GIULIANO BRATTI

Caratterizzazione dei polinomi di convoluzione in una variabile a decrescenza rapida, a coefficienti costanti, che hanno soluzioni quasi periodiche per ogni termine noto quasi periodico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 219-225

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__219_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

CARATTERIZZAZIONE DEI POLINOMI DI CONVOLUZIONE IN UNA VARIABILE A DECRESCENZA RAPIDA, A COEFFICIENTI COSTANTI, CHE HANNO SOLUZIONI QUASI PERIODICHE PER OGNI TERMINE NOTO QUASI PERIODICO

GIULIANO BRATTI *)

§ **1.** Si utilizzeranno le notazioni abituali della Teoria delle Distribuzioni, [4]. Sia $P(x)=\Sigma_{|\alpha|\leq m} a^\alpha x^\alpha$ un polinomio in n variabili a coefficienti complessi; $P_i(x)$ sia il polinomio così ottenuto da $P(x)$: $P_i(x)= =\Sigma_{|\alpha|\leq m} a^\alpha i^{|\alpha|} x^\alpha$. Se A è una distribuzione a decrescenza rapida, [4], pag. 244, $P(A)=\Sigma_{|\alpha|\leq m} a^\alpha (D^\alpha A)$ si dirà il polinomio di convoluzione, in una variabile a decrescenza rapida, associato a $P(x)$.

Oggetto di questo lavoro è di caratterizzare i polinomi $P(A)$ al fine che: per ogni distribuzione quasi periodica T, [4], pag. 206, ($T \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$), l'equazione di convoluzione $P(A) * S=T$ abbia almeno una soluzione $S \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$.

Nel § 2 si otterrà il seguente teorema:

A): *a) l'equazione* $P(A) * S=T$ *ha una soluzione* $S \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$, *per ogni* $T \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$;

b) $P_i(x)$ *non è mai nullo in* $\boldsymbol{R}_n$; $1/\mathcal{F}(A)(x) \in \mathcal{O}_M$ [1]); *a) e b) sono proposizioni equivalenti.*

Il teorema A) sarà ottenuto come combinazione dei seguenti teoremi B) e C):

B): a_1) *l'equazione* $P(\delta) * S=T$ *ha una soluzione* $S \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$, *per ogni* $T \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$;

b_1) *l'equazione* $P(\delta) * S=\delta$ *ha una soluzione* $S \in \mathcal{D}'_{L^1}$;

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

1) $\mathcal{F}(A)(x)$ indica la trasformata di Fourier di A; $\mathcal{O}_M$ lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ che sono operatori di moltiplicazione, [4], pag. 243.

c_1) *L'equazione* $P(\delta) * S = \varphi$ *ha una soluzione* $S \in \mathcal{S}$, *per ogni* $\varphi \in \mathcal{S}$;

d_1) $P_i(x)$ *non ha zeri reali*;

a_1), b_1), c_1) *e* d_1) *sono proposizioni equivalenti.*

C): a_2) *se* $A \in \mathcal{O}'_C$, (*A distribuzione a decrescenza rapida*), *l'equazione* $A * S = T$ *ha una soluzione* $S \in \mathcal{B}'_{\text{q.p}}$, *per ogni* $T \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$;

b_2) $F(A)(x)$ *non ha zeri in* $\boldsymbol{R}_n$, $1/\mathfrak{F}(A)(x) \in \mathcal{O}_M$;

a_2) *e* b_2) *sono proposizioni equivalenti.*

Per la dimostrazione dei teoremi B) e C) si farà uso essenziale di:

1) *dell'eguaglianza di Parseval estesa alle funzioni quasi periodiche,* [3], *pag.* 36 (se $f(x)$ è quasi periodica e le $A_n \in \boldsymbol{C}$ sono i suoi coefficienti di Fourier si ha: $\Sigma_n \mid A_n \mid^2 = M\{\mid f(x) \mid^2\}$) [2]);

2) *del teorema* XXVI *di* [4], *pag.* 203 (se $S \in \mathfrak{D}'_{L^p}$ e $T \in \mathfrak{D}'_{L^q}$, $1/p + 1/q - 1 \geq 0$ si può dare un senso al prodotto di convoluzione $S * T$; allora $S * T \in \mathfrak{D}'_{L^r}$, $1/r = 1/p + 1/q - 1$; l'applicazione $(S, T) \rightarrow \rightarrow S * T$ di $\mathfrak{D}'_{L^p} \times \mathfrak{D}'_{L^q}$ in $\mathfrak{D}'_{L^r}$ è continua);

