

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Una caratterizzazione dei gruppi semiresiduati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 47 (1972), p. 29-42

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__29_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNA CARATTERIZZAZIONE DEI GRUPPOIDI SEMIRESIDUATI

DOMENICO BOCCIONI *)

Per comodità del lettore, ricordiamo anzitutto alcune definizioni e notazioni che sono state introdotte in un precedente lavoro [2], e che vengono usate nel seguito.

Un « gruppoide con ordine » è un insieme non vuoto G munito di una moltiplicazione e di un ordine (parziale), ([2], n. 1).

Se G è un gruppoide con ordine e se $a, b \in G$, il simbolo $[a : b]$ (risp. $[a :: b]$) denota l'insieme degli $x \in G$ tali che $xb \leq a$ (risp. $bx \leq a$), ([2], n. 6).

Un gruppoide con ordine G è « semiresiduato a destra » (risp. « a sinistra »), se, $\forall a, b \in G$, l'insieme $[a : b]$ (risp. $[a :: b]$) è vuoto oppure (quando non è vuoto) ha un elemento massimo, denotato con $a : b$ (risp. $a :: b$) e chiamato il residuale destro (risp. sinistro) di a per b . G è « semiresiduato », se è semiresiduato a destra e a sinistra, ([2], nn. 7 e 6).

Notoriamente, un gruppoide ordinato G (cioè un gruppoide con ordine in cui $x \leq y$ implica $xz \leq yz$ e $zx \leq zy$, $\forall x, y, z \in G$) dicesi residuato a destra (risp. a sinistra), se è semiresiduato a destra (risp. a sinistra) e se inoltre, $\forall a, b \in G$, l'insieme $[a : b]$ (risp. $[a :: b]$) non è vuoto. G dicesi residuato, se è residuato a destra e a sinistra. Queste tre definizioni si intendono valide anche se G è un gruppoide con ordine, ([2], n. 7).

Com'è noto, i groupoidi ordinati residuati sono già stati molto studiati da vari Autori (si vedano ad es. [1], [6], [7], [8] ed i lavori ivi

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

citati). D'altra parte, nel n. 8 di [2] si è visto che alcune loro interessanti proprietà sono in realtà proprietà dei gruppoidi ordinati semiresiduati (la classe dei quali contiene propriamente la classe dei gruppoidi ordinati residuati), ossia che tali proprietà si conservano con queste ipotesi più deboli.

È da rilevare che un gruppoide ordinato semiresiduato e non residuato è una struttura molto naturale e diffusa: tale è ad es. l'insieme dei numeri interi >0 rispetto alla moltiplicazione e all'ordine usuali (n. 6, Es. 3); tale è pure l'insieme dei sottinsiemi non vuoti di un gruppo contenente almeno due elementi rispetto alla moltiplicazione fra « complessi » e all'inclusione (n. 6, Es. 2); ed il numero (cardinale) degli elementi di una tale struttura può essere qualsiasi ≥ 2 ([2], n. 10, Es. 5).

Inoltre, come si dimostra nel seguito (n. 7, XVIII), ogni gruppoide ordinato residuato è « *r.* immerso » (cioè è immerso con conservazione di tutti i residuali destri e sinistri) in un gruppoide ordinato semiresiduato e non residuato.

Nel presente lavoro si è cercato essenzialmente di ricondurre lo studio dei gruppoidi ordinati semiresiduati allo studio (già notevolmente esteso e approfondito, come sopra si è ricordato) dei gruppoidi ordinati residuati. A questo scopo possono servire (cfr. n. 6, 1° e 2° capov.) i due Teoremi 1 e 2 (nn. 4 e 5), che sono i principali risultati di questo lavoro. Dal Teorema 2 (al quale si riferisce il titolo del lavoro) segue, in particolare, che ogni gruppoide ordinato semiresiduato G è *r.* immerso (mediante l'aggiunzione di due soli elementi, denotati con 0 e ∞) in un gruppoide ordinato residuato, denotato con $G(0, \infty)$; 0 è lo zero di $G(0, \infty)$ (n. 1), mentre ∞ ne è il « quasi-infinito » (n. 2).

