RENDICONTI del SEMINARIO MATEMATICO della UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO TROILO

Determinazione della classe delle precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale del solido pesante asimmetrico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__1_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

DETERMINAZIONE DELLA CLASSE DELLE PRECESSIONI GENERALIZZATE REGOLARI CON ASSE DI PRECESSIONE VERTICALE DEL SOLIDO PESANTE ASIMMETRICO

RENATO TROILO *)

In [4] è stato introdotto il concetto di precessione generalizzata In [5], [6] e [7] si sono studiate le precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale nel caso del corpo rigido pesante asimmetrico e si sono individuate alcune classi di tali movimenti. In [8] ho provato che tutti i possibili moti di precessione generalizzata regolare con asse di precessione verticale si riducono a precessioni ordinarie con asse di precessione verticale.

Si può osservare che tutti gli esempi finora noti di precessioni generalizzate del tipo in esame appartengono o alla classe R delle rotazioni uniformi del solido pesante oppure alla classe dei moti di Hess precessionali individuata in [2]: quella di tutti i possibili moti di Hess precessionali con asse di precessione verticale, classe che verrà indicata con H. Sia le rotazioni della classe R, sia i moti di H sono precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale: $H \cup R$ può, infatti, caratterizzarsi ([9]) come la classe di tutte le precessioni generalizzate regolari *di vettore* $\boldsymbol{K}$ (momento delle quantità di moto rispetto al punto fisso).

Può porsi, quindi, il problema di vedere se $H \cup R$ esaurisca la classe delle accennate precessioni generalizzate. In questa nota risolvo completamente il problema provando che la classe delle precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale dinamicamente possibili per il solido pesante asimmetrico risulta coincidente con la classe $H \cup R$

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, Via Belzoni, 3 - Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R.

e, pertanto, coincide con la classe delle precessioni generalizzate regolari di vettore $\boldsymbol{K}$.

Ciò individua completamente la classe delle precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale dinamicamente possibili per il solido pesante asimmetrico.

Nella risoluzione di tale problema si ottiene, tra l'altro, un risultato di cinematica che può essere utile nello studio delle precessioni generalizzate regolari qualunque sia il tipo di sollecitazione da cui esse derivino. Precisamente si prova che ogni precessione generalizzata regolare ellittica è una ordinaria precessione semiregolare e i rispettivi assi di precessione coincidono.

Infine si studia l'andamento del vettore delle precessioni generalizzate in questione e si osserva che, durante il moto, esso risulta parallelo al momento delle quantità di moto rispetto al punto fisso, mantenendosi addirittura costante il rapporto dei moduli dei due vettori.

1. Sia M un moto rigido fisso 0, ω la sua velocità angolare, $\varepsilon=[\varepsilon_{sr}]$ una matrice quadrata del terzo ordine a elementi non tutti nulli e indipendenti dal tempo.

Con riferimento a una terna solidale $\mathcal{T}\equiv(0, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$, si consideri il vettore

$$\varepsilon\omega=\sum_{rs}{}_{1}^{3}\varepsilon_{rs}\omega_s\boldsymbol{i}_r, \tag{1}$$

essendo ω_s ($s=1, 2, 3$) le componenti di ω rispetto alla terna $\mathcal{T}$.

Il moto M dicesi *precessione generalizzata di vettore* $\varepsilon\omega$ [1]) se tale vettore si mantiene costantemente parallelo al piano individuato da una retta fissa e una retta solidale passanti per il punto 0; tali rette diconsi, rispettivamente, asse di precessione e asse di figura della precessione generalizzata. Se $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{k}$ sono i versori di tali rette si ha quindi

$$\varepsilon\omega=\alpha\boldsymbol{c}+\beta\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

---

[1]) Cfr. [4].

Nel caso in cui gli scalari α e β risultino indipendenti dal tempo il moto M prende il nome di *precessione generalizzata regolare.*

2. Sia $\mathcal{C}$ un corpo rigido pesante asimmetrico fissato senza attrito per un suo punto 0. Nel seguito si considerano moti di precessione generalizzata regolare di $\mathcal{C}$ aventi asse di precessione verticale; quindi, d'ora in avanti, nella (2) $\boldsymbol{c}$ indicherà il versore della verticale discendente, mentre α e β sono due costanti; con $\alpha \neq 0$.