3) *del teorema* XV *di* [4], *pag.* 268 (La trasformata di Fourier $\mathfrak{F}$ e la reciproca $\overline{\mathfrak{F}}$ stabiliscono due isomorfismi reciproci fra $\mathcal{O}_M$ e $\mathcal{O}'_C$ scambiando il prodotto di moltiplicazione ed il prodotto di convoluzone);

4) *del teorema* 3.6 *di* [6], *pag.* 233 (*dire che il polinomio* $P(x)$ *non è mai nullo su* $\boldsymbol{R}_n$ *è equivalente a dire che* $P(D)$ *ha un'unica soluzione fondamentale temperata*).

§ 2. Del teorema B) si dà la seguente dimostrazione « circolare » in quattro parti: $d_1) \Rightarrow c_1) \Rightarrow b_1) \Rightarrow a_1) \Rightarrow d_1)$.

$d_1) \Rightarrow c_1)$: per le ipotesi di d_1), tenuto presente 4) di § 1, $1/P_i(x) \in \mathcal{O}_M$ sicchè per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi/P_i \in \mathcal{S}$. Allora $\overline{\mathfrak{F}}[\mathfrak{F}(\varphi)/P_i]$ è la soluzione in $\mathcal{S}$ dell'equazione $P(\delta) * S = \varphi$.

---

[2]) Se $g(x)$ è quasi periodica $M\{g(x)\} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx =$ valor medio di $g(x)$.

$c_1) \Rightarrow b_1)$: poichè esiste $\varphi \in \mathcal{S}$ con $\mathcal{F}(\varphi)$ mai nulla, applicando F all'equazione $P(D)S = \varphi$ si vede che $P_i(x)$ non ha zeri reali. Si ha $1/P_i(x) \in \mathcal{O}_M$ e $\overline{\mathcal{F}}(1/P_i)$ $\mathcal{O}'_C$; che $\overline{\mathcal{F}}(1/P_i)$ sia soluzione fondamentale dell'equazione $P(D)S = \delta$ è subito visto applicando $\overline{\mathcal{F}}$ all'equazione come pure si vede subito, regolarizzando $\overline{\mathcal{F}}(1/P_i)$ con $\alpha(x) \in \mathcal{D}$, che $\overline{F}(1/P_i) \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathcal{O}'_C \subseteq \mathcal{D}'^{p}_{L})$.

$b_1) \Rightarrow a_1)$: se l'equazione $P(D)S = \delta$ ha una soluzione $S \in \mathcal{D}'_{L^1}$ e se $T \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$, $S * T$ è la soluzione in $\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ di $P(D)S = T$, (per 2 di § 1); si ha, inoltre, $\{\tau_h(S * T)\}_{h \in \boldsymbol{R}_n} \equiv \{S * (\tau_h T)\}_{h \in \boldsymbol{R}_n}$ sicchè $S * T$ che è in $\mathcal{B}'$ è anche in $\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$.

$a_1) \Rightarrow d_1)$: $P_i(x)$ abbia uno zero in $\Lambda \in \boldsymbol{R}_n$. Si consideri l'equazione $P(D)S = e^{i\langle \Lambda \cdot x \rangle}$. Se $S \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ è una soluzione, per [4], pag. 207, (VI, 9; 2), $a_\Lambda(S) \int e^{-i\langle \Lambda \cdot x \rangle} P(\delta) = 1 = a_\Lambda(S) P_i(\Lambda)$ [3]). Ciò implica $P_i(\Lambda) \neq 0$

Dimostrazione del Teorema C). $b_2) \Rightarrow a_2)$: se $1/F(A)(x) \in \mathcal{O}_M$ e $T \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ $F(T)/F(A) \in \mathcal{S}'$. Allora $\overline{F}[F(T)/F(A)]$ è soluzione in $\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ di di $A * S = T$ poichè

$$T = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(T)] = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(T)/\mathcal{F}(A)] = A * \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(T)/\mathcal{F}(A)]$$

(per 3 di § 1), e se $\alpha(x) \in \mathcal{D}$

$$\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(T)/\mathcal{F}(A)] * \alpha = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(T)/\mathcal{F}(\alpha)/\mathcal{F}(A)] = T * \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(\alpha)/\mathcal{F}(A)]$$

quasi periodica poichè $\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(\alpha)/\mathcal{F}(A)] \in \mathcal{S}$.