Un'altra notevole conseguenza del Teorema 2 è la seguente (n. 7, XIX): Ogni gruppoide ordinato residuato è *r.* immerso in un gruppoide ordinato residuato dotato di zero.

È da notare che (v. n. 8), affinché un gruppoide ordinato residuato G sia dotato di zero, è necessario (ma non sufficiente) che G sia dotato di massimo, ed è (necessario e) sufficiente che G sia dotato di minimo, (quest'ultima affermazione non è invece vera per un gruppoide con ordine residuato).

1. Conserviamo nel presente lavoro tutte le definizioni (e le relative notazioni) introdotte in [2].

Sia G un gruppoide con ordine. Uno *zero* (risp. un *infinito*) di G è, per definizione (cfr. [7], pp. 132, 133 e [1], p. 319), un elemento di G , che denoteremo con 0 (risp. ∞), tale che

$$(1) \quad 0 \leq x \text{ e } 0x = x0 = 0 \quad \forall x \in G$$

(risp. tale che

$$(2) \quad x \leq \infty \text{ e } \infty x = x\infty = \infty \quad \forall x \in G).$$

Se esiste uno zero (risp. un infinito) di G , nel qual caso diremo che G è *dotato di 0* (risp. *dotato di ∞*), esso è evidentemente unico.

Chiameremo *sottogruppoide con ordine* di un gruppoide con ordine H un sottinsieme non vuoto e stabile¹⁾ G di H , munito della moltiplicazione e dell'ordine indotti su G risp. dalla moltiplicazione e dall'ordine di H ([4], p. 11 e [3], p. 33); (un sottogruppoide con ordine G di H è dunque un gruppoide con ordine).

Chiameremo *0-ampliamento* (risp. *∞ -ampliamento*) di un gruppoide con ordine G un gruppoide con ordine H soddisfacente le tre seguenti condizioni²⁾: 1) H è dotato di 0 (risp. di ∞), 2) $G = H - \{0\}$ (risp. $G = H - \{\infty\}$), 3) G è un sottogruppoide con ordine di H .

Un *isomorfismo* di un gruppoide con ordine H_1 su un gruppoide con ordine H_2 è, per definizione (cfr. [5], p. 2), una applicazione (biunivoca) f di H_1 su H_2 tale che $f(xy) = f(x)f(y)$, e che $x \leq y$ se e solo se $f(x) \leq f(y)$, ($\forall x, y \in H_1$).

Sia G un sottogruppoide con ordine di due gruppidi con ordine H_1 e H_2 . Chiameremo *G -isomorfismo* di H_1 su H_2 ogni isomorfismo di H_1 su H_2 tale che $f(x) = x \ \forall x \in G$. Dicendo che H_1 e H_2 sono *G -isomorfi*, intenderemo dire che esiste un *G -isomorfismo* di H_1 su H_2 .

Facilmente si verifica che vale la seguente proposizione I (cfr. [7], p. 132, ult. capv. e p. 133, 4° capov.).

¹⁾ Un sottoinsieme G di un gruppoide H dicesi *stabile* (per la moltiplicazione di H), se il prodotto di due qualsiasi elementi di G appartiene a G (cfr. [4], p. 10).

²⁾ Se A e B sono due insiemi, $A - B$ denota l'insieme formato dagli elementi di A che non appartengono a B . Quindi

$$H - \{0\} = \{x \in H; x \neq 0\}, \quad H - \{\infty\} = \{x \in H; x \neq \infty\}.$$

I. Se G è un gruppoide con ordine, esistono 0-ampliamenti ed ∞ -ampliamenti di G . Inoltre due qualsiasi 0-ampliamenti (risp. ∞ -ampliamenti) di G sono G -isomorfi. //

Se G è un gruppoide con ordine, con i due simboli

$$G(0), G(\infty)$$

denoteremo risp. un qualsiasi 0-ampliamento ed un qualsiasi ∞ -ampliamento di G . In virtù della I, $G(0)$ (risp. $G(\infty)$) denota dunque un gruppoide con ordine univocamente determinato da G a meno di G -isomorfismi.

Si verifica facilmente che valgono le seguenti II e III (v. [2], n. 1; cfr. [7], pp. 132, 133, 138).

