RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO BRESSAN

Condizioni caratteristiche per le componenti dello stress

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 187-217

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__187_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOOVA, Vol. 47 (1972)

CONDIZIONI CARATTERISTICHE PER LE COMPONENTI DELLO STRESS

SERGIO BRESSAN *)

Sono ben note le equazioni indefinite di Cauchy nel caso di un sistema continuo in equilibrio. Lo scopo del presente lavoro è la determinazione delle condizioni a cui deve soddisfare una qualunque funzione g del posto affinchè la si possa interpretare come una delle componenti di uno stress soddisfacente le suddette equazioni. Si vedrà che trattasi di un problema ben diverso da quello ben noto della espressione delle soluzioni delle equazioni di Cauchy mediante funzioni potenziali [1]).

Considero, per semplicità, il caso che la configurazione di equilibrio C sia un parallelepipedo rettangolo. Dimostro che, in tal caso, le cercate condizioni sulla g, consistono in identità riguardanti integrali (estesi a sezioni di C con opportuni strati) i cui secondi membri sono espressi in funzione soltanto delle assegnate forze di volume e al contorno.

I risultati ottenuti mi sembrano di un certo interesse, oltre che in se stessi, per il seguente motivo.

Sono ben noti i risultati di Signorini [2]) e Grioli [3]) riguardanti le limitazioni inferiori per il massimo modulo degli sforzi in un sistema

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Via Belzoni 3, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica matematica, per le applicazioni della matematica alla fisica e all'ingegneria del C.N.R.

1) Vedi ad es.: A. E. H. Love, *Mathematical theory of Elasticity*, ...

2) A. Signorini, *Sopra alcune questioni di Statistica dei sistemi continui*, « Annali della S.N. superiore di Pisa », Serie II, Vol. 11, 1933, pag. 231.

3) G. Grioli, *Relazioni quantitative per lo stato tensionale* ..., « Annali di Matematica pura e applicata », Serie IV, Tomo XXXIII, 1952.

continuo in equilibrio, di equazioni costitutive qualsiasi, soggetto ad assegnate forze di massa e al contorno [4]).

Ritengo che questo lavoro possa servire per migliorare questi risultati.

Infatti, riferiamoci ad una terna cartesiana $0x_1x_2x_3$ e per a, $b=1, 2, 3$ richiamiamo K^{ab} l'insieme delle funzioni g che possono essere pesante come la componente X^{ab} di uno stress X^{rs} soddisfacente le equazioni di Cauchy e quelle al contorno; inoltre sia η l'esterno inferiore del massimo modulo in C della g al variare di quest'ultima in K^{ab}.

È evidente che, se 1 è una limitazione inferiore qualunque (già nota o no) per il massimo modulo di X^{ab} in C, non può che essere: $1 \leqslant \eta$. In altre parole η dà la miglior limitazione possibile tra quelle indipendenti dalla costituzione fisica del materiale.

1. Su alcune condizioni di compatibilità.

Sia data una terna trirettangola e levogira $0x_1x_2x_3$ e un sistema continuo in equilibrio nella configurazione C di contorno Σ soggetto alle forze esterne di contatto f^r e alle forze di volume F^r assegnate con continuità.

Le equazioni indefinite dell'equilibrio sono:

$$X^{rs}/s = F^r \qquad \text{in } C-\Sigma \tag{1}$$

$$X^{rs}n_s = f^r \qquad \text{su } \Sigma \tag{2}$$

Ritengo in tutto C lo stress X^{rs} (soddisfacente le (1) e (2)) continuo e le sue derivate parziali prime continue e limitate.

È ben noto che dalle (1) e (2) seguono le:

---

[4]) L'importanza di tali risultati risiede e nella loro relativa semplicità e nel fatto che per la determinazione dei valori medi e limitazioni suddetti si richiede solo la conoscenza della regione spaziale occupata dal sistema e delle forze di volume e al contorno. Vedi: Toupin R. A. e Truesdell C., *The Classical Field Theories*, da « Handbunch der Physik », Springer, 1960, pagg. 574-579.

$$\int_C F^r dC + \int_\Sigma f^r d\Sigma = 0$$

(3)

$$\int_C (x^r F^s - x^s F^r) dC + \int_\Sigma (x^r f^s - x^s f^r) d\Sigma = 0.$$

Meno note delle condizioni sugli spigoli che si deducono in base alla simmetria delle X^{rs} e dalla loro supposta continuità sul contorno. Esse verranno precisate dopo aver particolarizzato C.

Essendo le equazioni (1) e (2) indipendenti da qualsiasi ipotesi sulla natura e sullo stato fisico del corpo è noto che, quand'anche si pensi assegnata tutta la sollecitazione, lo *stress* non resta determinato. Chiamo G la classe delle funzioni $g(x_1, x_2, x_3)$, definite in C e ivi di classe $c^{(1)}$ [5]) tali che ognuna di esse possa essere interpretata come una componente X^{ab} di uno stress X^{rs} soddisfacente le (1), (2).

Per semplicità C sia il parallelepipedo con gli spigoli di lunghezza a, b e c, luogo del punto (x_1, x_2, x_3) per cui:

(4) $$0 \leqslant x_1 \leqslant a \qquad 0 \leqslant x_2 \leqslant b \qquad 0 \leqslant x_3 \leqslant c.$$

Consideriamo, per esempio, lo spigolo: $x_1 = x_2 = 0$; $0 \leqslant x_3 \leqslant c$.
Per la simmetria e la supposta continuità in tutto C delle X^{rs} riesce:

$$\lim_{x_1 \to 0+} X^{12}(x_1, 0, x_3) = \lim_{x_1 \to 0\pm} X^{21}(0, x_2, x_3)$$

Onde per (2) si ha [6]:

$$\lim_{x_1 \to 0+} f^1(x_1, 0, x_3) = \lim_{x_2 \to 0\pm} f^2(0, x_2, x_3)$$

L'analogo vale per gli altri tre spigoli paralleli all'asse x_3.

---

[5]) Basta che siano continue in C e con derivate prime continue e limitate all'interno di C.

[6]) Ovviamente $f^r(x_1, x_2, x_3)$ è definita per (x_1, x_2, x_3) soddisfacenti la:

$$x_1 x_2 x_3 (x_1 - a)(x_2 - b)(x_3 - c) = 0.$$

In complesso si può scrivere:

$$\lim_{x_1 \to h} f^1(x_1, k, x_3) = \lim_{x_2 \to k} f^2(h, x_2, x_3) \qquad (h=0, a;\ k=0, b) \tag{5}$$

Analoga condizione si ha per gli spigoli paralleli agli assi x_1 e x_2. Queste condizioni e le (5) insieme alle (3) saranno nel seguito sempre ritenute soddisfatte dai dati.

Sia (x, y, x) un punto del parallelepipedo. Chiamo C_z [7] la porzione di C costituita dai punti le cui coordinate soddisfano alle:

$$0 \leqslant x_1 \leqslant a; \qquad 0 \leqslant x_2 \leqslant b; \qquad 0 \leqslant x_3 \leqslant z.$$

Sia Σ_z la sezione di C mediante il piano $x_3 = z$ e λ_z la sua frontiera. $\bar{\Sigma}_z$ la frontiera di C_z privata dei punti di Σ_z; ossia: $\bar{\Sigma}_z = \mathfrak{F}C_z - \Sigma_z$. Osservo che, posto:

$$R^s(z) = \int_{\bar{\Sigma}_z} f^s d\Sigma + \int_{C_z} F^s dC \qquad \begin{matrix} (s=1, 2, 3) \\ (0 \leqslant z \leqslant c) \end{matrix} \tag{6}$$

per la prima equazione cardinale della Meccanica applicata a C_z, deve essere:

$$\int_{\Sigma_z} X^{s3} d\Sigma = R^s(z) \qquad (s=1, 2, 3) \tag{7}$$

Osservo ancora che, derivando le (7) (e (6)) rispetto a z, si ottengono le relazioni:

$$\int_{\Sigma_z} X^{s3}/_3 d\Sigma = \int_{\lambda_z} f^s d\lambda + \int_{\Sigma_z} F^s d\Sigma \qquad (s=1, 2,3) \tag{8}$$

le quali risultano anche integrando le (1) su Σ_z, le (2) su λ_z e applicando opportunamente il lemma di Green.