$a_2) \Rightarrow b_2)$: che $\mathcal{F}(A)(x)$ non abbia zeri in $\boldsymbol{R}_n$ si vede come nella dimostrazione di $a_1) \Rightarrow d_1)$ *del* teorema B) sempre ricordando che $A \in \mathcal{D}'_{L^1}$ se $A \in \mathcal{O}'_C$ e che $\int e^{-i\langle \Lambda \cdot x \rangle} A = \mathcal{F}(A)(\Lambda)$. Dimostriamo che se $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ $\varphi(x)[D^p 1/\mathcal{F}(A)(x)]$ è limitata in $\boldsymbol{R}_n$, qualunque sia p multindice, non appena è vera $a_2)$.

---

[3]) $a_\Lambda(S) = \Lambda$-coefficiente di Fourier di $S = M\{e^{-i\langle \Lambda \cdot x \rangle} S\}$.

Se $T \in \mathcal{D}'_{L^1}$, $e^{-i\langle \Lambda \cdot x \rangle} T \in \mathcal{D}'_{L^1}$. Si ha: $\int e^{-i\langle \Lambda \cdot x \rangle} T = \mathcal{F}[e^{-i\langle \Lambda \cdot x \rangle} T](\xi)$ calcolata per $\xi = 0$. Ma $\mathcal{F}[e^{-i\langle \Lambda \cdot x \rangle} T] = \mathcal{F}[T](\xi + \Lambda)$ da cui la conclusione della [3]) come pure quella della prima parte di $a_2) \Rightarrow b_2)$.

Si supponga che esista $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che su una successione $\Lambda_k \in \boldsymbol{R}_n$, $\lim_{k\to+\infty} |\varphi(\Lambda_k)/\mathfrak{F}(A)(\Lambda_k)| = +\infty$ con, senza che vi siano restrizioni, $|\Lambda_k| \geq k$. Poichè F è un automorfismo di $\mathcal{S}$, esiste $\psi \in \mathcal{S}$ con $F(\psi) = |x|^2 \varphi(x)$; sia $f(x)$ la funzione quasi periodica così determinata:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k^2} e^{-i\langle \Lambda_k \cdot x\rangle},$$

e sia $S \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ la soluzione di $A * S = f$. Allora la funzione quasi periodica $S * \psi$ è soluzione dell'equazione $A * S = f * \psi$ sicchè, per (VI, 9; 9) di [4], pag. 208, $a_{\Lambda_n}(S * \psi) = a_{\Lambda_n}(f * \psi)/\mathfrak{F}(A)(\Lambda_n)$. La valutazione di $a_{\Lambda_n}(f * \psi)$ dà: poichè la serie

$$\sum_1^{+\infty}{}_n \frac{1}{n^2} e^{i\langle \Lambda_n \cdot x - t\rangle} \psi(t)$$

converge uniformemente per $t \in \boldsymbol{R}_n$ verso la $f(x-t)\psi(t)$, $(\psi(t) \in \mathcal{S})$,

$$\int f(x-t)\psi(t)dt = \sum_1^{+\infty}{}_n \frac{1}{n^2} e^{i\langle \Lambda_n \cdot x\rangle} \int e^{-i\langle \Lambda_n \cdot x\rangle} \psi(t)dt = \sum_1^{+\infty}{}_n \frac{1}{n^2} |\Lambda_n|^2 \varphi(\Lambda_n) e^{i\langle \Lambda_n \cdot x\rangle}$$

da cui $a_{\Lambda_n}(f * \psi) = |\Lambda_n|^2 \varphi(\Lambda_n)/n^2$. Poichè è $\lim_{n\to+\infty} |a_{\Lambda_n}(S * \psi)|^2 = +\infty$ dovrebbe essere $\sum_1^\infty{}_n |a_{\Lambda_n}(S * \psi)|^2 = +\infty$ contro 1) del § 1. Analogamente risulta assurdo supporre che esista una successione $\Lambda_k \in \boldsymbol{R}_n$ con $\lim_{k\to+\infty} |\Lambda_k| = +\infty$ e che $\lim_{k\to+\infty} |\varphi(\Lambda_k)/\mathfrak{F}(A)(\Lambda_k)| = q \neq 0$. Poichè deve essere $\lim_{n\to+\infty} |a_{\Lambda_n}(S * \psi)| = 0$ se ne deduce che su qualsiasi successione $\Lambda_k \in \boldsymbol{R}_n$, $\lim_{k\to+\infty} |\varphi(\Lambda_k)/\mathfrak{F}(A)(\Lambda_k)| = 0$, se $\lim_{k\to+\infty} |\Lambda_k| = +\infty$.

