SAURO TULIPANI

Proprietà metamatematiche di alcune classi di algebre

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 177-186

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__177_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

PROPRIETÀ METAMATEMATICHE DI ALCUNE CLASSI DI ALGEBRE

SAURO TULIPANI *)

Premessa.

In una precedente nota ho dimostrato che se W è un'algebra funzionalmente completa [1]) allora $MdTh(W)=\Sigma$, dove Σ è la classe delle algebre semplici appartenenti alla varietà generata da W (confronta [8]).

Nella prima parte di questo lavoro cerco di vedere se vale lo stesso risultato o qualcosa di analogo quando W è un'algebra semifiltrale (condizione alquanto meno restrittiva); anzi in un primo momento faccio solo l'ipotesi più generale che W sia un'algebra semideale.

Nella seconda parte dò una condizione necessaria sufficiente perchè Σ, classe delle algebre semplici di una varietà, sia assiomatica; di qui derivano corollari per varietà generate da classi filtrali (filtrabili). Anzi viene un risultato più forte e cioè: se V è una varietà filtrabile allora $\Sigma=Md(J\cup\{\sigma\})$, con σ enunciato positivo e universale e J insieme delle leggi di V.

I concetti di algebra filtrale, classe filtrale, semifiltrale, ideale, semideale sono stati introdotti e sviluppati da R. Magari in alcuni lavori (vedi [6] e sua bibliografia) di cui in parte conservo le notazioni.

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico « U. Dini » - Viale Morgagni, 67-A - 50134 Firenze.

Lavoro eseguito nell'ambito del Comitato dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

1) Nel senso di R. MAGARI vedi [5].

1. Lemmi ausiliari.

LEMMA 1. *Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra, I un insieme e F un filtro su I, con I non vuoto e F non degenere, allora esiste un morfismo d'ordine h tra il reticolo delle congruenze $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ e $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}^I/F)$ tale che, se $\rho\in\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$, $h(\rho)$ è estensione di ρ (considerata come congruenza di $d(\mathfrak{A})$, se d è l'immersione canonica $\mathfrak{A} \overset{d}{\rightarrowtail} \mathfrak{A}^I/F$); cioè in altri termini si ha il seguente diagramma commutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, tail, "d"] \arrow[d, "\mathrm{nat}\,\rho"] & \mathfrak{A}^I/F \arrow[d, "\mathrm{nat}\,h(\rho)"] \\
\mathfrak{A}/\rho \arrow[r, tail, "e"] & (\mathfrak{A}^I/F)/h(\rho)
\end{tikzcd}$$

DIM. Sia ρ^* la relazione su $\mathfrak{A}^I/F$ così definita:

$$x\equiv y(\rho^*) \Leftrightarrow \{i \mid x(i)\equiv y(i)(\rho)\}\in F$$

ρ^* è una congruenza e la corrispondenza $\rho \mapsto \rho^*$ è il monomorfismo d'ordine richiesto.

LEMMA 2. *Sia $\mathfrak{A}$ un'algebra, $\mathfrak{A}_\omega$ un limite ridotto (cioè un limite diretto di una catena numerabile di potenze ridotte di $\mathfrak{A}$) allora esiste un monomorfismo d'ordine tra $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ e $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}_\omega)$.*

DIM. Sia $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}$ ... $\mathfrak{A}_{i+1}=\mathfrak{A}^{I_i}/F_i$ ... (con F_i filtro su I_i) inoltre $h_n{}^p=h_{p-1}\circ h_{p-2}\circ\ldots\circ h_n$, $d_n{}^p=d_{p-1}\circ d_{p-2}\circ\ldots\circ d_n$, $n>p$. Sia $\rho\in\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ e si ponga $\rho^i=h_0{}^i(\rho)$ in virtù del lemma precedente si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_0 \arrow[r, tail] \arrow[d, "\mathrm{nat}\,\rho"] & \mathfrak{A}_1 \arrow[r, tail] \arrow[d, "\mathrm{nat}\,\rho^1"] & \ldots\ldots\ \mathfrak{A}_i \arrow[r, tail] \arrow[d, "\mathrm{nat}\,\rho^i"] & \mathfrak{A}_{i+1} \arrow[r, tail] \arrow[d, "\mathrm{nat}\,\rho^{i+1}"] & \ldots \\
\mathfrak{A}_0/\rho \arrow[r, tail] & \mathfrak{A}_1/\rho^1 \arrow[r, tail] & \ldots\ldots\ \mathfrak{A}_i/\rho^i \arrow[r, tail] & \mathfrak{A}_{i+1}/\rho^{i+1} \arrow[r, tail] & \ldots
\end{tikzcd}$$

(notare che $\rho^{i+1}=h_0{}^i(\rho)=h_i(h_0{}^i(\rho))=h_i(\rho^i)$).