7) Analogamente si procede con x o y.

2. Preliminari matematici.

All'interno del rettangolo di vertici (o, o), (a, o), (a, b), (o, b) considero l'equazione indefinita:

$$\frac{\partial v(x_1x_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial u(x_1x_2)}{\partial x_1}=F(x_1x_2) \tag{9}$$

ove F è continua e le funzioni u e v lo sono assieme alle loro derivate parziali prime. Le u e v soddisfano le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} v(o,\ x_2)&=v_1(x_2) \qquad & v(x_1\,,\ o)&=v_3(x_1)\\ v(a,\ x_2)&=v_2(x_2) \qquad & v(x_1\,,\ b)&=v_4(x_1) \end{aligned} \tag{10}$$

$$u(o,\ x_2)=u_1(x_2) \qquad u(a,\ x_2)=u_2(x_2) \tag{11}$$

L'integrale generale della (9) può porsi nella forma:

$$\begin{aligned} v&=\int_o^{x_2} F(x_1\,,\ x'_2)dx'_2+\frac{\partial\chi(x_1\,,\ x_2)}{\partial x_1}\\ u&=-\frac{\partial\chi(x_1\,,\ x_2)}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{12}$$

ove χ è una qualunque funzione di classe $c^{1})$ sul rettangolo e di classe $c^{2})$ all'interno. Per (12) le condizioni (10) e (11) diventano:

$$\begin{aligned} \int_o^{x_2} F(o,\ x'_2)dx'_2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)_{x_1=o}&=v_1(x_2)\\ \int_o^{x_2} F(a,\ x'_2)dx'_2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)_{x_1=a}&=v_2(x_2)\\ \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)_{x_2=o}&=v_3(x_1) \end{aligned}$$

(13)

$$\int_o^b F(x_1x_2)dx_2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)_{x_2=b}=v_4(x_1)$$

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)_{x_1=o}=u_1(x_2)$$

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)_{x_1=o}=u_2(x_2)$$

Nota $\chi(o, o)$ le $(13)_{3,4,5,6}$ ci fanno conoscere la χ su tutto il contorno poichè esse equivalgono alle:

$$(14)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\chi(x_1\,,\, o)=\int_o^{x_1} v_3(x'_1)dx'_1+\chi(o,\ o)\\
&\chi(a,\ x_2)=-\int_o^{x_2} u_2(x'_2)dx'_2+\chi(a,\ o)\\
&\chi(x_1b)=\int_a^{x_1}\left[-\int_o^{b} F(x'_1x_2)dx_2+v_4(x'_1)\right]dx'_1+\chi(a,\ b)\\
&\chi(o,\ x_2)=-\int_b^{x_2} u_1(x'_2)dx'_2+\chi(o,\ b)
\end{aligned}\right.$$

Sommando membro a membro la $(14)_1$ per $x_1=a$ con la $(14)_2$ per $x_2=b$, con la $(14)_3$ per $x_1=o$ e con la $(14)_4$ per $x_2=o$ e semplificando si ottiene la seguente condizioni di compatibilità sui dati:

$$(15)\qquad \int_o^a v_3dx_1-\int_o^b u_2dx_2+\int_a^o\left[v_4-\int_o^b Fdx_2\right]dx_1-\int_b^o u_1dx_2=0$$

Le (13) implicano pure le seguenti condizioni di compatibilità:

$$(16)\qquad v_3(o)=v_1(o)\qquad\qquad v_3(a)=v_2(o)$$

(17) $$\nu_1(b)=\nu_4(o) \qquad \nu_2(b)=\nu_4(a)$$

Supponiamo ora valide le (15), (16) e (17). Evidentemente sul rettangolo considerato si può determinare in infiniti modi una funzione $\chi(x_1, x_2)$ avente sul contorno i valori assegnati dalle (14) e sui lati $x_1=o$ e $x_1=a$ i valori della derivata rispetto ad x_1 assegnati dalle $(13)_{1,2}$. Una tale χ soddisfa le (13). Allora le u e v date da (12) soddisfano oltre la (9) le (10) e (11). Concludiamo che *le* (15), (16) *e* (17) *sono condizioni necessarie e sufficienti affinchè il problema* (9), (10) *e* (11) *nelle funzioni incognite $u(x_1, x_2)$ e $v(x_1, x_2)$ ammetta soluzioni.*

Nel caso di solubilità la soluzione generale è espressa da (12) sotto le condizioni $(13)_{1,2}$ e (14) sulla χ.

Sia ora $u(x_1, x_2)$ e $v(x_1, x_2)$ una soluzione del problema (9), (10) e (11). La coppia di funzioni $u'(x_1, x_2)$ e $v'(x_1, x_2)$ date da:

(18) $$u'=u+\Delta u \qquad v'=v+\Delta v$$

costituisce anch'essa una soluzione non appena Δv soddisfa le condizioni:

(19) $$\Delta v(x_1, o)=\Delta v(x_1, b)=0 \qquad (\text{per } o\leqslant x_1\leqslant a)$$
$$\Delta v(o, x_2)=\Delta v(a, x_2)=0 \qquad (\text{per } o\leqslant x_2\leqslant b)$$
$$\int_o^a \Delta v dx_1=0$$

e Δu è espressa dalla:

(20) $$\Delta u=-\int_o^{x_1}\frac{\partial\Delta v}{\partial x_2}dx'_1 \qquad (o\leqslant x_2\leqslant b).$$

La necessità delle $(19)_{1,2,3,4}$ segue immediatamente dalle (10). Per la $(19)_5$ basta integrare la (9) sul rettangolo σ_y di vertici (o, o) (a, o), (a, y), (o, y) (con $o\leqslant y\leqslant b$) e sulla sua frontiera integrare le condizioni al contorno (10) e (11). Applicando opportunamente il lemma di Green si, ottiene per la $v(x_1, x_2)$ la condizione:

$$(21) \qquad \int_o^a v(x_1, y)dx_1 = \int_{\sigma_y} F(x_1, x_2)d\sigma + \int_o^a v_3 dx_1 + \int_o^y (u_1+u_2)dx_2$$

da cui segue appunto la necessità della condizione $(19)_5$.

Per (9) e $(10)_1$ una qualunque soluzione u', v' del nostro problema soddisfa la:

$$(22) \qquad u' = u_1(x_2) + \int_o^{x_1} \left[F(x'_1, x_2) - \frac{\partial v'}{\partial x_2} \right] dx'_1 .$$

Per (18) la (22) dà la (20). È facile poi, mediante una verifica diretta, accertare la sufficienza delle condizioni (19) e (20).

Nel seguito sarà utile il seguente teorema di analisi:

Sia assegnata la funzione $f(x_1, x_2)$ continua in tutto il rettangolo dato da:

$$o \leqslant x_1 \leqslant a \qquad o \leqslant x_2 \leqslant b$$

C. n. e s. affinchè si possa esprimere la $f(x_1, x_2)$ *come somma di due funzioni* $\varphi(x_1, x_2)$ *e* $\psi(x_1, x_2)$ *continue e soddisfacenti rispettivamente le*:

$$(23) \qquad \begin{aligned} &\int_o^a \varphi(x_1, x_2)dx_1 = 0 \qquad && (o \leqslant x_2 \leqslant b) \\ &\int_o^b \psi(x_1, x_2)dx_2 = 0 \qquad && (o \leqslant x_1 \leqslant a) \end{aligned}$$

è che sia:

$$(24) \qquad \int_o^b \int_o^a f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = 0.$$

Infatti se è:

$$f(x_1\,,\;x_2)=\varphi(x_1\,,\;x_2)+\psi(x_1\,,\;x_2) \tag{25}$$

con φ e ψ soddisfacenti le (23), si può scrivere:

$$\int_o^a f(x_1\,,\;x_2)dx_1=\int_o^a \psi(x_1\,,\;x_2)dx_1\,. \tag{26}$$

Integrando ambi i mebri della (26) fra o e b si ottiene la (24). Viceversa sia data la funzione $f(x_1\,,\;x_2)$ soddisfacente la (24). Pongo:

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1)=\frac{1}{b}\int_o^b f(x_1\,,\;x_2)dx_2\\ &\psi(x_1\,,\;x_2)=f(x_1\,,\;x_2)-(x_1)\end{aligned} \tag{27}$$

per cui si può scrivere la (25). Per verificare le condizioni (23) basta integrare la $(27)_1$ fra o e a, e la $(27)_2$ fra o e b e tener conto di (24).