II. Un gruppoide con ordine G è un gruppoide d -ordinato (risp. s -ordinato, risp. ordinato) se, e solo se, $G(0)$ è un gruppoide d -ordinato (risp. s -ordinato, risp. ordinato). //

III. Un gruppoide con ordine G è un gruppoide d -ordinato (risp. s -ordinato, risp. ordinato) se, e solo se, $G(\infty)$ è un gruppoide d -ordinato (risp. s -ordinato, risp. ordinato). //

2. Sia G un gruppoide con ordine dotato di 0. Chiameremo *quasi-infinito* di G un elemento di G , che denoteremo con ∞ ³⁾, tale che valgano le seguenti (3) e (4):

$$(3) \quad x \leq \infty \quad \forall x \in G,$$

$$(4) \quad \infty x = x \infty = \infty \quad \forall x \in G - \{0\};$$

(si noti che, se un tale ∞ esiste, si ha $\infty 0 = 0 \infty = 0$ [poichè 0 è lo zero di G], ed inoltre $\infty \neq 0$ se $G \neq \{0\}$, quindi $\infty \infty = \infty$). Se esiste un quasi-infinito di G , nel qual caso diremo che G è *dotato di quasi-infinito*, esso è evidentemente unico.

Chiameremo (0, ∞)-*ampliamento*⁴⁾ di un gruppoide con ordine G

³⁾ L'uso di questo simbolo (col quale denotiamo pure un infinito: v. n. 1) non può causare confusione, poichè evidentemente un gruppoide con ordine dotato di 0 e $\neq \{0\}$ non può avere un infinito (cfr. [7], p. 133).

⁴⁾ Si legga: (zero, quasi-infinito)-ampliamento.

un gruppoide con ordine H soddisfacente le seguenti quattro condizioni⁵⁾: 1) H è dotato di 0 , 2) H è dotato di quasi-infinito ∞ , 3) $G = H - \{0, \infty\}$, 4) G è un sottogruppoide con ordine di H .

Facilmente si verifica che vale la seguente IV.

IV. *Un gruppoide con ordine H è uno $(0, \infty)$ -ampliamento di un gruppoide con ordine G se, e solo se,*

$$H = (G(\infty))(0),$$

cioè se, e solo se, H è uno 0 -ampliamento di un ∞ -ampliamento di G . //

V. *Se G è un gruppoide con ordine, esistono $(0, \infty)$ -ampliamenti di G . Inoltre due qualsiasi $(0, \infty)$ -ampliamenti di G sono G -isomorfi.*

Prova della V: L'esistenza risulta dalle I e IV. Inoltre, lasciando fermo ogni $x \in G$ e mandando zero e quasi-infinito risp. in zero e quasi-infinito, si ottiene appunto un G -isomorfismo. //

Se G è un gruppoide con ordine, col simbolo

$$G(0, \infty)$$

denoteremo un qualsiasi $(0, \infty)$ -ampliamento di G . In virtù della V, $G(0, \infty)$ denota dunque un gruppoide con ordine univocamente determinato da G a meno di G -isomorfismi.

VI. *Un gruppoide con ordine G è un gruppoide d -ordinato (risp. s -ordinato, risp. ordinato) se, e solo se, $G(0, \infty)$ è un gruppoide d -ordinato (risp. s -ordinato, risp. ordinato).*

Prova della VI: Segue dalle II, III e IV. //

3. Studiamo ora le relazioni fra le due operazioni parziali \bar{d} di residuazione di G e quelle di $G(\infty)$, $G(0)$, $G(0, \infty)$ (v. [2], nn. 6 e 7).

VII. *Se G è un gruppoide con ordine, valgono le seguenti (5) e (5')*:

⁵⁾ $\{0, \infty\}$ denota il sottoinsieme di H formato dai due elementi $0, \infty$.

- (5) $[a : b] \text{ in } G = [a : b] \text{ in } G(\infty)$ ⁶⁾,
 (5') $[a :: b] \text{ in } G = [a :: b] \text{ in } G(\infty)$ ⁶⁾.