Se $\mathfrak{B}_\omega=\varinjlim \mathfrak{A}_k/\rho^k$ per motivi categoriali esiste uno e un solo epimorfismo φ da $\mathcal{A}_\omega = \varinjlim \mathcal{A}_k$ su $\mathcal{B}_\omega$ che rende commutativi il diagramma precedente; sia $\rho^* = \operatorname{Ker} \varphi$, allora la corrispondenza τ tra $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}(\mathcal{A}_\omega)$ definita da $\rho \overset{\tau}{\mapsto} \rho^*$ è un monomorfismo d'ordine; se infatti esistono $x, y \in \mathcal{A}$ tali che $x \equiv y(\rho_1)$ e $x \not\equiv y(\rho_2)$ allora se $\mathcal{A}_\omega \overset{\varphi_1}{\twoheadrightarrow} \mathcal{B}_\omega{}^1$, $\mathcal{A}_\omega \overset{\varphi_2}{\twoheadrightarrow} \mathcal{B}_\omega{}^2$, con $\mathcal{B}_\omega{}^1 = \varinjlim \mathcal{A}_k/\rho_1{}^k$, $\mathcal{B}_\omega{}^2 = \varinjlim \mathcal{A}_k/\rho_2{}^k$ e $[x]$, $[y]$ sono le immagini di x, y in $\mathcal{A}_\omega$ si ha $[x] \equiv [y](\operatorname{Ker} \varphi_1)$ e $[x] \not\equiv [y](\operatorname{Ker} \varphi_2)$; inoltre $\rho_1 \leq \rho_2 \Leftrightarrow \rho^*_1 \leq \rho^*_2$ sempre per motivi categoriali; infatti si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_0 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dd] & \mathcal{A}_1 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dd] & \cdots & \mathcal{A}_i \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dd] & \cdots & \cdots \mathcal{A}_\omega \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \mathcal{A}_0/\rho_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[dl] & & \mathcal{A}_0/\rho_1{}^1 \arrow[r, dashed] \arrow[dl] & \cdots\ \mathcal{A}_i/\rho_1{}^i \arrow[rr, dashed] \arrow[dl] & & \cdots\ \mathcal{B}_\omega{}^1 \arrow[dl] \\
\mathcal{A}_0/\rho_2 \arrow[r] & \mathcal{A}_0/\rho_2{}^1 \arrow[r] & \cdots & \mathcal{A}_i/\rho_2{}^i \arrow[r] & \cdots & \cdots\ \mathcal{B}_\omega{}^2 &
\end{tikzcd}$$

Osservazione 1. I lemmi 1 e 2 si possono dimostrare per altra via in modo meno diretto. Si pensi $\mathcal{A}$ come una struttura relazionale $\mathcal{A}^* = \langle \mathcal{A}, R_{\xi, \xi<\alpha} \rangle$ in cui $\mathcal{A}$ sia la medesima struttura algebrica e $\{R_\xi\}_{\xi<\alpha}$ sia la famiglia delle relazioni di congruenza su $\mathcal{A}$. Sia $\mathcal{L}$ il linguaggio adeguato per tale struttura; se F è un filtro su I si ha $\mathcal{A}^{*I}/F = \langle \mathcal{A}^I/F, \overline{R}_\xi \rangle$, $\mathcal{A}^*_\omega = \langle \mathcal{A}_\omega, \overline{R}_\xi \rangle$. Siccome, per ogni R_ξ, si può scrivere nel linguaggio $\mathcal{L}$ che essa è una congruenza di $\mathcal{A}$, con formule di Horn universali (le quali si conservano per potenze ridotte e per limiti ridotti), allora anche $\overline{R}_\xi$ è una congruenza; inoltre la corrispondenza $R_\xi \mapsto \overline{R}_\xi$ è biunivoca e conserva l'ordine perchè si può esprimere che $R_1 \neq R_2$ e $R_1 \leq R_2$ con gli enunciati:

$$\exists x \exists y [R_1(x, y) \wedge \neg R_2(x, y)], \quad \forall x \forall y [R_1(x, y) \rightarrow R_2(x, y)].$$

Tali enunciati sono tra quelli che si conservano sia per potenze ridotte (perchè di Horn) sia per limiti diretti (vedi caratterizzazione di Keysler in [12]); allora la corrispondenza $R_\xi \mapsto \overline{R}_\xi$ è un monomorfismo d'ordine tra il reticolo $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}(\mathcal{A}^I/F)$ e $\mathcal{C}(\mathcal{A}_\omega)$ rispettivamente.

