_3}{g_2(k)} + \frac{M_3}{g_2(k_{j_1})} \leq \frac{2M_3}{g_2(k_{j_1})} \leq \frac{g_3(k_{j_1})}{4n^2 g_2(k_{j_1})}, \\ \forall k \geq k_1,$$

da cui segue la (15). Inoltre per la (12)

$$\sup_{z \in \bar{B}} \left(f(z)(k_{j_1}) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \right) - \sup_{z \in \bar{B}} \left(f(z)(k) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \right) \leq \\ \leq \sup_{z \in \bar{B}} \left(\frac{M_3}{g_2(k_{j_1})} - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \right) - \sup_{z \in \bar{B}} \left(- \frac{M_3}{g_2(k)} - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \right) = \\ = \frac{M_3}{g_2(k_{j_1})} + \frac{M_3}{g_2(k)} \leq \frac{1}{4} \frac{g_3(k_{j_1})}{n^2 g_2(k_{j_1})} \quad \forall k \geq k_1,$$

da cui la (16). Dalle (14), (15) e (16) segue che

$$(17) \quad f(x)(k) - \frac{n^{s-1}}{s} \|x-y\|^s + g_3(k_{j_1}) / (2n^2 g_2(k_{j_1})) \leq \\ \leq \sup_{z \in \bar{B}} \left(f(z)(k) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \right)$$

$$\forall x, y \in B \text{ con } \|x-y\|^{s-1} \leq \frac{sM_2}{\delta_1 n^{s-1}} \text{ e } \|x-\bar{x}\| \leq \delta_3.$$

Proviamo ora che

$$(18) \quad = \sup_{z \in \bar{B}} \left(f(z)(k) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \right) = \\ = \sup \left\{ f(z)(k) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s; z \in B, \|z-y\|^s \leq 2M_3s/(n^{s-1}g_2(k)) \right\}, \\ \forall k \in N, \forall y \in B.$$

Infatti tenendo presente la (13) se $\|z-y\|^s \geq 2M_3s/(n^{s-1}g_2(k))$ e $z \in B$ allora $2M_3/g_2(k) \leq \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s$, da cui

$$f(z)(k) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \leq \frac{M_2}{g_2(k)} - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \leq -\frac{M_3}{g_2(k)} \leq f(y)(k).$$

Proviamo ora che dalla (17) discende una contraddizione. Infatti preso $y = \bar{x}$ e $k_2 \geq k_1$ tale che

$$\delta_4 = \left(\frac{2M_3s}{n^{s-1}g_2(k)} \right)^{1/s} \leq \min \left\{ \delta_3, \frac{1}{n} \left(\frac{sM_2}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{s-1}} \right\}$$

dalle (17) e (18) si ottiene

$$f(x)(k_2) - \frac{n^{s-1}}{s} \|x-\bar{x}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{g_3(k_{j_1})}{n^2 g_2(k_{j_1})} \leq \\ = \sup \left\{ f(z)(k_2) - \frac{n^{s-1}}{s} \|z-\bar{x}\|^s; z \in B, \|z-\bar{x}\| \leq \delta_4 \right\} \\ \forall x \in B \text{ con } \|x-\bar{x}\| \leq \delta_4;$$

quindi per $0 < \varepsilon < g_3(k_{j_1})/(2n^2 g_2(k_{j_1}))$ esiste \bar{z} con $\|\bar{z}-\bar{x}\| \leq \delta_4$ tale che

$$f(x)(k_2) - \frac{n^{s-1}}{s} \|x-\bar{x}\|^s + g_3(k_{j_1})/(2n^2 g_2(k_{j_1})) \leq f(\bar{z})(k_2) - \\ - \frac{n^{s-1}}{s} \|\bar{z}-\bar{x}\|^s + \varepsilon \quad \forall x \in B, \|x-\bar{x}\| \leq \delta_4,$$

da cui, prendendo $x = \bar{z}$, si ottiene una contraddizione; perciò la (11) è vera.