Prova della VII: Basta osservare che ∞ non appartiene al 2° membro della (5) nè al 2° membro della (5') (infatti, se ∞ appartenesse ad uno di questi, ne seguirebbe $\infty \in G$, il che è assurdo). //

VIII. Se G è un gruppoide con ordine, valgono le seguenti (6), (6'), (7) e (7')⁷⁾:

- (6) $[a : b] = \emptyset \text{ in } G(\infty) \text{ sse } [a : b] = \emptyset \text{ in } G$ ⁶⁾,
 (6') $[a :: b] = \emptyset \text{ in } G(\infty) \text{ sse } [a :: b] = \emptyset \text{ in } G$ ⁶⁾,
 (7) $a : b = c \text{ in } G(\infty) \text{ sse } a : b = c \text{ in } G$ ⁸⁾,
 (7') $a :: b = c \text{ in } G(\infty) \text{ sse } a :: b = c \text{ in } G$ ⁸⁾.

Prova della VIII: È un'evidente conseguenza della VII. //

IX. Se G è un gruppoide con ordine, in $G(\infty)$ valgono le seguenti (8) e (9):

- (8) $\infty : k = \infty :: k = \infty$ $\forall k \in G(\infty)$,
 (9) $[a : \infty] = [a :: \infty] = \emptyset$ $\forall a \in G$.

Quindi $G(\infty)$ non è residuo a destra nè a sinistra.

Prova della IX: Le (8) valgono in ogni gruppoide con ordine dotato di ∞ . Le (9) valgono poichè non è $\infty \leq a$. L'ultima affermazione segue dalle (9) (poichè $G \neq \emptyset$). //

X. Un gruppoide con ordine G è semiresiduo a destra (resp. semiresiduo a sinistra, resp. semiresiduo) se, e solo se, $G(\infty)$ è semiresiduo a destra (resp. semiresiduo a sinistra, resp. semiresiduo).

⁶⁾ $\forall a, b \in G$.

⁷⁾ sse = se e solo se.

⁸⁾ $\forall a, b, c \in G$.

Prova della X: Osservato che (v. VII) valgono le seguenti (10) e (10'):

$$(10) \quad \exists a : b \text{ in } G(\infty) \text{ implica } a : b \in G \quad ^6),$$

$$(10') \quad \exists a :: b \text{ in } G(\infty) \text{ implica } a :: b \in G \quad ^6),$$

la X segue direttamente dalle VIII e IX. //

4. XI. Se G è un gruppoide con ordine, valgono le seguenti (11) e (11'):

$$(11) \quad [a : b] \text{ in } G(0) = ([a : b] \text{ in } G) \cup \{0\} \quad ^6),$$

$$(11') \quad [a :: b] \text{ in } G(0) = ([a :: b] \text{ in } G) \cup \{0\} \quad ^6).$$

Prova della XI: Basta osservare che, in un gruppoide con ordine H dotato di 0 , $0 \in [h : k]$ e $0 \in [h :: k] \forall h, k \in H$. //

XII. Se G è un gruppoide con ordine, valgono le seguenti (12), (12'), (13) e (13'):

$$(12) \quad a : b = 0 \text{ in } G(0) \text{ sse } [a : b] = \emptyset \text{ in } G \quad ^6),$$

$$(12') \quad a :: b = 0 \text{ in } G(0) \text{ sse } [a :: b] = \emptyset \text{ in } G \quad ^6),$$

$$(13) \quad a : b = c \text{ in } G(0) \text{ sse } a : b = c \text{ in } G \quad ^8),$$

$$(13') \quad a :: b = c \text{ in } G(0) \text{ sse } a :: b = c \text{ in } G \quad ^8),$$

Prova della XII: Osservato che in $G(0)$ si ha $a : b = 0$ (risp. $a :: b = 0$) sse $[a : b] = \{0\}$ (risp. $[a :: b] = \{0\}$), e ricordato che 0 non appartiene a G , la XII segue facilmente dalla XI. //

Dicendo che un gruppoide con ordine G è *dotato di massimo*, intendiamo dire che esiste $\max G$ (=il massimo di G : v. [2], nota ²).