3. Un teorema fondamentale nel caso dei due indici uguali.

Suppongo, per fissare le idee, di voler identificare la funzione $g(x_1\,,\;x_2\,,\;x_3)$ con la caratteristica di tensione X^{33}. ChiamoC'_{xz} e C''_{yz} le intersezioni di C_z con gli strati, rispettivamente, $o\leqslant x_1\leqslant x$, $o\leqslant x_2\leqslant y$; σ'_{xz} e σ''_{yz} le intersezioni di Σ_z con, rispettivamente, gli strati suddetti.

Sia R^s_{xz} il risultante delle forze di volume agenti su C'_{xz} e delle forze esterne di contatto agenti su $C'_{xz}\cap\Sigma$. Sia R^s_{yz} l'analogo per C''_{yz}. Si ha [8]):

$$\begin{aligned}R^s_{xz}=&\int_{\sigma'_{xo}} f^s_{\xi,\,\eta,\,o}\,d\sigma+\int_o^z\left[\int_o^b f^s_{o,\,x_2,\,\xi}\,dx_2+\int_o^x (f^s_{\xi,\,o,\,\zeta}+f^s_{\xi,\,b,\,\zeta})d\xi\right]d\zeta+\\ &+\int_o^z\left(\int_{\sigma'_{xz}} F^s d\sigma\right)d\zeta\end{aligned} \tag{28}$$

---

[8]) Per semplificare le formule, d'ora in poi, le variabili indipendenti sono spesso sottoscritte come fossero indici.

$$R^s_{yz}=\int_{\sigma''_{yo}} f^s_{\xi,\eta,o}\,d\sigma+\int_o^z\left[\int_o^a f^s_{x_1,o,\zeta}dx_1+\int_o^y (f^s_{o,\eta,\zeta}+f^s_{a,\eta,\zeta})d\eta\right]d\zeta+$$
$$+\int_o^z\left(\int_{\sigma''_{yz}} F^s d\sigma\right)d\zeta.$$

Posso ora porre:

$$\psi_1(z)=\int_o^a R^3_{xz}dx-\int_o^z R^1(\zeta)d\zeta \tag{29}$$

$$\psi_2(z)=\int_o^b R^3_{yz}dy-\int_o^z R^2(\zeta)d\zeta \tag{30}$$

ove R^3_{xz} e R^3_{yz} sono dati dalle (28) per $s=3$ e $R^1(\zeta)$ e $R^2(\zeta)$ si ottengono da (6) per $z=\zeta$ facendo rispettivamente $s=1$ e $s=2$.

TEOREMA. *C. n. e s. affinchè una funzione $g(x_1, x_2, x_3)$ di classe G si possa identificare con la X^{33} di uno stress soddisfacente le* (1) *e* (2) *è che sulle basi $x_3=0$ e $x_3=c$ sia soddisfatta la condizione* (2) *per* $r=3$ [ossia:

$$g(x_1, x_2, o)=f^3(x_1, x_2, o) \qquad g(x_1, x_2, c)=-f^3(x_1, x_2, c)] \tag{31}$$

e che inoltre sussistano le seguenti tre identità in z:

$$\int_{\Sigma_z} g(x_1, x_2, z)d\Sigma=R^3(z)$$

$$\int_o^b dx_2\int_o^a dx\int_o^x g(x'_1, x_2, z)dx'_1=\psi_1(z) \qquad (o\leqslant x\leqslant a) \tag{33}$$

$$\int_o^a dx_1\int_o^b dy\int_o^y g(x_1, x'_2, z)dx'_2=\psi_2(z) \qquad (o\leqslant y\leqslant b)$$

ove $R^3(z)$ si ottiene da (6) per $s=3$ e $\psi_1(z)$ e $\psi_2(z)$ sono dati da (29) e (30).

La condizione è necessaria.

Infatti: valgano le (1) e (2) e sia $g=X^{33}$. Allora le (2) valgono per $r=3$ sulle basi $x_3=o$ e $x_3=c$, onde (31). Inoltre la $(33)_1$ è senz'altro soddisfatta in quanto conseguenza delle (1) e (2) rappresentante la prima equazione cardinale della Meccanica applicata alla porzione C_z.

Dimostro che sono soddisfatte anche le $(33)_2$ e $(33)_3$.

Intendendo che gli indici greci varino da 1 a 2 solamente, le (1) e (2) per $r=3$ si possono scrivere:

$$(34)\qquad \begin{aligned} &X^{3\alpha}/\alpha=F^3-X^{33}/_3 && \text{su } \Sigma_z \\ &X^{3\alpha}n_\alpha=f^3 && \text{su } \lambda_z \end{aligned}$$

Chiamo l_x e l_y i segmenti, rispettivamente, $(x, o, z)(x, b, z)$ e (o, y, z) (a, y, z), e $\bar{l}_x$ e $\bar{l}_y$ le frontiere, rispettivamente, di σ'_{xz} e σ''_{yz} private la prima del segmento l_x e la seconda di l_y; ossia:

$$\bar{l}_x=F\sigma'_{xz}-l_x \qquad \bar{l}_y=F\sigma''_{yz}-l_y\,.$$

Integrando membro a membro la $(34)_1$ su σ'_{xz} e la $(34)_2$ su $F\sigma'_{xz}$ e applicando opportunamente il lemma di Green, si ha (essendo: $F\sigma'_{xz}=\bar{l}_x+l_x$):

$$(35)\qquad \int_{l_x} X^{31}d\lambda=\int_{\bar{l}_x} f^3d\lambda+\int_{\sigma'_{xz}}(F^3-X^{33}/_3)d\sigma.$$

Inoltre è:

$$(36)\qquad \int_o^a\left(\int_{l_x} X^{31}d\lambda\right)dx=\int_{\Sigma_z} X^{31}d\Sigma.$$

Cosicchè, in base alla (7) per $s=1$, alla (35) e alla (36), segue:

$$(37)\qquad R^1(z)=\int_o^a\left|\int_{\bar{l}_x} f^3d\lambda+\int_{\sigma'_{xz}}(F^3-X^{33}/_3)d\sigma\right|dx$$

da cui si ha:

$$(38) \qquad \int_o^a \left[\int_{\sigma'_{xz}} X^{33}{}_{/3}\, d\sigma \right] dx = \int_o^a \left[\int_{\overline{l}x} f^3 d\lambda + \int_{\sigma'_{xz}} F^3 d\sigma \right] dx - R^1(z).$$

Sostituendo in (38) z con ζ *e* integrando rispetto a ζ fra o e z, si ottiene:

$$(39) \qquad \int_o^a \left[\int_{\sigma'_{xz}} X^{33}_{\xi,\eta,z}\, d\sigma - \int_{\sigma'_{xo}} X^{33}_{\xi,\eta,o}\, d\sigma \right] dx = \int_o^a \left[\int_o \left(\int f^3 d\lambda + \int_{\sigma'_{x\zeta}} F^3 d\sigma \right) d\zeta \right] dx -$$

$$- \int_o^z R^1(\zeta) d\zeta.$$

Osservando che è:

$$\int_{\sigma'_{xo}} X^{33}_{\xi,\eta,o}\, d\sigma = \int_{\sigma'_{xo}} f^3_{\xi,\eta,o}\, d\sigma$$

la (39) può anche scriversi:

$$(40) \qquad \int_o^a \left[\int_{\sigma'_{xz}} X^{33} d\sigma \right] dx = \int_o^a R^3_{xz} dx - \int_o^z R^1(\zeta) d\zeta.$$

che è identica alla $(33)_2$.