Proviamo ora che

$$(19) \quad F_{n,k} \text{ è aperto denso in } B \quad \forall n, k \in N.$$

Infatti in caso contrario esistono $\bar{x} \in B$, $\delta_5 > 0$ tali che

$$(20) \quad \begin{aligned} f(x)(k) - \rho^{s-1} \frac{1}{s} \|x-y\|^s + g_3(k)/(n\rho g_2(k)) &\leq \\ &\leq \sup_{z \in B} \left(f(z)(k) - \rho^{s-1} \frac{1}{s} \|z-y\|^s \right) \end{aligned}$$

$$\forall \rho \geq n, \forall y \in B, \forall x \in B, \|x-\bar{x}\| \leq \delta_5 \text{ e } \|x-y\|^{s-1} \leq sM_2/(\delta_1 \rho^{s-1}).$$

Si ha

$$(21) \quad \begin{aligned} &\sup_{z \in B} \left(f(z)(k) - \frac{\rho^{s-1}}{s} \|z-y\|^s \right) = \\ &= \sup \left\{ f(z)(k) - \frac{\rho^{s-1}}{s} \|z-y\|^s; z \in B, \|z-y\|^{s-1} \leq sM_2/(\delta_1 \rho^{s-1}) \right\} \\ &\quad \forall y \in B; \end{aligned}$$

infatti da $\|z-y\| \geq (sM_2/(\delta_1 \rho^{s-1}))^{1/(s-1)}$ segue che $\frac{\rho^{s-1}}{s} \|z-y\|^{s-1} \geq M_2/\delta_1$; perciò

$$\rho^{s-1} \frac{1}{s} \|z-y\|^s \geq M_2 \frac{1}{\delta_1} \|z-y\| \geq f(z)(k) - f(y)(k),$$

da cui

$$f(y)(k) \geq f(z)(k) - \frac{1}{s} \rho^{s-1} \|z-y\|^2 \quad \forall z \in B \text{ con } \|z-y\|^{s-1} \geq sM_2/(\delta_1 \rho^{s-1}).$$

Dalle (21), (20) presi $y = \bar{x}$, $\varepsilon > 0$, $\bar{\rho} \geq n$ tali che $M_2 \bar{\rho}/(\delta_1 \bar{\rho}^{s-1}) \leq \delta_5^{s-1}$ e $g_3(k)/(n\bar{\rho} g_2(k)) > \varepsilon$, esiste $\bar{z} \in B$ e tale che $\|\bar{z}-\bar{x}\|^{s-1} \leq sM_2/(\delta_1 \bar{\rho}^{s-1})$, per cui riesce

$$f(x)(k) - \frac{1}{s} \bar{\rho}^{s-1} \|x-\bar{x}\|^s + \frac{g_3(k)}{n\bar{\rho} g_2(k)} \leq f(\bar{z})(k) - \frac{1}{s} \bar{\rho}^{s-1} \|\bar{z}-\bar{x}\|^s + \varepsilon$$

$$\forall x \in B, \|x-\bar{x}\| \leq (sM_2/(\delta_1 \bar{\rho}^{s-1}))^{1/(s-1)} \leq \delta_5;$$

di qui prendendo $x=\bar{z}$ si ottiene una contraddizione; perciò la (19) è vera. Dalle (11) e (19) segue che, posto

$$G_{n,k} = \begin{cases} F_{n,k} & \text{se } k < \bar{k}_n \\ E_{n,k} & \text{se } k \geq \bar{k}_n, \end{cases}$$

(22) $G_{n,k}$ è aperto denso in B e se $x \in G_{n,k}$ possiamo supporre

$$\sup_{k \in N} \rho_{n,k} < +\infty$$

essendo $\rho_{n,k}$ uno dei valori di ρ soddisfacenti la condizione nella definizione di $F_{n,k}$ se $k < \bar{k}_n$ e $\rho = n$ se $k = \bar{k}_n$.

C. Supponiamo ora vere (i), (ii) e (iii) con la condizione

$$g_3(k)/g_2(k) \rightarrow +\infty.$$

Proviamo che

(23) $\forall n \in N, \exists \bar{k}_n \in N$ tale che $E_{n,k} = B \quad \forall k \geq \bar{k}_n$.