XIII. Se G è un gruppoide con ordine, in $G(0)$ valgono le seguenti (14) e (15):

$$(14) \quad 0 : b = 0 :: b = 0 \quad \forall b \in G,$$

$$(15) \quad [h : 0] = [h :: 0] = G(0) \quad \forall h \in G(0).$$

Quindi, se G è dotato di massimo, in $G(0)$ si ha

$$(16) \quad h : 0 = h :: 0 = \max G \quad \forall h \in G(0).$$

Se, invece, G non è dotato di massimo, $G(0)$ non è semiresiduato a destra, nè a sinistra.

Prova della XIII: Le (14) si ottengono ricordando che $G = G(0) - \{0\}$ e che G è un sottogruppoide con ordine di $G(0)$. Le (15) sono evidenti. Le due ultime affermazioni della XIII seguono dalle (15), osservando che

$$(17) \quad \exists \max G(0) \text{ sse } \exists \max G$$

e che, nel caso di esistenza, si ha

$$(18) \quad \max G(0) = \max G. \quad //$$

TEOREMA 1. *Sia G un gruppoide con ordine dotato di massimo. G è semiresiduato a destra (risp. semiresiduato a sinistra, risp. semiresiduato) se, e solo se, $G(0)$ è residuato a destra (risp. residuato a sinistra, risp. residuato).*

Prova del Teor. 1: È una diretta conseguenza delle XII e XIII. //

5. XIV. *Se G è un gruppoide con ordine, valgono le seguenti (19), (19'), (20) e (20'):*

$$(19) \quad a : b = 0 \text{ in } G(0, \infty) \text{ sse } [a : b] = \emptyset \text{ in } G \quad ^6),$$

$$(19') \quad a :: b = 0 \text{ in } G(0, \infty) \text{ sse } [a :: b] = \emptyset \text{ in } G \quad ^6),$$

$$(20) \quad a : b = c \text{ in } G(0, \infty) \text{ sse } a : b = c \text{ in } G \quad ^8),$$

$$(20') \quad a :: b = c \text{ in } G(0, \infty) \text{ sse } a :: b = c \text{ in } G \quad ^8).$$

Prova della XIV: È una evidente conseguenza delle IV, VIII e XII. //

XV. Se a, b sono due qualsiasi elementi di un gruppoide con ordine G , in $G(0, \infty)$ valgono le seguenti (21), (22) e (23):

$$(21) \quad 0 : b = 0 :: b = 0 : \infty = 0 :: \infty = a : \infty = a :: \infty = 0,$$

$$(22) \quad a : 0 = a :: 0 = \infty : 0 = \infty :: 0 = \infty : b = \infty :: b = \infty,$$

$$(23) \quad 0 : 0 = 0 :: 0 = \infty : \infty = \infty :: \infty = \infty.$$

Prova della XV: Le (21), (22) e (23) si possono verificare direttamente, ricordando i primi due capoversi del n. 2. //

TEOREMA 2. *Sia G un qualsiasi gruppoide con ordine. G è semiresiduato a destra (risp. semiresiduato a sinistra, risp. semiresiduato) se, e solo se, $G(0, \infty)$ è residuato a destra (risp. residuato a sinistra, risp. residuato).*

Prova del teorema 2: Si ottiene subito dalle IV, X e dal Teor. 1, ricordando che $G(\infty)$ è dotato di massimo ($= \infty$). //

6. I gruppidi ordinati residuati sono già stati molto studiati (v. ad es. [8] ed i lavori ivi citati). Perciò l'interesse dei due Teoremi 1 e 2 (nn. 4 e 5) consiste soprattutto nella evidente possibilità di ottenere, mediante essi, dai noti risultati di tali studi, nuovi (analoghi) risultati relativi alla più vasta classe dei gruppidi ordinati⁹⁾ semiresiduati (v. [2], n. 7).

Ad esempio, uno di questi nuovi risultati sui gruppidi ordinati semiresiduati è la 2^a parte della (42) di [2], ottenuta ivi con una dimostrazione diretta. Ebbene, questo risultato si potrebbe anche riottenere facilmente, mediante il Teorema 1 (n. 4), dal risultato (e) (2^a parte) a p. 256 di [8], relativo appunto ai gruppidi ordinati residuati.

Illustriamo ora i due Teoremi 1 e 2, e le altre proposizioni sopra dimostrate, con alcuni esempi.