In [6] si è provato che se un tale moto è dinamicamente possibile per $\mathcal{C}$, l'estremo libero della velocità angolare applicata in 0, (0, ω), si mantiene su una ellisse solidale al corpo [2]), ossia ω è tale che

$$\omega = \omega^* + \boldsymbol{a} \cos \chi + \boldsymbol{b} \operatorname{sen} \chi, \tag{3}$$

essendo $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ due vettori solidali, ω^* il vettore congiungente 0 con il centro dell'ellisse e χ un parametro dipendente dal tempo.

Tutte le precessioni generalizzate del tipo in questione dinamicamente possibili per $\mathcal{C}$ (se non sono rotazioni uniformi) sono, come si vedrà, moti di Hess precessionali con asse di precessione verticale, ossia si riducono alle note precessioni generalizzate regolari di vettore $\boldsymbol{K}$ [3]).

3. La (3) implica

$$\varepsilon\omega = \varepsilon\omega^* + \varepsilon\boldsymbol{a} \cos \chi + \varepsilon\boldsymbol{b} \operatorname{sen} \chi, \tag{3$'$}$$

Da cui segue facilmente il seguente lemma

LEMMA I. *Se* $\varepsilon\boldsymbol{a} \times \varepsilon\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ *la precessione generalizzata regolare ellittica è una precessione e si ha*

$$\omega = \partial\boldsymbol{c} + \mu'\varepsilon\boldsymbol{a} \times \varepsilon\boldsymbol{b}. \tag{4}$$

Infatti, da (3)' segue

$$\varepsilon\omega \cdot \varepsilon\boldsymbol{a} \times \varepsilon\boldsymbol{b} = \varepsilon\omega^* \cdot \varepsilon\boldsymbol{a} \times \varepsilon\boldsymbol{b} = \delta = \text{cost}.$$

---

[2]) Un tale tipo di precessione generalizzata dicesi ellittica.

[3]) Con σ qui è nel seguito e indica la matrice d'inerzia di $\mathcal{C}$ rispetto al punto **0**.

Mediante quest'ultima relazione, da (1) si ottiene

$$\boldsymbol{c}\cdot\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}=\frac{1}{\alpha}[\delta-\beta\boldsymbol{k}\cdot\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}]=\text{cost.},$$

ossia, ovviamente, la (4).

Si ha inoltre il seguente ulteriore lemma

LEMMA II. *Se* $\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ *la precessione generalizzata regolare è una rotazione uniforme con asse verticale.*

Da (1) si ha, infatti, per derivazione

$$\varepsilon\dot{\omega}=\alpha\boldsymbol{c}\times\omega, \tag{5}$$

mentre da (3)′ segue, tenuto conto dell'ipotesi $\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,

$$\varepsilon\dot{\omega}=\gamma\boldsymbol{h}$$

essendo $\boldsymbol{h}$ un versore solidale. Si ha quindi, tenuto conto della (5),

$$\alpha\boldsymbol{c}\times\omega=\gamma\boldsymbol{h}, \tag{6}$$

da cui segue immediatamente che il moto è una rotazione con asse parallelo a $\boldsymbol{c}$ [4]).

Conseguenza di questo Lemma è che l'escludere il caso $\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ equivale ad escludere le rotazioni uniformi, caso che sarà considerato nel seguito, pertanto per ora si supporrà $\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$.

4. Dalla (5) si ha

$$\varepsilon\dot{\omega}\cdot\omega=0,$$

relazione che, ricordando la (3), diventa

$$\dot{\chi}(-\varepsilon\boldsymbol{a}\,\text{sen}\,\chi+\varepsilon\boldsymbol{b}\cos\chi)\cdot(\omega^{*}+\boldsymbol{a}\cos\chi+\boldsymbol{b}\,\text{sen}\,\chi)=0.$$

---

[4]) Tale rotazione è necessariamente uniforme.

Tale relazione dovendo essere identicamente soddisfatta rispetto a χ ed essendo $\dot{\chi}\neq 0$, implica le seguenti condizioni di compatibilità:

(7) $$\varepsilon\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\varepsilon\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0,$$

(7)′ $$\varepsilon\boldsymbol{a}\cdot\omega^*=\varepsilon\boldsymbol{b}\cdot\omega^*=0,$$

(7)″ $$\varepsilon\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\varepsilon\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