Integrando la $(34)_1$ su σ''_{yz} e la $(34)_2$ su $F\sigma''_{yz}$ con un procedimento analogo al precedente si arriva alla:

$$(41) \qquad \int_o^b \left[\int_{\sigma''_{yz}} X^{33} d\sigma \right] dy = \int_o^b R^3_{yz} dy - \int_o^z R^2(\zeta) d\zeta$$

che è identica alla $(33)_3$.

La condizione è sufficiente.

Intendiamo $X^{33} = g$ e supponiamo valide le (31) e (33).

Per (31) le (2) per $r=3$ sulle facce $x_3=o$ e $x_3=c$ sono senz'altro soddisfatte. Scrivo le (1) e (2) per $r=3$:

$$(42) \qquad \begin{aligned} & X^{3\alpha}{}_{/\alpha} = F^3 - g_{/3} && \text{su } \Sigma_z \\ & X^{3\alpha} n_\alpha = f^3 && \text{su } \lambda_z . \end{aligned}$$

Integrando membro a membro la $(42)_1$ su Σ_z e la $(42)_2$ su λ_z e applicando opportunamente il lemma di Green si ottiene:

$$(43) \qquad \int_{\Sigma_z} (F^3 - g_{/3}) d\Sigma + \int_{\lambda_z} f^3 d\lambda = 0.$$

Com'è noto la (43) è l'unica condizione di compatibilità del problema (42) nelle funzioni incognite X^{31} e X^{32}. Essa vale in quanto g soddisfa la $(33)_1$ da cui derivando rispetto a z si ha appunto la (43).

Dimostro che, per $(33)_2$ e $(33)_3$, ogni soluzione X^{31}, X^{32} del problema (42) soddisfa, per ogni z, le equazioni cardinali su C_z espresse da (7) per $s=1$ e $s=2$ rispettivamente (intendendo $X^{33}=g$). Infatti sappiamo, per esempio, che la $(33)_2$ equivale a (39); derivando quest'ultima rispetto a z si ottiene (38) che equivale a (37) e, anzi, a (7) per $s=1$. Analogamente da $(33)_3$ segue la (7) per $s=2$.

Dalle (1) e (2) per $r=1$ e dalla (2) $r=2$ si ha:

$$(44) \qquad \begin{aligned} & X^{1\alpha}{}_{/\alpha} = F^1 - X^{13}{}_{/3} && \text{su } \Sigma_z \\ & \left.\begin{aligned} & X^{1\alpha} n_\alpha = f^1 \\ & X^{21} n_1 = f^2 \end{aligned}\right\} && \text{su } \lambda_z . \end{aligned}$$

Le condizioni di compatibilità del problema (44) nelle funzioni incognite X^{11} e X^{12} sono l'analogo della (15), ossia la

$$(45) \qquad \int_{\Sigma_z} (F^1 - X^{13}{}_{/3}) d\Sigma + \int_{\lambda_z} f^1 d\lambda = 0,$$

e le analoghe delle (16) e (17).

La (45) è la (8) per $s=1$ che appunto segue da (7) per $s=1$.

Le (16) e (17) non sono altri che le (5) e quindi soddisfatte per ipotesi.

La (1) per $r=2$ dà la X^{22}. Infatti si può scrivere:

$$X^{22}=\int_{o}^{x_2}(F^2-X^{21}/1-X^{23}/3)dx'_2+\Phi(x_1\,,\;x_3) \tag{46}$$

ove le X^{23} e X^{21} sono da ritenersi note in quanto appartenenti a soluzioni dei problemi (42) e (44) rispettivamente.

Se si tien conto della (2) con $r=2$ sulla faccia $x_2=o$, la (46) permette di determinare la $\Phi(x_1\,,\;x_3)$. È infatti:

$$\Phi(x_1\,,\;x_3)=f^2(x_1\,,\;o,\;x_3).$$

Sulle facce $x_1=o$ e $x_1=a$ la (2) con $r=2$ è senz'altro soddisfatta in quanto diventa la $(44)_3$. Sulla faccia $x_2=b$ deve essere:

$$X^{22}(x_1\,,\;b,\;x_3)=-f^2(x_1\,,\;b,\;x_3). \tag{47}$$

Dimostro ora che per una classe molto vasta di soluzioni dei problemi (42) e (44) la X^{22} definita da (46) soddisfa la (47).

Supposta non soddisfatta la (47), definisco sulla faccia $x_2=b$ la quantità $\Delta X^{22}(x_1\,,\;x_3)$ mediante la:

$$\Delta X^{22}(x_1\,,\;x_3)=X^{22}(x_1\,,\;b,\;x_3)+f^2(x_1\,,\;b,\;x_3). \tag{48}$$

Pongo:

$$\overline{X}^{rs}=X^{rs}+\Delta X^{rs}.$$

Per (19) e (20) si ha che anche le $\overline{X}^{rs}$ sono soluzioni dei problemi (42) e (44) non appena ΔX^{32} e ΔX^{12} soddisfano le condizioni:

$$\begin{cases} \Delta X^{32}(x_1\,,\;o,\;x_3)=\Delta X^{32}(x_1\,,\;b,\;x_3)=0 \\ \Delta X^{32}(x_1\,,\;x_2\,,\;o)=\Delta X^{32}(x_1\,,\;x_2\,,\;c)=0 \\ \displaystyle\int_{o}^{a}\Delta X^{32}dx_1=0 \end{cases} \tag{49}$$

$$(50)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta X^{12}(o,\, x_2,\, x_3)=\Delta X^{12}(a,\, x_2,\, x_3)=0 \\ \Delta X^{12}(x_1,\, o,\, x_3)=\Delta X^{12}(x_1,\, b,\, x_3)=0 \\ \displaystyle\int_o^a \Delta X^{12} dx_1=0 \end{array}\right.$$

e inoltre la ΔX^{31} e la ΔX^{11} sono date da:

$$(51)\qquad \begin{array}{l} \displaystyle \Delta X^{31}=-\int_o^{x_1}\frac{\partial \Delta X^{32}}{\partial x_2}dx'_1 \\ \displaystyle \Delta X^{11}=-\int_o^{x_1}\frac{\partial \Delta X^{12}}{\partial x_2}dx'_1 \end{array}$$

e la $\overline{X}^{22}$ deve costruirsi a partire dalle $\overline{X}^{21}$ e $\overline{X}^{23}$ in modo analogo a (46).

Affinchè la $\overline{X}^{22}$ soddisfi la (47) occorre che ΔX^{32} e ΔX^{12} soddisfino la:

$$(52)\qquad \int_o^b\left(\frac{\partial \Delta X^{21}}{\partial x_1}+\frac{\Delta X^{23}}{\partial x_3}\right)dx_2=\Delta X^{22}(x_1,\, x_3)$$

come si riconosce sostituendo in (47) le X^{rs} con le $\overline{X}^{rs}$ e tenendo conto della (46) e della (48).

Osservo che è:

$$(53)\qquad \int_o^a \Delta X^{22} dx_1=0$$

Infatti: sia la X^{22}, data da (46), sia una qualunque $\overline{X}^{22}$, facente parte di una soluzione del problema completo (1) (2), soddisfano per ogni x_3 la:

$$(54)\qquad \int_o^a\int_o^{x_3} X^{22}_{x_2=b}\, dx'_3 dx_1=\int_{C_z} F^2 dC+\int_o^b\int_o^{x_3}(f^2_{x_1=a}+f^2_{x_1=o})dx'_3 dx_2-\int_{\Sigma_z} X^{23} d\Sigma+$$

$$+\int_o^a\int_o^b X^{23}_{x_3=o}dx_2dx_1+\int_o^a\int_o^{x_3}\Phi(x_1x'_3)dx'_3dx_1$$

Ricordando che la X^{23} soddisfa la (7) per $s=2$, il secondo membro di (54) è espresso mediante le assegnate forze di massa e al contorno. Essendo ciò valido per ogni z deve essere:

$$\int_o^a(X^{22}_{x_4=b}-\overline{X}^{22}_{x_2=b})dx_1=0 \qquad o\leqslant x_3\leqslant c$$

ossia la (53).