2. Algebre semiideali: un risultato su $MdTh(W)$ con W semiideale.

LEMMA 3. *Se W è un'algebra semiideale allora esiste una iniezione da $\mathcal{C}(W^I/F)$ in $J(L^I/F)$, dove W^I/F è una potenza ridotta di W, $L=\mathcal{C}(W)$ e $J(L^I/F)$ è il reticolo degli ideali del reticolo L^I/F.*

DIM.

$$\mathcal{C}(W^I/F) \simeq Q = \{\vartheta \mid \vartheta \in \mathcal{C}(W^I),\ \vartheta \geq \rho_F\}$$

(per un noto risultato di algebra universale).

Sia $\vartheta \in Q$ allora $\vartheta \in \mathcal{C}(W^I)$ quindi esiste almeno un ideale cui essa è associata e sia J_ϑ uno di questi e $[J_\vartheta]$ l'immagine omomorfa di J_ϑ sotto l'omomorfismo naturale di L^I su L^I/F; si ponga la seguente applicazione da Q in $J(L^I/F)$:

$$\lambda(\vartheta) = [J_\vartheta].$$

Se $[J_{\vartheta_1}] = [J_{\vartheta_2}]$ vediamo che $\vartheta_1 = \vartheta_2$; sia $x \equiv y(\vartheta_1)$ segue

$$\Delta(x, y) \in J_{\vartheta_1} \Rightarrow [\Delta(x, y)] \in [J_{\vartheta_1}],\ [\Delta(x, y)] \in [J_{\vartheta_2}]$$

ossia esiste $\varphi \in J_{\vartheta_2}$ con $[\varphi] = [\Delta(x, y)]$ e cioè

$$Z = \{i \mid \varphi(i) = \Delta(x, y)(i)\} \in F;$$

sia allora y_1 così definito:

$$y_1 \in W^I \qquad y_1(i) = \begin{cases} y(i) & \text{se } i \in Z \\ x(i) & \text{se } i \notin Z \end{cases}$$

da cui segue $\Delta(x, y_1)(i) \leq \varphi(i)$ cioè $\Delta(x, y_1) \leq \varphi$ e poichè $\varphi \in J_{\vartheta_2}$ segue $\Delta(x, y_1) \in J_{\vartheta_2}$ cioè $x \equiv y_1(\vartheta_2)$, ma $y_1 \equiv y(\rho_F)$ da cui $y_1 \equiv y(\vartheta_2)$ e $x \equiv y(\vartheta_2)$, cioè $\vartheta_1 \leq \vartheta_2$ e per simmetria $\vartheta_2 \leq \vartheta_1$ da cui $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

TEOREMA 1. *Sia W un'algebra semiideale tale che $\mathcal{C}(W) = L$ sia finito, allora esiste un isomorfismo tra il reticolo $\mathcal{C}(W)$ e $\mathcal{C}(W^I/F)$, con F ultrafiltro su I.*

Il lemma 1 assicura che esiste un monomorfismo d'ordine h tra $\mathcal{C}(W)$ e $\mathcal{C}(W^I/F)$, siccome per il lemma 3

$$|\mathcal{C}(W^I/F)|\leq|J(L^I/F)|=|J(L)|=|L|$$

tale monomorfismo deve essere suriettivo, ma un monomorfismo d'ordine suriettivo è un isomorfismo reticolare.

TEOREMA 2. *Se W è un'algebra semiideale, W_ω un suo limite ridotto, allora se $\mathcal{C}(W)$ è finito segue $\mathcal{C}(W)\simeq\mathcal{C}(W_\omega)$.*

Basta verificare che l'applicazione τ definita nel lemma 2 tra $\mathcal{C}(W)$ e $\mathcal{C}(W_\omega)$ è *suriettiva*; sia allora $\vartheta\in\mathcal{C}(W_\omega)$ e sia ϑ_i la congruenza di W_i definita da: se x_i, $y_i\in W_i$

$$x_i\equiv y_i(\vartheta_i)\Leftrightarrow[x_i]\equiv[y_i](\vartheta);$$

$h_i:\mathcal{C}(W_i)\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow\mathcal{C}(W_{i+1})$ è un isomorfismo per le ipotesi del teorema e se $\rho_i\in\mathcal{C}(W_i)$ $h_i\rho_i\in\mathcal{C}(W_{i+1})$ ed è estensione di $d_i\rho_i$ (immagine di ρ_i su $d_i(W_i)$); sia ρ_i tale che $h_i(\rho_i)=\vartheta_{i+1}$ e siccome $\vartheta_{i+1}\restriction d_i(W_i)=\vartheta_i$ ne segue $\vartheta_i=\rho_i$ e cioè $h_i(\vartheta_i)=\vartheta_{i+1}$, inoltre $h_0^i\vartheta_0=\vartheta_i$, per induzione: per $i=0$ è banale e

$$h_0^{i+1}\vartheta_0=h_i(h_0^i\vartheta_0)=h_i\vartheta_i=\vartheta_{i+1}\,.$$

Vediamo allora che $\tau\vartheta_0=\vartheta$ infatti

$$[x_n]\equiv[y_n](\vartheta)\Leftrightarrow x_n\equiv y_n(\vartheta_n)\Leftrightarrow x_n\equiv y_n(h_0^n\vartheta_0)\Leftrightarrow[x_n]\equiv[y_n]\ \ (\tau\vartheta_0).$$