Ricordando la (4) si ha che, durante il moto, risulta

$$\omega\times\boldsymbol{c}\cdot\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}=0,$$

relazione che, ricavando $\boldsymbol{c}$ dalla (2) e ricordando la (3), dà luogo alla:

$$(\omega^*+\boldsymbol{a}\cos\chi+\boldsymbol{b}\operatorname{sen}\chi)\times(\varepsilon\omega^*-\beta\boldsymbol{k}+\varepsilon\boldsymbol{a}\cos\chi+\varepsilon\boldsymbol{b}\operatorname{sen}\chi)\cdot\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}=0.$$

Da quest'ultima, ricordando le condizioni (7), (7)′, (7)″, si ottengono le seguenti

(8) $$\varepsilon\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\cdot\varepsilon\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=0,$$

(9) $$\varepsilon\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\cdot\varepsilon\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0,$$

(10) $$(\varepsilon\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\varepsilon\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}=0.$$

Dalle (8), (9), ricordando le (7), risulta [6])

(11) $$\varepsilon\boldsymbol{a}\cdot\varepsilon\boldsymbol{b}\;\;\boldsymbol{a}\cdot\varepsilon\boldsymbol{a}=0,$$

(12) $$\varepsilon\boldsymbol{a}\cdot\varepsilon\boldsymbol{b}\;\;\boldsymbol{b}\cdot\varepsilon\boldsymbol{b}=0,$$

dalle quali segue [7])

(13) $$\varepsilon\boldsymbol{a}\cdot\varepsilon\boldsymbol{b}=0,$$

---

[5]) Se $\dot{\chi}=0$ si ricade nel caso delle rotazioni uniformi.

[6]) Si tenga presente la formula $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$.

[7]) Il caso $\varepsilon\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\varepsilon\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=0$ è da escludere in quanto seguirebbe il parallelismo di $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{b}$ e si ricadrebbe nel caso $\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}=0$.

relazione esprimente l'ortogonalità dei due vettori $\varepsilon\boldsymbol{a}$ e $\varepsilon\boldsymbol{b}$.

Infine, dalla (10) e dalla (13) si deduce

$$(\varepsilon\boldsymbol{a})^2=(\varepsilon\boldsymbol{b})^2. \tag{14}$$

5. Mediante le (3), (7), (7)' si ottiene

$$\omega\cdot\varepsilon\boldsymbol{a}=(\omega^*+\boldsymbol{a}\cos\chi+\boldsymbol{b}\operatorname{sen}\chi)\cdot\varepsilon\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\varepsilon\boldsymbol{a}\cos\chi,$$

$$\omega\cdot\varepsilon\boldsymbol{b}=(\omega^*+\boldsymbol{a}\cos\chi+\boldsymbol{b}\operatorname{sen}\chi)\cdot\varepsilon\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\varepsilon\boldsymbol{b}\operatorname{sen}\chi,$$

e quindi, ricordando (7)'', segue

$$(\omega\cdot\varepsilon\boldsymbol{a})^2+(\omega\cdot\varepsilon\boldsymbol{b})^2=\text{cost.} \tag{15}$$

Si è già provato (Lemma I) che il moto è una precessione avente asse di figura parallelo a $\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}$; ne consegue che il primo membro della (15), tenuto conto della (14), esprime (a meno di una costante moltiplicativa) la velocità di precessione ∂ [8]). Si ha quindi, dalla (15), che ∂ risulta costante. Si tratta pertanto di un moto di precessione semiregolare.

Come prima conclusione si ha quindi il seguente teorema:

I. *Per il corpo rigido pesante asimmetrico ogni moto di precessione generalizzata regolare con asse di precessione verticale dinamicamente possibile è un moto di ordinaria precessione semiregolare con asse di precessione verticale.*

---

[8]) Per rendersi conto di ciò si supponga, per un momento, che la terna solidale $\mathcal{T}$ abbia il terzo asse parallelo all'asse di figura (che è parallelo a $\varepsilon\boldsymbol{a}\times\varepsilon\boldsymbol{b}$); si ha allora, per la velocità angolare,

$$\omega=\partial\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{i}_3,$$

dalla quale segue: $c_1=\dfrac{\omega_1}{\partial}$, $\quad c_2=\dfrac{\omega_2}{\partial}$, e quindi

$$\partial=\pm\frac{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}{\operatorname{sen}\theta},$$

essendo θ l'angolo di nutazione. Ne segue che $\partial=$cost se e solo se $\omega_1^2+\omega_2^2=$cost., relazione che, ricordando la (14), è del tutto equivalente alla (15).