Ciò implica $\lim_{|x|\to+\infty} |\varphi(x)/\mathfrak{F}(A)(x)| = 0$. Per vedere che $\varphi(x)[D^p 1/\mathfrak{F}(A)(x)]$ è limitata in $\boldsymbol{R}_n$, poichè al denominatore compare una potenza di $\mathfrak{F}(A)(x)$ e al numeratore una funzione di $\mathcal{S}$, è sufficiente verificare che se $A * S = T$ soddisfa a_2) del teorema C), anche l'equazione $(A * \ldots * A) * S = T$ soddisfa a) di C). Infatti, poichè $(A * \ldots * A)$ è in $\mathcal{O}'_C$, [4], pag. 270, $\mathfrak{F}(A * \ldots * A) = F(A)^h$, se n è il numero delle convoluzioni su A; allora, con la stessa tecnica precedente, $\lim_{|x|\to+\infty} |\varphi(x)/\mathfrak{F}(A)^n(x)| = 0$, $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, n intero positivo. Limitiamoci all'equazione $(A * A) * S = T$: è sufficiente risolvere l'equazione $A * U = S_0$ con $S_0 \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ e $A * S_0 = T$.

Il teorema C) è completamente dimostrato.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA A). Questa dimostrazione è immediata. Infatti: l'equazione $P(A) * S = T$ è equivalente al sistema $\{P(D)S = T;\ A * S = T\}$ nel senso che se l'equazione $P(A) * S = T$ ha soluzioni $S \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$ per ogni $T \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$ allora anche le equazioni $P(D)S = T$ $A * S = T$ hanno la stessa proprietà. Si ha: l'equazione $P(A) * S = T$, $T \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$, ha come soluzione $H \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$ se $A * S_0 = T$ e $P(D)H = S_0$. Viceversa: se $P(A) * S = T$ è $A * P(S) = T$ e $P(D)(A * S) = T$ con, evidentemente, $P(S) \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$, [4], pag. 206, e, poichè $A \in \mathcal{O}'_C \subseteq \mathfrak{D}'_{L^1}$, $A * S \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$, [4], pag. 206, se $S \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$.

OSSERVAZIONE 1. Sia $\mathfrak{B}_{\text{q.p.}} = \{f : \boldsymbol{R}_n \to C,\ f \in \mathcal{C}^\infty,\ f$ quasi periodico assieme ad ogni sua derivata$\}$. Nelle ipotesi del teorema A) è facile verificare che se S è la soluzione quasi periodica dell'equazione $P(A) * S = T$, $T \in \mathfrak{B}_{\text{q.p.}}$, allora anche $S \in \mathfrak{B}_{\text{q.p.}}$.

OSSERVAZIONE 2. Si può generalizzare il teorema C) notando che se si cercano soluzioni in $\mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$ dell'equazione $A * S = T$, A, al massimo, può stare in $\mathfrak{D}'_{L^1}$, 2, § 1. Si ottiene:

C'): a'_2) $A \in \mathfrak{D}'_{L^1}$; *l'equazione* $A * S = T$ *ha una soluzione* $S \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$, *per ogni* $T \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$;

b'_2) $\mathfrak{F}(A)(x) \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}_n$; *esiste* $g(x) \in L^2$, $g(x) \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}_n$, *continua con* $\mathfrak{F}(A)(x)g(x) \in \mathcal{O}_M$ *e* $1/\mathfrak{F}(A)(x)g(x) \in \mathcal{O}_M$; a'_2) *e* b'_2) *sono proposizioni equivalenti.*