Infatti poichè $g_3(k)/g_2(k) \rightarrow +\infty$, esiste $\bar{k} \in N$ tale che

$$\frac{1}{4} \frac{g_3 k}{n^2 g_2(k)} \geq \frac{n^{s-1}}{s} \delta_2^s, \quad \frac{1}{4} \frac{g_3(k)}{n^2} \geq M_2 \quad \forall k \geq \bar{k},$$

da cui, tenendo presenti la (12), la definizione di B e di $E_{n,k}$, si ottiene

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in B} \left(f(z)(k) - \frac{1}{s} n^{s-1} \|z-y\|^s \right) + \frac{1}{s} n^{s-1} \|z-y\|^s - f(x)(k) \leq \\ & \leq \sup_{z \in B} (f(z)(k)) + \frac{1}{s} n^{s-1} \|z-y\|^s - f(x)(k) \leq 3g_3(k)/(4n^2g_2(k)) < \\ & < g_3(k)/(n^2g_2(k)) \quad \forall k \geq \bar{k}, \end{aligned}$$

da cui la (23). Dalle (19) e (23) segue la (22).

D. Proviamo ora l'affermazione fatta sulla differenziabilità di f .
Posto

$$G = \bigcap_{n, k \in N} G_{n, k},$$

poichè B è uno spazio di Baire, per la (22) G è denso in B .

Supponiamo ora $0 \in G$, 0 interno a B , $f(0) = 0$, e proviamo che in queste ipotesi f è differenziabile in 0 .

Cominciamo con l'osservare che se $0 \in G$ e $f(0) = 0$ allora esistono $\rho_{n, k} \geq n$ e $y_{n, k} \in B$ tali che

$$(24) \quad f(z)(k) \leq \rho_{n, k}^{s-1} \frac{1}{s} \|z - y_{n, k}\|^s - \frac{1}{s} \rho_{n, k}^{s-1} \|y_{n, k}\|^s + \frac{g_3(k)}{n \rho_{n, k} g_2(k)}$$

$$\forall z \in B, \quad \|\rho_{n, k} y_{n, k}\| \leq (s M_2 / \delta_1)^{1/(s-1)} \leq M_4,$$

per un certo $M_4 \in R^+$, e $\forall n, k \in N$.

Proviamo ora che esiste $\bar{n} \in N$, tale che

$$(25) \quad f_{n_0}(z)(k) \leq \rho_{n, k}^{s-1} \frac{1}{s} \|z - y_{n, k}\|^s - \frac{1}{s} \rho_{n, k}^{s-1} \|y_{n, k}\|^s + g_3(k) / (n \rho_{n, k} g_2(k))$$

$$\forall z \in X, \quad \forall k \in N, \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Per comodità in questa dimostrazione supponiamo $x_0 = 0$. Dalla (12) e dalla (iii) discende intanto

$$(26) \quad |f_{n_0}(z)(k)| \leq \frac{M_2}{\delta_1} \quad \forall k \in N, \quad \forall z \in B;$$

fissiamo $\bar{n} \in N$ tale che sia

$$(27) \quad \frac{M_4}{\rho_{n, k}} \leq \frac{\delta_2}{4}, \quad \frac{2M_2}{\delta_1} + \left(\frac{\delta_2}{4}\right)^s \frac{\rho_{n, k}^{s-1}}{s} \leq \left(\frac{\rho_{n, k}^{s-1}}{s} - \frac{M_2}{\delta_1}\right) \left(\frac{3\delta_2}{4}\right)^s \quad \forall n \geq \bar{n};$$

dalla prima delle (27) e dalla (24) si ha

$$\|y_{n, k}\| \leq (M_4 / \rho_{n, k}) \leq \delta_2 / 4,$$

e quindi

$$\|z - y_{n,k}\| \geq \|z\| - \|y_{n,k}\| \geq 3\delta_2/4 \quad \forall z \notin B, \forall n \geq \bar{n};$$

da questa e dalla seconda delle (27) segue

$$\begin{aligned} \frac{2M_2}{\delta_1} + \|y_{n,k}\|^s \rho_{n,k}^{s-1} \frac{1}{s} + M_2 \|z - y_{n,k}\|^s / \delta_1 &\leq \\ &\leq \rho_{n,k}^{s-1} \frac{1}{s} \|z - y_{n,k}\|^s \quad \forall z \notin B, \forall n \geq \bar{n}. \end{aligned}$$

Quindi ricordando la (10), dalle precedenti disuguaglianze e dalla (26) si ottiene

$$\begin{aligned} f_{n_0}(z)(k) &\leq f_{n_0}(y_{n,k})(k) + M_2 \|z - y_{n,k}\| / \delta_1 \leq \frac{M_2}{\delta_1} (2 + \|z - y_{n,k}\|^s) = \\ &= \left(\frac{2M_2}{\delta_1} + \|y_{n,k}\|^s \rho_{n,k}^{s-1} \frac{1}{s} + M_2 \|z - y_{n,k}\|^s / \delta_1 \right) - \rho_{n,k}^{s-1} \|y_{n,k}\|^s \frac{1}{s} \leq \\ &\leq \rho_{n,k}^{s-1} \|z - y_{n,k}\|^s \frac{1}{s} - \rho_{n,k}^{s-1} \|y_{n,k}\|^s \frac{1}{s} \quad \forall z \notin B, \forall n \geq \bar{n}; \end{aligned}$$

da quest'ultima e dalla (24) segue la (25).