Quest'ultimo teorema è stato dedotto nell'ipotesi che sia $\varepsilon \boldsymbol{a} \times \varepsilon \boldsymbol{b} \neq 0$, limitazione che può essere però rimossa, dando così validità generale al teorema I, includendo tra le precessioni semiregolari con asse di precessione verticale anche quelle degeneri, ossia le rotazioni uniformi di $\mathcal{C}$.

È sufficiente, infatti, tener conto del Lemma II per concludere, che

I'. *La classe delle precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale dinamicamente possibili per il solido pesante asimmetrico è contenuta nella classe delle precessioni semiregolari (effettive e degeneri) con asse di precessione verticale.*

OSSERVAZIONE. È il caso di osservare che il teorema I' si è dedotto nella sola ipotesi che la precessione generalizzata fosse ellittica e per via puramente cinematica, senza far ricorso all'ipotesi che $\mathcal{C}$ sia pesante.

Si ha pertanto:

II. *Ogni moto di precessione generalizzata regolare ellittica è una precessione ordinaria semiregolare avente l'asse di precessione parallelo a quello della precessione generalizzata.*

Tale risultato può essere utilizzato quindi anche nello studio di precessioni generalizzate regolari dovute a sollecitazioni diverse dal peso.

6. I risultati stabiliti ai nn. precedenti consentono di pervenire facilmente alla completa determinazione della classe delle precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale.

In [9] si è infatti provato che *la classe delle precessioni semiregolari con asse di precessione verticale dinamicamente possibili per $\mathcal{C}$, coincide con la classe delle precessioni generalizzate regolari dinamicamente possibili di vettore $\boldsymbol{K} = \sigma\omega$* [9]).

---

[9]) È noto che tali moti hanno asse di precessione verticale e (nel caso che non si riducano a rotazioni) si ha

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{\frac{\alpha}{\cos\theta}}\,(\boldsymbol{c} - \cos\theta\,\boldsymbol{u}),$$

Tale risultato consente anzitutto di concludere, tenuto conto del teorema I′, che

III. *La classe delle precessioni generalizzate regolari dinamicamente possibili per $\mathcal{C}$ coincide con la classe delle precessioni semiregolari aventi asse di precessione verticale, e, pertanto, coincide con la classe delle precessioni generalizzate di vettore* $\boldsymbol{K}=\sigma\omega$.

In [9] si è inoltre provato che *la classe delle precessioni semiregolari con asse di precessione verticale è costituita dall'unione della classe* $\mathfrak{R}$ *delle rotazioni uniformi con la classe H dei possibili modi di Hess precessionali con asse di precessione verticale,* classe che è stata completamente individuata in [2].

Si ha quindi, in conclusione, il seguente teorema

IV. *La classe dei moti di precessione generalizzata regolare con asse di precessione verticale dinamicamente possibili per il corpo rigido pesante asimmetrico coincide con la nota classe di moti* $H \cup R$.

Risulta pertanto completamente risolto il problema della determinazione delle precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale dinamicamente possibili per il corpo rigido pesante asimmetrico.

7. In questo numero si considerano moti di precessione generalizzata regolare appartenenti alla classe H (caso in cui è $\varepsilon\boldsymbol{a} \times \varepsilon\boldsymbol{b} \neq 0$). I moti di H sono precessioni aventi asse di figura baricentrale; pertanto, ricordando la (6)′, si ha per i moti in questione, che $\varepsilon\boldsymbol{a} \times \varepsilon\boldsymbol{b}$ è parallelo a $0G$, dove G è il baricentro di $\mathcal{C}$. Quindi, fatta la posizione

$$\boldsymbol{u} = \text{vers}\, 0G,$$

la (6′) diviene

$$\omega = \partial \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{u}. \tag{16}$$

---

essendo θ l'angolo costante compreso tra $\boldsymbol{c}$ e il versore $\boldsymbol{u} = \text{vers}\, 0G$, e α una costante dipendente dalla struttura del corpo. Cfr. [2].

10) Cfr. [4].

Inoltre, per tali moti, in quanto moti di Hess, si ha

$$\sigma\omega \cdot \boldsymbol{u} = \text{cost.} \tag{17}$$

In altri termini il vettore $(0, \omega)$ si mantiene costantemente su di un piano solidale passante per 0; d'altra parte è noto che su tale piano l'estremo libero di $(0, \omega)$ descrive un'ellisse, di centro 0, il che implica che nella (3) sia $\omega^* = \mathbf{0}$.