Importante e ben noto è il seguente Esempio 1 (cfr. [8], p. 219, Beisp. 9 e, per il caso associativo, [6], nn. 2 e 3, [10], p. 47, [1], p. 320, Exa. 2).

⁹⁾ Si ricordino le II e VI.

ESEMPIO 1. Il gruppoide con ordine G sia l'insieme dei sottoinsiemi (\emptyset compreso) di un gruppoide Γ , la moltiplicazione di G essendo quella consueta fra « complessi » di Γ (v. ad es. [10], p. 46, penult. capov.) e l'ordine \leq di G essendo l'inclusione insiemistica \subseteq . G è un reticolo completo¹⁰), ed in G la moltiplicazione è completamente distributiva rispetto all'unione (= riunione insiemistica); quindi (v. [2], (42)) G è un gruppoide ordinato semiresiduato, anzi (poichè $\emptyset \in G$: cfr. [6], p. 5) G è residuato. Se Γ è associativo (risp. commutativo), tale è pure G .

ESEMPIO 2. Il gruppoide con ordine G sia l'insieme dei sottoinsiemi *non vuoti* di un gruppoide Γ , con la stessa moltiplicazione e con lo stesso ordine dell'Esempio 1. G (che ora è un semireticolo completo) è un gruppoide ordinato semiresiduato (cfr. Es. 1); però, in generale, G non è residuato. Infatti, se, in particolare, Γ è un gruppo contenente almeno due elementi, allora $[\{\gamma\} : \Gamma]$ e $[\{\gamma\} :: \Gamma]$ sono entrambi vuoti $\forall \gamma \in \Gamma$ (poichè $X\Gamma = \Gamma X = \Gamma \not\subseteq \{\gamma\} \forall X \in G$), quindi appunto G non è residuato a destra nè a sinistra. È chiaro che G è dotato di massimo, e che il gruppoide con ordine dell'Esempio 1 (residuato, in accordo col Teor. 1) è uno 0-ampliamento di G ($0 = \emptyset$).

ESEMPIO 3. Il gruppoide con ordine G sia l'insieme dei numeri interi > 0 con la moltiplicazione e con l'ordine usuali. G è un gruppoide ordinato commutativo ed è una catena. Se $a, b \in G$, allora $a \geq b$ implica $\exists a : b$ ($a : b =$ quoziente di a per b ¹¹), mentre $a < b$ implica $[a : b] = \emptyset$. Quindi G è semiresiduato e non è residuato; inoltre G non è dotato di massimo. Perciò $G(0)$ non è semiresiduato (v. XIII), mentre $G(0, \infty)$ è residuato (v. Teor. 2). Il gruppoide ordinato dell'Esempio 2 di [2] non è altro che $(G(0))(\infty)$, quindi (v. X) non è semiresiduato (cfr. [2], ult. capov. del n. 7).

ESEMPIO 4. G sia il gruppoide ordinato commutativo (avente tre soli elementi) dell'Exemple a p. 152 di [7]. G è residuato (quindi è semiresiduato), non è dotato di 0, e non è dotato di massimo. Perciò

¹⁰) *Reticolo completo* = semireticolo completo H ([2], n. 1) in cui esiste $\inf(x_i) \forall$ famiglia non vuota $(x_i) (i \in I)$ di $x_i \in H$. Questa definizione è evidentemente equivalente a quelle date in [7], p. 34 e in [1], p. 6.

¹¹) Cioè $a : b$ è uguale al numero intero $q (> 0)$ del Teorema a p. 13 di [9].

$G(0)$ (che è dotato di 0) non è semiresiduato (v. XIII), mentre $G(0, \infty)$ (che pure è dotato di 0) è residuato (v. Teor. 2). Inoltre $G(\infty)$ è semiresiduato ma non è residuato (v. IX e X). Oltre i diagrammi dell'ordine e le tabelle di moltiplicazione, si possono determinare subito le tabelle di residuazione dei tre gruppidi ordinati¹²⁾ commutativi¹³⁾ $G(\infty)$, $G(0)$ e $G(0, \infty)$, (basta infatti ricordare la tabella di residuazione di G a p. 152 di [7] e le proposizioni VIII, IX, XII, XIII, XIV, XV). Poichè $G(\infty)$ e $G(0, \infty)$ sono evidentemente dei semireticolari (anzi $G(0, \infty)$ è un reticolo), allora (per la XXIV di [2], n. 8) in $G(\infty)$ ed in $G(0, \infty)$ la moltiplicazione è distributiva rispetto all'unione.