Proviamo ora che dalla (25), posto $z_{n,k} = -\rho_{n,k} y_{n,k}$ segue che

$$\begin{aligned} (28) \quad \rho_{n,k} f_{n_0}^*(\xi)(k) &\geq -\xi(z_{n,k})(k) + \frac{1}{q} \|\xi(\cdot)(k)\|_*^q + \frac{1}{s} \|z_{n,k}\|^s - \frac{g_3(k)}{ng_2(k)} \\ &\forall \xi \in \mathcal{L}(X, l_{p/q}, g_1 \cap l_p, g_1^{1/q} \cap l_\infty, g_2), \quad \forall n, k \in N \text{ con } n \geq \bar{n}. \end{aligned}$$

Infatti, per la (25) si ha

$$\begin{aligned} \rho_{n,k} f_{n_0}^*(\xi)(k) &= \rho_{n,k} \sup \{ \xi(z)(k) - f_{n_0}(z)(k); z \in X \} \geq \frac{1}{s} \|z_{n,k}\|^s - \\ &- \frac{g_3(k)}{ng_2(k)} + \sup \left\{ \xi(\rho_{n,k} z)(k) - \frac{1}{s} \|\rho_{n,k} z + z_{n,k}\|^s; z \in X \right\} = \\ &= \frac{1}{s} \|z_{n,k}\|^s - \frac{g_3(k)}{ng_2(k)} + \sup \left\{ \xi(z - z_{n,k})(k) - \frac{1}{s} \|z\|^s; z \in X \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s} \|z_{n,k}\|^s - \frac{g_3(k)}{ng_2(k)} - \xi(z_{n,k})(k) + \frac{1}{q} \|\xi(\cdot)(k)\|^2$$

perchè per il lemma 2 di [1] si ha

$$\frac{1}{q} \|v\|^q = \sup \left\{ \langle z, v \rangle - \frac{1}{s} \|z\|^s; z \in X \right\} \quad \forall v \in X^*$$

Per la (8) essendo $x=0$ (essendo $f(0)=0$ e $\xi(0)=0$) si ha che esiste $b \in \mathcal{L}(X, l_{p/q, g_1} \cap l_{p, g_1^{1/q}} \cap l_{\infty, g_2})$ tale che

$$f(z)(k) \geq b(z)(k) \quad \forall z \in A \text{ e } \forall k \in N;$$

per la continuità di b dalla (1) segue $b(x)(k) \leq \varphi_{n_0}(x)(k)$ (eventualmente sostituendo n_0 con una costante maggiore). Da queste due segue che $b(\cdot)(k) \in \mathcal{B}_{n_k} \quad \forall k \in N$ e quindi per la (2)

$$(29) \quad f_{n_0}(z)(k) \geq b(z)(k) \quad \forall z \in X \text{ e } \forall k \in N.$$

Da

$$f_{n_0}^*(\xi)(k) = \sup \{ \xi(x)(k) - f_{n_0}(x)(k); x \in X \} \geq \xi(0)(k) - f_{n_0}(0)(k) = 0$$

e dalla (29) segue

$$0 \leq f_{n_0}^*(b)(k) = \sup \{ b(x)(k) - f_{n_0}(x)(k); x \in X \} \leq \sup \{ b(x)(k); x \in X \} = 0;$$

quindi

$$(30) \quad f_{n_0}^*(b)(k) = 0 \quad \forall k \in N.$$

Dalla (28) tenendo presente la (30) si ottiene

$$(31) \quad 0 \geq -b(z_{n,k})(k) + \frac{1}{q} \|b(\cdot)(k)\|^q + \frac{1}{s} \|z_{n,k}\|^s - \frac{g_3(k)}{ng_2(k)}.$$