Pongo:

$$(55)\qquad \varphi(x_1)=\frac{1}{c}\int_o^c \Delta X^{22}dx_3$$
$$\psi(x_1\,,\ x_3)=\Delta X^{22}-\varphi(x_1)$$

Invece del problema (52) colle condizioni (49) e (50) posso limitarmi a considerare separatamente il problema:

$$(56)\qquad \int_o^b\frac{\partial\Delta X^{21}}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_2=\varphi(x_1)$$

nella sola funzione incognita ΔX^{21} colle condizioni (50) e il problema:

$$(57)\qquad \int_o^b\frac{\partial\Delta X^{23}}{\partial x_3}\,dx_2=\psi(x_1\,,\ x_3)$$

nella sola funzione incognita ΔX^{23} colle condizioni (49).

Naturalmente non si ritiene con le ΔX^{21} e ΔX^{23}, soluzioni dei problemi (56) e (57) rispettivamente, esauriscano il problema (52). Ciò non è d'altronde il nostro scopo in quanto ci basta soltanto far vedere l'esistenza di qualche soluzione.

Cerco quindi se esiste una funzione $\Delta X^{21}(x_1, x_2, x_3)$ che soddisfi il problema (56) colle condizioni (50) e una funzione $\Delta X^{23}(x_1, x_2, x_3)$ che soddisfi il problema (57) colle condizioni (49).

Considero una funzione $t(x_2)$ definita e continua nell'intervallo $o \leqslant x_2 \leqslant b$ che goda delle seguenti proprietà:

$$t(b) = t(o) = 0 \qquad \int_o^b t(x_2) dx_2 = 1 \tag{58}$$

Pongo ora:

$$\Delta X^{21} = t(x_2) \int_o^{x_1} \varphi(x'_1) dx'_1 \tag{59}$$

Si verifica facilmente che la (59) per (58), $(55)_1$ e (53) verifica la (56) e le $(50)_{1,2}$. In generale non sarà però soddisfatta la $(50)_3$. Analogamente pongo:

$$\Delta X^{32} = t(x_2) \int_o^{x_3} \psi(x_1, x'_3) dx'_3 \tag{(60)}$$

La (60) per (59) e $(55)_2$ verifica la (57) e le (49).

Si può dimostrare facilmente [9]) che condizione necessaria e sufficiente perchè valga la $(50)_3$ è che sia:

---

[9]) Si osservi che, detta $\overline{\Delta X^{21}}$ una soluzone del problema completo (56), (50) e posto: :

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = \overline{\Delta X^{21}} - \Delta X^{21},$$

α soddisfa le:

$$\alpha(o, x_2, x_3) = \alpha(a, x_2, x_3) = 0 \tag{I}$$

$$\alpha(x_1, o, x_3) = \alpha(x_1, b, x_3) = 0 \tag{II}$$

$$\int_o^a \alpha dx_1 = - \int_o^a \Delta X^{21} dx_1 \tag{III}$$

$$(61) \qquad \int_o^a \left(\int_o^{x_1} \varphi(x'_1) dx'_1 \right) dx_1 = 0$$

Ricordo che è:

$$\Delta X^{22} = \varphi + \psi$$

Integro ambo i membri della precedente fra o e c. Si ottiene:

$$(62) \qquad \int_o^C \Delta X^{22} dx_3 = \int_o^C \varphi dx_3$$

Per (48) e (46), integrando ambo i membri della (62) prima fra o e x_1 e quindi fra o e a si ottiene (ricordando la (61)) la seguente condizione sulla X^{21}:

$$(63) \qquad \int_C X^{21} dC = \int_o^C \int_o^b \int_o^a \int_o^{x_1} F^2 dx'_1 dx_1 dx_2 dx_3 + a \int_o^C \int_o^b f^2_{x_1=o} dx_2 dx_3 +$$

$$+ \int_o^b \int_o^a \int_o^{x_1} (f^2_{x_3=c} + f^2_{x_3=o}) dx'_1 dx_1 dx_2 + \int_o^C \int_o^a \int_o^{x_1} (f^2_{x_2=b} + f^2_{x_2=o}) dx'_1 dx_1 dx_3$$

$$(\mathrm{IV}) \qquad \int_o^b \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_2 = 0.$$

Quest'ultima dà:

$$\int_o^b \alpha dx_2 = \text{cost.} \qquad \text{per } o \leq x \leq a.$$

Essendo $\alpha = 0$ identicamente per $x_1 = 0$, la costante vale 0. Allora per (III) sì può scrivere:

$$\int_o^b \int_o^a \Delta X^{21} dx_1 dx_2 = 0$$

che per (59) diventa:

$$\int_o^b \int_o^a t(x_2) \int_o^{x_1} \varphi(x'_1) dx'_1 dx_1 dx_2 = \int_o^a \int_o^{x'_1} \varphi(x'_1) dx'_1 dx_1 = 0.$$

Per (12) l'integrale generale della $(44)_1$ si può scrivere:

$$
\text{(64)} \qquad \begin{gathered}
X^{12} = \int_o^{x_2} (F^1 - X^{13}/3) dx'_2 + \frac{\partial\chi(x_1 x_2 z)}{\partial x_1} \\
X^{11} = - \frac{\partial\chi(x_1 x_2 z)}{\partial x_2}
\end{gathered}
$$

ove χ è una qualunque funzione di classe c^1 su λ_z e di classe c^2 su Σ_z. Essa deve soddisfare le analoghe delle (13), ossia:

$$
\text{(64)} \quad \left\{ \begin{aligned}
&\int_o^{x_2} (F^2 - X^{13}/3)_{x_1=o}\, dx'_2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)_{x_1=o,\, x_3=z} = f^2_{x_1=o} \\
&\int_o^{x_2} (F^2 - X^{13}/3)_{x_1=a}\, dx'_2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)_{x_1=a,\, x_3=z} = -f^2_{x_1=a} \\
&\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)_{x_2=o,\, x_3=z} = f^2_{x_2=o} \\
&\int_o^{b} (F^1 - X^{13}/3) dx_2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)_{x_2=b,\, x_3=z} = -f^2_{x_2=b} \\
&\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)_{x_1=o,\, x_3=z} = -f^1_{x_1=o} \\
&\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)_{x_1=a,\, x_3=z} = f^1_{x_1=a}
\end{aligned} \right.
$$

Le (65) comportano una condizione di compatibilità analoga alla (15). Deve essere:

$$
\text{(66)} \qquad \begin{aligned}
\int_{\Sigma_z} X^{13}/3\, d\Sigma = {} & \int_o^a f^2_{x_2=o}\, dx_1 + \int_o^b f^1_{x_1=o} dx_2 + \int_o^b f^1_{x_1=a} dx_2 + \\
& + \int_o^a f^2_{x_2=b}\, dx_1 + \int_{\Sigma_z} F^1 d\Sigma .
\end{aligned}
$$

La (66) è senz'altro soddisfatta in quanto conseguenza della $(7)_1$. Basta infatti sostituire z con x_3 e integrare ambo i membri fra o e z per ottenere la $(7)_1$.

Le condizioni compatibilità analoghe alle (16) e (17) sono anche esse soddisfatte a causa della simmetria del tensore degli sforzi che comporta la continuità attraverso lo spigolo della componente tangenziale dello sforzo superficiale. Per esempio la $(16)_1$ dà:

$$\lim_{x_1\to 0} f^1(x_1\,,\ o,\ z) = \lim_{x_2\to 0} f^2(o,\ x_2\,,\ z)$$

ove f^1 è calcolata sulla faccia $x_2=o$ e f^2 sulla faccia $x_1=o$.