Se G è un qualsiasi gruppoide con ordine, $G \cup \{0\}$ è evidentemente un sottogruppoide con ordine di $G(0, \infty)$ ed uno 0 -ampliamento di G . Quindi (v. I) l'Esempio 3 (oppure 4) mostra pure che *un sottogruppoide con ordine di un gruppoide ordinato residuato non è necessariamente semiresiduato*.

7. Al fine di mettere in evidenza le due interessanti conseguenze XVII e XVIII delle proposizioni sopra dimostrate, premettiamo alcune definizioni.

Siano G ed H due gruppidi con ordine. Dicendo che G è *immerso* in H , intendiamo dire che G è un sottogruppoide con ordine di H . Dicendo che G è *r. immerso* [= residualmente immerso] in H , intendiamo dire che G è immerso in H , e che $a : b = c$ (risp. $a :: b = c$) in G implica $a : b = c$ (risp. $a :: b = c$) in H ⁸⁾. Dicendo che G è *o. immerso* [= ordinatamente immerso] in H , intendiamo dire che G è immerso in H , e che H è un gruppoide d -ordinato (risp. s -ordinato, risp. ordinato) se G è un gruppoide d -ordinato (risp. s -ordinato, risp. ordinato). Infine, dicendo che G è *r.o. immerso* in H , intendiamo dire che G è *r. immerso* ed *o. immerso* in H . Si osservi che, se G è immerso in H , G non è necessariamente *r. immerso* in H (si vedano infatti ad es. gli ultimi due capov. di p. 160 e il 1° capov. di p. 161 in [7]), nè necessariamente *o. immerso* in H (si pensi infatti per es. ad un H opportunamente ottenuto da un gruppoide ordinato commutativo G aggiungendovi un solo elemento).

¹²⁾ Si ricordino le II, III e VI.

¹³⁾ Si ricordino le (1), (2) e IV.

XVI. *Ogni gruppoide con ordine G è r.o. immerso in $G(\infty)$, in $G(0)$, e in $G(0, \infty)$.*

Prova della XVI: Segue immediatamente dalle II, III, VI, VIII, XII e XIV. //

XVII. *Ogni gruppoide con ordine semiresiduato a destra¹⁴⁾ (risp. semiresiduato a sinistra¹⁵⁾, risp. semiresiduato¹⁶⁾) G è r.o. immerso in un gruppoide con ordine H residuato a destra (risp. residuato a sinistra, risp. residuato) e dotato di 0 .*

Prova della XVII: Infatti, ad es. $H=G(0, \infty)$ (v. XVI e Teorema 2). //

XVIII. *Ogni gruppoide con ordine semiresiduato a destra¹⁴⁾ (risp. semiresiduato a sinistra¹⁵⁾, risp. semiresiduato¹⁶⁾) G è r.o. immerso in un gruppoide con ordine H semiresiduato a destra (risp. semiresiduato a sinistra, risp. semiresiduato) e non residuato a destra nè a sinistra.*

Prova della XVIII: Infatti, ad es. $H=G(\infty)$ (v. IX, X e XVI). //

Si osservi che, in particolare, le XVII e XVIII mettono in evidenza una notevole simmetria di comportamento fra la classe dei gruppoidi ordinati residuati e la classe dei gruppoidi ordinati semiresiduati e non residuati, nel senso che ogni elemento di ciascuna di queste due classi (disgiunte) è r. immerso in un elemento dell'altra.

Si osservi pure che la XVII contiene, in particolare, il seguente risultato XIX.

XIX. *Ogni gruppoide ordinato residuato è r. immerso in un gruppoide ordinato residuato dotato di 0 .* //

8. In virtù della XIX, fra i gruppoidi ordinati residuati acquistano particolare importanza quelli che sono dotati di 0 . La seguente XX ne dà una semplice caratterizzazione.