Dall'annullarsi di ω^* e dalle (7), (13) e (14) segue

$$|\,\varepsilon\omega\,| = \text{cost.}$$

ciò che implica, ricordando la (2) e la costanza di α e β,

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}.$$

La (2) diviene pertanto

$$\varepsilon\omega = \alpha\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{u}. \tag{18}$$

È a questo punto facile provare che

$$\varepsilon\omega \cdot \boldsymbol{u} = 0. \tag{19}$$

Infatti poichè, come è agevole verificare (ricorrendo alla espressione (3)), risulta

$$\varepsilon\omega \cdot \omega = \text{cost.},$$

si ha, ricordando (16) e (18),

$$(\alpha\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{u}) \cdot (\partial\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{u}) = \partial(\alpha + \beta\cos\theta) + \mu(\alpha\cos\theta + \beta) = \text{cost.}, \tag{20}$$

in cui θ è l'angolo di nutazione. Segue, quindi, necessariamente

$$\alpha\cos\theta + \beta = \varepsilon\omega \cdot \boldsymbol{u} = 0,$$

in quanto, diversamente, dalla (20), stante la costanza di ∂, seguirebbe che μ è costante, ossia si tratterebbe di una precessione regolare (effettiva) con asse di precessione verticale, evenienza che non è dinamicamente possibile per il corpo rigido pesante asimmetrico. Si ha quindi:

IV. *Per le precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale (che non siano rotazioni) di vettore*

$$\varepsilon\omega = \alpha \boldsymbol{c} + \beta \boldsymbol{k} \tag{18'}$$

si ha $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{u} = \text{vers}\, 0G$ *e* $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{u} = \cos\theta = \beta/\alpha$.

Per una precessione generalizzata del tipo in esame accanto alla (18)′ per il teorema III, si ha inoltre

$$\sigma\omega = \alpha' \boldsymbol{c} + \beta' \boldsymbol{k}. \tag{21}$$

Sarebbe facile verificare su alcuni esempi [11]) che non è necessariamente $\varepsilon = \sigma$. Sussiste però il seguente teorema

V. *Per un moto di precessione generalizzata regolare (non rotatorio) con asse di precessione verticale di vettore* $\varepsilon\omega$, *può essere* $\varepsilon \neq \sigma$ *ma, anche in questo caso,* $\varepsilon\omega$ *si mantiene parallelo a* $\sigma\omega$ *ed esiste una costante* δ *tale che risulti*

$$\delta\varepsilon\omega = \sigma\omega. \tag{22}$$

Infatti dalla (17) e dalla (19), tenuto conto della complanarità dei vettori $\varepsilon\omega$, $\sigma\omega$ e $\boldsymbol{u}$, segue il parallelismo di $\varepsilon\omega$ e $\delta\omega$.

La (22) segue poi subito data la costanza di $|\varepsilon\omega|$ e $|\sigma\omega|$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bressan, A.: *Sulle precessioni del corpo rigido costituenti moti di Hess.* Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, vol. XXVII (57).

[2] Grioli, G.: *Forma intrinseca delle equazioni dinamiche del solido pesante asimmetrico e ricerca di moti di precessione,* Ann. Univ. di Ferrara, S. VII, vol. II (54).

---

11) Cfr. nota 9.

12) Cfr. ad es., [5], [7].

[3] GRIOLI, G.: *Questioni di dinamica del solido pesante asimmetrico,* Rend. Sem. Mat. dell'Univ. Padova, vol. XXI (52).

[4] GRIOLI, G.: *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi,* Rend. Acc. Naz. Lincei, S. VIII, vol. XL (63).

[5] TOTARO, C.: *Precessioni generalizzate regolari ellittiche per il corpo rigido pesante asimmetrico,* Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, vol. XL (68).

[6] TOTARO, C.: *Sull'impossibilità dinamica per il corpo rigido pesante asimmetrico di precessioni generalizzate regolari con asse di precessione verticale non ellittiche,* Ibidem (68).

[7] TOTARO, C.: *Sul problema delle precessioni generalizzate regolari ellittiche per il solido pesante,* Rend. Mem. Mat. dell'Univ. di Padova, vol. XLI (69).

[8] TROILO, R.: *Alcune osservazioni sulle precessioni generalizzate,* Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino, vol. 106 (71).

[9] TROILO, R.: *Sulla caratterizzazione delle precessioni semiregolari con asse di precessione verticale,* Rend. Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, vol. 46 (72).

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 luglio 1971 ed in forma riveduta il 14 settembre 1971.