Si osserva come il teorema C) rientri in C'): se $A \in \mathcal{O}'_C$ e $1/\mathfrak{F}(A)(x) \in \mathcal{O}_M$ è sufficiente scegliere $g(x) = (1 + |x|^2)^{-m}$, $m \in N$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA C'). $a'_2) \Rightarrow b'_2)$. Necessariamente $\mathfrak{F}(A)(x) \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}_n$. Come nella dimostrazione di C), se $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, $\varphi(x)/\mathfrak{F}(A)(x)$ è limitata in $\boldsymbol{R}_n$; ciò implica $\overline{\mathfrak{F}}(1/\mathfrak{F}(A)(x)) \in \mathfrak{D}'_{L^2}$ poichè se $\alpha(x) \in \mathfrak{D}$, $\overline{\mathfrak{F}}[1/\mathfrak{F}(A)(x)] * \alpha = \overline{\mathfrak{F}}[\mathfrak{F}(\alpha)(x)/\mathfrak{F}(A)(x)]$ e la funzione in parentesi è una funzione continua a decrescenza rapida, (perciò in L^2). Risulta, allora, $1/\mathfrak{F}(A)(x) = P(x)g(x)$ con $g(x) \in L^2$. Ricordando 4) di § 1 l'implicazione è dimostrata.

$b'_2) \Rightarrow a'_2)$. Poichè $\mathfrak{F}$ è isomorfismo su L^2 esiste $h(x) \in L^2$ con $\mathfrak{F}(g(x)) = h(x)$. $\mathfrak{D}'_{L^1}$ è chiuso sotto la convoluzione; $A * h \in \mathfrak{D}'_{L^1}$, $(h(x) \in$

$\in \mathfrak{D}'_{L^1}$). Posto $B = A * h$ l'equazione $B * S = T$ è sempre risolubile in $\mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$ quando $T \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$, (basta applicare il teorema C) visto che $\mathfrak{F}(B) = \mathfrak{F}(A) g \in \mathcal{O}_M$ come pure $1/\mathfrak{F}(B)$).

Allora, per risolvere l'equazione $A * S = T$ in $\mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$, $T \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$, è sufficiente risolvere l'equazione $B * U = T$ e porre $S = h * U$ [4]).

OSSERVAZIONE 3. Il teorema C) ed il C′) si possono enunciare così:

C): $A \in \mathcal{O}'_C$; *l'equazione* $A * S = T$ *ha sempre soluzioni* $S \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$, *per ogni* $T \in \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$, *se e solo se esiste* $B \in \mathcal{O}'_C$ *con* $A * B = \delta$;

C′): $A \in \mathfrak{D}'_{L^1}$; *analogamente a* C) *di sopra con* $B \in \mathfrak{D}'_{L^1}$.

C) è ovvio; per C′) si ha: $\overline{\mathfrak{F}}[\mathfrak{F}(A)g] * \overline{\mathfrak{F}}[1/\mathfrak{F}(A)g] = \delta$ da cui:

$$(A * h) * \overline{\mathfrak{F}}[1/\mathfrak{F}(A)g] = \delta = A * (h * \overline{\mathfrak{F}}[1/\mathfrak{F}(A)g]).$$

Che C′) sia un'effettiva generalizzazione di C) si vede, limitandosi al caso di una variabile, prendendo come $A \in \mathfrak{D}'_{L^1}$, l'antiimmagine $\overline{\mathfrak{F}}$ di una primitiva, $F(x)$, conveniente, di una primitiva della funzione

$$f(x) = \{1,\ x \leq 0;\ x+1,\ 0 \leq x \leq 1;\ -x+3;\ 1 \leq x \leq 2;\ 1,\ x \geq 2\};$$

se $A = \overline{\mathfrak{F}}(F(x))$, $A * \alpha$, $\alpha \in \mathfrak{D}$, è in L^1; che $A \notin \mathcal{O}'_C$ si ha dal fatto che $\mathfrak{F}(A) \notin \mathcal{O}_M$.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMERIO, L., PROUSE, G.: *Almost periodic functions and functional equations*, D. Van Nostrand Reinhold, 1971.

[2] BRATTI, G.: *Sulle distribuzioni vettoriali di una variabile debolmente quasi periodiche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1970.

[3] FAVARD, J.: *Leçons sur les fonctions presque-periodiques*, Gautier-Villars, 1933.

[4] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

---

[4]) È facile verificare che $(A * h) * U = A * (h * U)$.

[5] Hörmander, L.: *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1963.

[6] Treves, F.: *Linear partial differential equations with constant coefficient*, Gordon and Breach, 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 gennaio 1972 e in forma revisionata il 20 marzo 1972.