Integro ora la $(64)_1$ su tutto C e tengo conto della (63). Ottengo così l'ulteriore condizione per la χ:

$$\int_o^c\int_o^b (\chi_{x_1=a}-\chi_{x_1=o})\,dx_2 dx_3 = L \tag{67}$$

ove L è uno scalare che dipende dai dati nel modo seguente:

$$\begin{aligned} L = &-\int_o^c\int_o^a\int_o^b\int_o^{x_2} F^1 dx'_2 dx_2 dx_1 dx_3 - \int_o^a\int_o^b\int_o^{x_2} (f^1_{x_3=c}+f^1_{x_3=o})\,dx'_2 dx_2 dx_1 + \\ &+\int_o^c\int_o^b\int_o^a\int_o^{x_1} F^2 dx'_1 dx_1 dx_2 dx_3 + a\int_o^c\int_o^b f^2_{x_1=o}\,dx_2 dx_3 + \\ &+\int_o^b\int_o^a\int_o^{x_1} (f^2_{x_3=c}+f^2_{x_3=o})\,dx'_1 dx_1 dx_2 + \int_o^c\int_o^a\int_o^{x_1} (f^2_{x_2=b}+f^2_{x_2=o})\,dx'_1 dx_1 dx_3\,. \end{aligned} \tag{68}$$

A completamento della dimostrazione basta far vedere che è possibile determinare delle funzioni χ soddisfacenti la (67). Infatti la X^{12} data da $(64)_1$ in corrispondenza a detta scelta della χ soddisfa la condizione (63). Ciò vuol dire che è possibile soddisfare la (61) e quindi risolvere il problema dato da (56) colle condizioni (50). Le soluzioni di questo problema assieme a quelle del problema dato da (57) colle condizioni (49) sono, come si è detto, contenute nella classe delle soluzioni del problema (52) colle condizioni (49) e (50).

Dalle $(65)_{5,6}$ si ha che la χ sulle facce $x_1=o$ e $x_1=a$ si può scrivere:

$$(69) \qquad \begin{aligned} \chi(o,\, x_2\,,\, x_3) &= -\int_o^{x_2} f^1(o,\, x'_2\,,\, x_3)dx'_2 - M(x_3) \\ \chi(a,\, x_2\,,\, x_3) &= \int_o^{x_2} f^1(a,\, x'_2\,,\, x_3)dx'_2 + N(x_3) \end{aligned}$$

ove M e N sono funzioni della sola x_3.

Per la (69) la condizione di compatibilità (67) diventa:

$$(70) \qquad b\int_o^c (M(x_3)+N(x_3))dx_3 = L - \int_o^c\int_o^b\int_o^{x_2} (f^1_{x_1=o}+f^1_{x_1=a})dx'_2dx_2dx_3$$

ove L è dato dalla (68).

Data l'arbitrarietà delle funzioni $M(x_3)$ e $N(x_3)$, è possibile soddisfare la (70). Allora la caratteristica di tensione X^{12}, data da $(64)_1$ con la χ soddisfacente la (67), soddisfa la (63).

È quindi solubile il problema (52) colle condizioni (49) e (50). Di conseguenza la $\overline{X}^{22}$ costruita mediante (46) colle $\overline{X}^{21}$ e $\overline{X}^{23}$ soddisfa anche la condizione (47) ossia le X^{rs} costituiscono una soluzione del problema (1) e (2) c.d.d.

4. Teorema relativo al caso dei due indici distinti.

Preliminarmente faccio le seguenti posizioni analoghe alla (7):

$$(71) \qquad \begin{aligned} R^s(x) &= \int_{\overline{\Sigma}_x} f^s d\Sigma + \int_{C_x} F^s dC \qquad (o\leqslant x\leqslant a) \\ R^s(y) &= \int_{\dot{\Sigma}_y} f^s d + \int_{C_y} F^s dC \qquad (o\leqslant y\leqslant b) \end{aligned}$$

ove è ormai ovvio il significato dei simboli.

Suppongo, per fissare le idee, di voler identificare la funzione $g(x_1, x_2, x_3)$ con la caratteristica di tensione X^{12}.

Si può enunciare il seguente:

TEOREMA. *C. n. e s. affinchè una funzione $g(x_1, x_2, x_3)$ di classe G si possa identificare con la X^{12} di uno « stress » soddisfacente le* (1), (2), *è che siano soddisfatte le condizioni* (2) *per $r=1$ e $r=2$ sulle basi $x_2=0$, $x_2=b$ e $x_1=0$, $x_1=a$ rispettivamente* (ossia:

$$(72)\quad \begin{aligned} &g(x_1, o, x_3)=f^1(x_1, o, x_3) \qquad && g(x_1, b, x_3)=-f^1(x_1, b, x_3) \\ &g(o, x_2, x_3)=f^2(o, x_2, x_3) && g(a, x_2, x_3)=-f^2(a, x_2, x_3)) \end{aligned}$$

e inoltre sussistano le seguenti due identità in x e y rispettivamente:

$$(73)\qquad \int_{\Sigma_x} g(x, x_2, x_3)d\Sigma=R^2(x)$$

$$(74)\qquad \int_{\Sigma_y} g(x_1, y, x_3)d\Sigma=R^1(y)$$

dove $R^2(x)$ e $R^1(y)$ si ottengano rispettivamente da $(71)_1$ per $s=2$ e $(71)_2$ per $s=1$.

La condizione è necessaria.

Valgano le (1) e (2) e sia $g\equiv X^{12}$. Le (2) per $r=1$ sulle basi $x_2=0$ e $x_2=b$, e per $r=2$ sulle basi $x_1=o$ e $x_1=a$ danno appunto le (72). Inoltre la (73) e la (74) sono senz'altro soddisfatte in quanto conseguenza delle (1) e (2) rappresentanti la prima equazione cardinale della Meccanica applicata una volta alla porzione C_x e un'altra alla porzione C_y.

La condizione è sufficiente.

Suppongo valide le (72), (73) e (74) e intendo $X^{12}=g$. Sulla sezione Σ_x di contorno λ_x considero, nelle funzioni X^{22} e X^{23}, il problema:

$$(75)\qquad \begin{cases} X^{22}{}_{/2}+X^{23}{}_{/3}=F^2-g_{/1} & (\text{su } \Sigma_x) \\ X^{22}n_2+X^{23}n_3=f^2 & (\text{su } \lambda_x) \\ X^{32}n_2=f^3 & (\text{su } \lambda_x) \end{cases}$$

Analogamente sulla sezione Σ_y di contorno λ_y considero il seguente problema nelle funzioni incognite X^{11} e X^{13}:

$$(76)\qquad \begin{cases} X^{11}{}_{/1}+X^{13}{}_{/3}=F^1-g_{/2} & (\text{su } \Sigma_y) \\ X^{11}n_1+X^{13}n_3=f^1 & (\text{su } \lambda_y) \\ X^{31}n_1=f^3 & (\text{su } \lambda_y) \end{cases}$$

Integrando membro a membro la $(75)_1$ su Σ_x e la $(75)_2$ su λ_x e applicando opportunamente il lemma di Green si ottiene:

$$(77)\qquad \int_{\Sigma_x}(F^2-g_{/1})d\Sigma+\int_{\lambda_x}f^2d\lambda=0.$$

Con analogo procedimento da $(76)_1$ e $(76)_2$ si ottiene:

$$(78)\qquad \int_{\Sigma_y}(F^1-g_{/2})d\Sigma+\int_{\lambda_y}f^1d\lambda=0.$$

Com'è noto le (77) e (78) sono, insieme alle analoghe delle (16) e (17), le uniche condizioni di compatibilità dei problemi (75) e (76) rispettivamente. Esse sono soddisfatte in quanto g soddisfa le (73) e (74). Infatti derivando la (73) rispetto a x, per $(71)_1$ si ha la (77) e derivando la (74) rispetto a y, per $(71)_2$ si ha la (78). Inoltre, come si è detto all'inizio, le analoghe delle (16) e (17) sono soddisfatte per ipotesi.

La (1) per $r=3$ si può scrivere:

$$(79)\qquad X^{33}{}_{/3}=F^3-X^{31}{}_{/1}-X^{32}{}_{/2}.$$

Ritenendo note le funzioni a secondo membro (X^{31} e X^{32} sono soluzioni dei problemi (38) e (39)) la (79) determina la X^{33}. Infatti è:

(80) $$X^{33}=\int_o^{x_3}[F^3-X^{31}/_1-X^{32}/_2]dx'_3+\Phi(x_1\,,\,x_2).$$

Considero ora l'equazione al contorno (2) per $r=3$ che riscrivo:

(81) $$X^{31}n_1+X^{32}n_2+X^{33}n_3=f^3.$$

La (81) sulla faccia $x_3=o$ determina la $\Phi(x_1\,,\,x_2)$. Infatti ivi si ha [per (80)]:

(82) $$X^{33}_{x_3=o}=\Phi(x_1\,,\,x_2)=f^3(x_1\,,\,x_2\,,\,o).$$

La (81) sulle facce $x_1=o$, $x_1=a$ e $x_2=o$, $x_2=b$ non è altri che la $(76)_3$ e $(75)_3$ rispettivamente ed è quindi soddisfatta.