Inoltre si ha

$$(32) \quad 0 \geq b(z_{n,k})(k) + \xi(z_{n,k})(k) - \frac{2}{s} \|z_{n,k}\|^s - \frac{2}{q} \left\| \frac{1}{2} (b(\cdot)(k) + \xi(\cdot)(k)) \right\|_*^q.$$

Sommando le disuguaglianze (28), (31) e (32) si ottiene

$$(33) \quad \rho_{n, k} f_{n_0}^*(\xi)(k) \geq \frac{1}{q} \|\xi(\cdot)(k)\|_*^q + \frac{1}{q} \|b(\cdot)(k)\|_*^q - \\ - \frac{1}{q 2^{q-1}} \|b(\cdot)(k) + \xi(\cdot)(k)\|_*^q - \frac{2g_3(k)}{ng_2(k)}$$

$$\forall \xi \in \mathcal{L}(X; l_{p/q}, g_1 \cap l_p, g_1^{1/q} \cap l_\infty, g_2) \quad \forall k \in N, \forall n \geq \bar{n}.$$

Posto

$$\rho_n = \sup_k \rho_{n, k} \quad (< +\infty \text{ per la (22)})$$

dalle ipotesi del Teorema e dalla (33) discende che

$$(34) \quad \rho_n f_{n_0}^*(\xi)(k) + \frac{2g_3(k)}{ng_2(k)} \geq \frac{1}{q} 2^{1-q} \|b(\cdot)(k) - \xi(\cdot)(k)\|_*^q \quad \forall n, k \in N.$$

Proviamo ora che vale la (II) del Teorema 3. Sia dunque $(b_n)_{n \in N}$ una successione in $\mathcal{L}(X; l_{p/q}, g_1 \cap l_p, g_1^{1/q} \cap l_\infty, g_2)$ tale che risulti

$$(35) \quad \|f_{n_0}(0) + b_m(0) + f_{n_0}^*(b_m); l_{p/q}, g_1 \cap l_p, g_1^{1/q} \cap l_\infty, g_2\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Sia poi $(x_n)_{n \in N}$ una successione in X , limitata, e sia $\|x_n\| \leq C \quad \forall n$. Dalla (34) si ottiene

$$g_1(k) \rho_n f_{n_0}^*(b_m)(k) + \frac{2g_1(k)g_3(k)}{ng_2(k)} \geq \frac{2^{1-q}}{c^q q} |(b - b_m)(x)(k)|^q g_1(k)$$

da cui

$$\rho_n^{1/q} \|f_{n_0}^*(b_m); l_{p/q}, g_1\| + \left(\frac{2}{n}\right)^{1/q} \|g_1 g_3 / g_2; l_{p/q}\| \geq \\ \geq \frac{2^{1-q}}{c q^{1/q}} \|(b - b_m)(x_m); l_{p, g_1^{1/q}}\| \quad \forall n, m \in N, n \geq \bar{n};$$

quindi

$$\|(b - b_m)(x_m); l_{p, g_1^{1/q}}\| \rightarrow 0.$$

Perciò per il Teorema 3 f è $(X; l_{p/q}, g_1 \cap l_p, g_1^{1/q} \cap l_\infty, g_2; \|\cdot, l_p, g_1^{1/q}\|)$ -differenziabile in 0.

Proviamo ora che in ogni punto di F , f è differenziabile; basta considerare la funzione $f_x(z) = f(z-x) - f(x)$ e ragionare come in [5]. Quindi f è differenziabile su di un sottoinsieme denso di B ; facendo poi variare x_0 in A si dimostra che f è differenziabile su di un sottoinsieme denso di A .

BIBLIOGRAFIA

- [1] ASPLUND, E.: *Fréchet differentiability of convex functions*, Acta Mathematica, 121 (1968).
- [2] MOREAU J. J.: *Séminaire sur les equations aux dérivées partielles, Fonctionnelles Convex*, College de France (1966-1967).
- [3] MOUREAU, J.: *Inf-Convolution, Sous-Additivité, Convexité Des Fonctions Numériques*, J. Math. Pures Appl., 49 (1970), pp. 109-154.
- [4] MURATORI, P.: *Sulla differenziabilità secondo Gateaux di involucri superiori di funzioni negli spazi di Banach*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), 4 (1971), 789-814.
- [5] MURATORI, P.: *Sulla derivabilità degli involucri superiori di funzioni*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), 5 (1972), 319, 332.

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 febbraio 1972.