¹⁴⁾ In particolare, residuato a destra.

¹⁵⁾ In particolare, residuato a sinistra.

¹⁶⁾ In particolare, residuato.

XX. *Un gruppoide ordinato residuato G è dotato di 0 se, e solo se, esso è dotato di minimo¹⁷⁾.*

Prova della XX: Il « solo se » è banale. Proviamo il « se ». Posto $\min G = m$, poichè $[m : b]$ e $[m :: b]$ non sono vuoti $\forall b \in G$, esistono $x, y \in G$ tali che $xb \leq m$, $by \leq m$, quindi tali che

$$(24) \quad xb = m, \quad by = m.$$

Poichè $m \leq x$, $m \leq y$ e poichè G è un gruppoide ordinato, si ha

$$(25) \quad mb \leq xb, \quad bm \leq by.$$

Dalle (24) e (25) segue

$$mb = bm = m \quad \forall b \in G,$$

cioè appunto $m = 0$. //

Si osservi che, come chiaramente risulta dalla sua prova, la XX rimane vera anche leggendovi quasiresiduato (v. [2], nota ²⁷⁾) invece di residuato. La XX diventa invece falsa leggendovi semiresiduato invece di residuato (ciò è provato dall'Esempio 3). La XX diventa pure falsa leggendovi con ordine invece di ordinato (infatti, ad es. $G = \{a, b\}$ con $a < b$ e con $aa = bb = a$, $ab = ba = b$ è un gruppoide con ordine residuato dotato di minimo ma non di 0).

XXI. *Se un gruppoide con ordine G è semiresiduato a destra (risp. semiresiduato a sinistra, risp. semiresiduato) ed è dotato di 0, allora G è residuato a destra (risp. residuato a sinistra, risp. residuato) ed è dotato di massimo.*

Prova della XXI: Le prime affermazioni seguono subito dall'osservazione fatta nella prova della XI. Inoltre, poichè $[0 : 0] = [0 :: 0] = G$, deve appunto esistere $\max G$. //

Dunque, in particolare (v. XXI), affinchè un gruppoide ordinato residuato G sia dotato di 0, è necessario che G sia dotato di massimo.

¹⁷⁾ Si veda il 5° capoverso del n. 4, leggendovi minimo e min invece risp. di massimo e max.

Questa condizione necessaria (non soddisfatta dal G dell'Esempio 4) non è però sufficiente, come mostra l'esempio seguente.

ESEMPIO 5. Il gruppoide con ordine G sia l'insieme dei numeri interi > 0 con l'ordine e con la moltiplicazione risp. così definiti:

		1	2	3	4	...
○ 1	1	1	2	3	4	...
○ 2	2	2	3	4	5	...
○ 3	3	3	4	5	6	...
○ 4	4	4	5	6	7	...
.
.
.

G è un gruppoide ordinato commutativo. G è residuato, è dotato di massimo, ma non è dotato di 0.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BIRKHOFF, G.: *Lattice Theory*, Third Edition, Amer. Math. Soc. (1967).
- [2] BOCCIONI, D.: *Distributività rispetto all'unione e residuazione nei gruppoide con ordine*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 46.
- [3] BOURBAKI, N.: *Théorie des ensembles, Fascicule de résultats*, Hermann (1951).
- [4] BOURBAKI, N.: *Algèbre, Chap. I*, Hermann (1951).
- [5] BOURBAKI, N.: *Algèbre, Chap. VI-VII*, Hermann (1952).
- [6] DUBREIL, P.: *Introduction à la théorie des demi-groupes ordonnés*, Convegno italo-francese di algebra astratta (Padova, 1956), pp. 1-33, Cremonese (1957).
- [7] DUBREIL-JACOTIN, M. L.; LESIEUR, L.; CROISOT, R.: *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Gauthier-Villars (1953).
- [8] FUCHS, L.: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*, Vandenhoeck & Ruprecht (1966).
- [9] JACOBSON, N.: *Lectures in abstract algebra, Vol. I*, Van Nostrand (1951).
- [10] ZAPPA, G.: *Fondamenti di teoria dei gruppi, Vol. I*, Cremonese (1965).

Manoscritto pervenuto in Redazione il 24 settembre 1971.