Dimostro ora che per una classe molto vasta di soluzioni dei problemi (75) e (76) la X^{33} definita da (80) soddisfa anche la condizione (81) sulla faccia $x_3=c$; ossia:

(83) $$X^{33}_{x_3=c}=-f^3(x_1\,,\,x_2\,,\,c).$$

Supposta non soddisfatta la (83), definisco sulla faccia $x_3=c$ la quantità ΔX^{33} mediante la:

(84) $$\Delta X^{33}(x_1\,,\,x_2)=f^3(x_1\,,\,x_2\,,\,c)+X^{33}(x_1\,,\,x_2\,,\,c).$$

Pongo:

$$\overline{X}^{rs}=X^{rs}+\Delta X^{rs}.$$

Per (19) e (20) si ha che anche le $\overline{X}^{rs}$ sono soluzioni dei problemi (75), (76) non appena ΔX^{31} e ΔX^{32} soddisfano le condizioni:

(85) $$\begin{cases} \Delta X^{31}(x_1\,,\,x_2\,,\,o)=\Delta X^{31}(x_1\,,\,x_2\,,\,c)=0 \\ \Delta X^{31}(o,\,x_2\,,\,x_3)=\Delta X^{31}(a,\,x_2\,,\,x_3)=0 \\ \displaystyle\int_o^a \Delta X^{31}dx_1=0 \qquad\qquad (o\leqslant x_2\leqslant b;\ o\leqslant x_3\leqslant c) \end{cases}$$

$$(86)\quad \begin{cases} \Delta X^{32}(x_1\,,\ x_2\,,\ o)=\Delta X^{32}(x_1\,,\ x_2\,,\ c)=0 \\ \Delta X^{32}(x_1\,,\ o,\ x_3)=\Delta X^{32}(x_1\,,\ b,\ x_3)=0 \\ \int\limits_o^b \Delta X^{32} dx_2=0 \qquad\qquad (o\leqslant x_1\leqslant a;\ o\leqslant x_3\leqslant c). \end{cases}$$

Dopodichè la $\overline{X}^{33}$ deve costruirsi a partire dalle $\overline{X}^{31}$ e $\overline{X}^{32}$ nel modo analogo a (80) e le ΔX^{11} e ΔX^{22} mediante le:

$$(87)\quad \begin{aligned} \Delta X^{11} &= -\frac{\partial}{\partial x_3}\int\limits_o^{x_1} \Delta X^{31} dx'_1 \\ \Delta X^{22} &= -\frac{\partial}{\partial x_3}\int\limits_o^{x_2} \Delta X^{32} dx'_2\,. \end{aligned}$$

Affinchè le $\overline{X}^{rs}$ soddisfino la (89) occorre che ΔX^{31} e ΔX^{32} soddisfino la:

$$(88)\quad \int\limits_o^c \left[\frac{\partial \Delta X^{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial \Delta X^{32}}{\partial x_2}\right] dx_3=\Delta X^{33}(x_1\,,\ x_2)$$

come si riconosce sostituendo in (83) le X^{rs} con le $\overline{X}^{rs}$ e tenendo poi conto di (80) e (84).

Osservo che è:

$$(89)\quad \int\limits_o^b\int\limits_o^a \Delta X^{33} dx_1 dx_2=0$$

in quanto la X^{33} soddisfa la prima equazione cardinale della Statica estesa a tutto C. Infatti da (1) e (2) con $r=3$ si ha:

$$\int\limits_{\Sigma_C} X^{33} d\Sigma=\int\limits_C F^3 dC+\int\limits_{\overline{\Sigma}_C} f^3 d\Sigma.$$

Pongo:

$$(90)\qquad \begin{aligned}\varphi(x_1) &= \frac{1}{b}\int_o^b \Delta X^{33} dx_2\\ \psi(x_1\,,\ x_2) &= \Delta X^{33} - \varphi(x_1).\end{aligned}$$

Come si è fatto nel caso dei due indici uguali, invece del problema (88), (85) e (86) mi limito a considerare separatamente il problema:

$$(91)\qquad \int_o^c \frac{\partial \Delta X^{31}}{\partial x_1} dx_3 = \varphi(x_1)$$

nella sola funzione incognita ΔX^{31} colle condizioni (85), e il problema analogo:

$$(92)\qquad \int_o^c \frac{\partial \Delta X^{32}}{\partial x^2} dx_3 = \psi(x_1\,,\ x_2)$$

nella sola funzione incognita ΔX^{32} colle condizioni (86).

Cerco, quindi, se esiste una funzione $\Delta X^{31}(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3)$ che soddisfi il problema (91) e (85). (Perfettamente analogo è il problema (92) e (86)).

Considero una funzione $t(x^3)$ definita nell'intervallo $o \leqslant x_3 \leqslant c$ che goda delle seguenti proprietà:

$$(93)\qquad \int_o^c t(x_3) dx_3 = 1 \qquad t(c) = t(o) = 0.$$

Pongo ora:

$$(94)\qquad \Delta X^{31} = t(x_3) \int_o^{x_1} \varphi(x'_1) dx'_1\,.$$

Si verifica facilmente che la (94) per $(90)_1$ e (93) verifica la (91) e le $(85)_{1,2}$. In generale, però, non sarà verificata la $(85)_3$.

Come nel caso dei due indici uguali si dimostra facilmente che condizione necessaria e sufficiente perchè valga anche la $(85)_3$ è la:

$$\int_o^a \int_o^{x_1} \varphi(x'_1) dx'_1 dx'_1 = 0. \tag{95}$$

Analogamente a partire dalle (92) e (86) si ha la condizione di compatibilità:

$$\int_o^b \int_o^{x_2} \psi(x_1\,,\; x'_2) dx'_2 dx_2 = 0. \tag{96}$$

Ricordando che per (90) è:

$$\Delta X^{33} = \varphi(x_1) + \psi(x_1\,,\; x_2) \tag{97}$$

integrando fra o e a ambo i membri di (97) si ha:

$$\int_o^a \Delta X^{33} dx_1 = \int_o^a \psi dx_1\,. \tag{98}$$

Integrando ora ambo i membri di (98) prima fra o e x_2 e dopo fra o e b e tenendo conto di (96), si ottiene la condizione di compatibilità:

$$\int_o^b \left(\int_o^{x_2} \int_o^a \Delta X^{33} dx_1 dx'_2 \right) dx_2 = 0. \tag{99}$$

Analogamente, integro ambo i membri di (97) fra 0 e b. Poi integro fra 0 e x_1 e indi fra 0 e a e tengo conto di (95). Si ottiene la condizione di compatibilità:

$$\int_o^a \left(\int_o^{x_1} \int_o^b \Delta X^{33} dx_2 dx'_1 \right) dx_1 = 0. \tag{100}$$

Se si esprime Δf^3 mediante (84) e si tien conto di (80) e (82) le (99) e (100) diventano:

$$\int_C X^{32} dC = \int_o^a \int_o^b \int_o^{x_2} \left[f^3_{x_3=c} + f^3_{x_3=o} + \int_o^c F^3 dx_3 \right] dx'_2 dx_2 dx_1 + \tag{101}$$

$$+ \int_o^c \int_o^b \int_o^{x_2} [f^3_{x_1=a} + f^3_{x_1=o}] dx'_2 dx_2 dx_3 + b \int_o^a \int_o^c f^3_{x_2=o}\, dx_3 dx_1$$

$$\int_C X^{31} dC = \int_o^b \int_o^a \int_o^{x_1} \left[f^3_{x_3=c} + f^3_{x_3=o} + \int_o^c F^3 dx_3 \right] dx'_1 dx_1 dx_2 + \tag{102}$$

$$+ \int_o^c \int_o^a \int_o^{x_1} [f^3_{x_2=b} + f^3_{x_2=o}] dx'_1 dx_1 dx_3 + a \int_o^b \int_o^c f^3_{x_1=o}\, dx_3 dx_2 \,.$$

Per (12) l'integrale generale della $(75)_1$ si può scrivere:

$$(103) \qquad \begin{aligned} X^{31} &= \int_o^{x_3} (F^1 - X^{12}/2) dx'_3 + \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \\ X^{11} &= - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_3} \end{aligned}$$

e quello della $(76)_1$:

$$(104) \qquad \begin{aligned} X^{23} &= \int_o^{x_3} (F^2 - X^{21}/1) dx'_3 + \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} \\ X^{22} &= - \frac{\partial \chi_2}{\partial x_3} \end{aligned}$$

ove χ_1 e χ_2 devono soddisfare le analoghe delle (13). Ad esempio per χ_1 si ha:

$$(105) \qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right)_{x_3=o} &= f^1(x_1\,,\ y,\ o) \\ \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right)_{x_3=c} &= \int_o^c (X^{12}/2 - F^1) dx_3 - f^1(x_1\,,\ y,\ c) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=o} = f^3(o,\ y,\ x_3) + \int_o^{x_3} (X^{12}/_2 - F^1)_{x_1=o} dx'_3$$

$$\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=a} = -f^3(a,\ y,\ x_3) + \int_o^{x_3} (X^{12}/_2 - F^1)_{x_1=a} dx'_3$$

$$\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_3}\right)_{x_1=o} = -f^1(o,\ y,\ x_3)$$

$$\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_3}\right)_{x_1=a} = f^1(a,\ y,\ x_3).$$

Le (105) comportano una condizione di compatibilità analoga alla (15). Deve infatti essere:

$$\text{(106)} \qquad \int_{\Sigma_y} X^{12}/_2 d\Sigma = \int_o^a [f^1(x_1,\ y,\ o) + f^1(x_1,\ y,\ c)] dx_1 +$$
$$+ \int_o^c [f^1(o,\ y,\ x_3) + f^1(a,\ y,\ x_3)] dx_3 + \int_{\Sigma_y} F^1 d\Sigma.$$

La condizione (106) equivale alla (74). Basta infatti sostituire y con x_2 e integrare ambo i membri fra 0 e y per ottenere la (74). Le condizioni di compatibilità analoghe alle (16) e (17) sono anch'esse da ritenersi soddisfatte. Per esempio la $(16)_1$ dà:

$$\lim_{x_1 \to 0} f^1(x_1,\ y.\ o) = \lim_{x_3 \to 0} f^3(o,\ y,\ x_3).$$

ove la f^1 è calcolata sulla faccia $x_3 = o$ e la f^3 sulla faccia $x_1 = 0$. Un ragionamento analogo è da farsi per la χ_2.

Integrando ora le $(103)_1$ e le $(104)_1$ su tutto C e tenendo conto di (101) e (102) si ottengono le ulteriori condizioni per la χ_1 e la χ_2 rispettivamente. Si ha:

$$\text{(107)} \qquad \int_o^c \int_o^b [\chi_1(a,\ x_2,\ x_3) - \chi_1(o,\ x_2,\ x_3)] dx_2 dx_3 = L_1$$

$$(108)\qquad \int_o^c\int_o^a [\chi_2(x_1\,,\ b,\ x_3)-\chi_2(x_1\,,\ o,\ x_3)]dx_1dx_3=L_2$$

ove L_1 e L_2 sono dati da:

$$(109)\quad L_1=-\int_o^b\int_o^a\int_o^c\int_o^{x_3} F^1dx'_3dx_3dx_1dx_2+\int_o^c\int_o^b\int_o^a\int_o^{x_1} F^3dx'_1dx_1dx_2dx_3-$$

$$-\int_o^a\int_o^c\int_o^{x_3}(f^1_{x_2=b}+f^1_{x_2=o})dx'_3dx_3dx_1+\int_o^c\int_o^a\int_o^{x_1}(f^3_{x_2=b}+f^3_{x_2=o})dx'_1dx_1dx_3+$$

$$+\int_o^b\int_o^a\int_o^{x_1}(f^3_{x_3=c}+f^3_{x_3=o})dx'_1dx_1dx_2+a\int_o^c\int_o^b f^3_{x_1=o}\,dx_2dx_3$$

$$(110)\quad L_2=-\int_o^b\int_o^a\int_o^c\int_o^{x_3} F^2dx'_3dx_3dx_1dx_2+\int_o^c\int_o^a\int_o^b\int_o^{x_2} F^3dx'_2dx_2dx_1dx_3-$$

$$-\int_o^b\int_o^c\int_o^{x_3}(f^2_{x_1=o}+f^2_{x_1=a})dx'_3dx_3dx_2+\int_o^c\int_o^b\int_o^{x_2}(f^3_{x_1=a}+f^3_{x_1=o})dx'_2dx_2dx_3+$$

$$+\int_o^a\int_o^b\int_o^{x_2}(f^3_{x_3=c}+f^3_{x_3=o})dx'_2dx_2dx_1+b\int_o^c\int_o^a f^3_{x_2=o}dx_1dx_3\,.$$

A completamento della dimostrazione basta ora far vedere che è possibile determinare delle funzioni χ_1 e χ_2 soddisfacenti le (107) e (108) rispettivamente. Infatti le caratteristiche X^{31} e X^{32} date da (103) e (104) in corrispondenza a detta scelta delle χ_1 e χ_2, soddisfano le (101) e (102). Ciò vuol dire che è possibile soddisfare le (99) e (100) e quindi risolvere il problema (91) colle condizioni (85) e l'analogo (92) colle (86). Si è già visto come le soluzioni di questi problemi siano contenute nella classe delle soluzioni del problema (88) colle condizioni (85) e (86). Ricordo che, per (105), la χ_1 sulle facce $x_1=o$ e $x_1=a$ è data da:

$$
(111) \qquad
\begin{aligned}
\chi_1(o,\, x_2\,,\, x_3) &= -\int_o^{x_3} f^1(o,\, x_2\,,\, x_3)dx'_3 - M_1(x_2)\\
\chi_1(a,\, x_2\,,\, x_3) &= \int_o^{x_3} f^1(a,\, x_2\,,\, x'_3)dx'_3 + N_1(x_2)
\end{aligned}
$$

ove M_1 e N_1 sono funzioni arbitrarie della sola x_2.

Analogamente ricordo che sulle facce $x_2=o$ e $x_2=b$ la χ_2 è data da:

$$
(112) \qquad
\begin{aligned}
\chi_2(x_1\,,\, o,\, x_3) &= -\int_o^{x_3} f^2(x_1\,,\, o,\, x'_3)dx'_3 - M_2(x_1)\\
\chi_2(x_1\,,\, b,\, x_3) &= \int_o^{x_3} f^2(x_1\,,\, b,\, x'_3)dx'_3 + N_2(x_1)
\end{aligned}
$$

con M_2 e N_2 funzioni arbitrarie della sola x_1.

Le condizioni di compatibilità (107) e (108) per (111) e (112) diventano rispettivamente:

$$
(113) \qquad c\int_o^b (M_1+N_1)dx_2 = L_1 - \int_o^b\int_o^c\int_o^{x_3} (f^1_{x_1=a} + f^1_{x_1=o})dx'_3dx_3dx_2
$$

$$
(114) \qquad c\int_o^a (M_2+N_2)dx_1 = L_2 - \int_o^a\int_o^c\int_o^{x_3} (f^2_{x_2=b} + f^2_{x_2=o})dx'_3dx_3dx_1
$$

ove L_1 e L_2 sono dati da (109) e (110) rispettivamente. Data l'arbitrarietà delle funzioni M_1, M_2, N_1 e N_2 è sempre possibile soddisfare le (113) e (114).

Allora le caratteristiche di tensione X^{31} e X^{32} date da (103) e (104) conle χ_1 e χ_2 soddisfacenti (107) e (108) soddisfano le (101) e (102) rispettivamente. È quindi possibile determinare le ΔX^{31} e ΔX^{32} in modo che la $\overline{X}^{33}$ soddisfi anche la condizione (83), ossia che le $\overline{X}^{rs}$ costituiscano una soluzione del problema (1) e (2) c. d. d.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 dicembre 1971.