OSSERVAZIONE 2. Nei teoremi 1 e 2 è necessario supporre $L=\mathcal{C}(W)$ finito. Basta infatti trovare un controesempio di 1.

Sia W l'algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme infinito (quindi $\mathcal{C}(W)$ è infinito), W è ideale (vedi risultati di [11]), ma W^W/F con F ultrafiltro uniforme su W ha cardinalità maggiore di W e quindi non può essere $\mathcal{C}(W)\simeq\mathcal{C}(W^W/F)$.

Sia $\Gamma=\{\mathcal{A}\mid\mathcal{A}\in\mathrm{var}\,(W)$ e $\mathcal{C}(\mathcal{A})\overset{h}{\rightarrowtail}\mathcal{C}(W)$, con h monomorfismo d'ordine$\}$.

TEOREMA 3. *Se W è semiideale e $\mathcal{C}(W)$ è finito allora*:

$$MdTh(W)\subseteq\Gamma.$$

Infatti se $\mathcal{A}\in MdTh(W)$ segue $\mathcal{A}\equiv W$ e quindi esistono (per un noto teorema sugli ultralimiti) W_ω e $\mathcal{A}_\omega$ ultralimiti isomorfi. Per il teorema 2 $\mathcal{C}(W)\simeq\mathcal{C}(W_\omega)$ e per il lemma 2 esiste un monomorfismo d'ordine h:

$\mathcal{C}(\mathfrak{A}) \rightarrowtail \mathcal{C}(\mathfrak{A}_\omega)$. Siccome poi $\mathcal{C}(W_\omega) \simeq \mathcal{C}(\mathfrak{A}_\omega)$ esiste in definitiva un monomorfismo d'ordine tra $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ e $\mathcal{C}(W)$ e inoltre $\mathfrak{A} \in \mathrm{var}\,(W)$.

COROLLARIO 1. *Se W è un'algebra semifiltrale allora $MdTh(W) \subseteq \Sigma$ dove Σ è la classe delle algebre semplici di* var (W).

OSSERVAZIONE 3. Potrebbe sorgere il dubbio che nel teorema 3 in generale dovesse valere $MdTh(W) = \Gamma$, ma questo non succede come mostra il seguente controesempio, cioè non vale sempre $MdTh(W) \supseteq \Gamma_1$ dove $\Gamma_1 = \{\mathfrak{A} \in \mathrm{var}\,(W)\ \ \mathcal{C}(\mathfrak{A}) \simeq \mathcal{C}(W)\}$. Sia infatti $\mathfrak{W} = \langle W, \cup, \cap, ', r \rangle$ un'algebra di Boole con più di due elementi e r un'operazione definita da:

$$r(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \neq y \\ 1 \text{ se } x = y \end{cases}$$

$\mathfrak{W}$ è filtrale, quindi semifiltrale e semiideale, inoltre Γ_1 sopra definito coincide con Σ; ma $\langle \{0, 1\}, \cup, \cap, ', r \rangle \in \Gamma_1$ perchè appartiene a var (W) ed è semplice, ma non è modello di $Th(W)$.

OSSERVAZIONE 4. Il risultato del teorema 3 non vale se si toglie la condizione che W sia semiideale. Esistono infatti gruppi semplici elementarmente equivalenti a gruppi non semplici: sia allora $W \equiv G$, con W semplice e G no, ne segue $G \in MdTh(W)$, ma $G \notin \Sigma$. Tale esempio mostra anche come non sempre valga $\mathcal{C}(W) \simeq \mathcal{C}(W_\omega)$ perchè altrimenti con lo stesso ragionamento del teorema 3 si avrebbe $\mathcal{C}(G) \rightarrowtail \mathcal{C}(W)$ e cioè G sarebbe semplice.

OSSERVAZIONE 5. La dimostrazione del teorema 2.2 può essere semplificata usando l'ipotesi del continuo [1]) e cioè sfruttando il teorema di Keisler il quale afferma che $W \equiv \mathfrak{A}$ se e solo se $W^I/F \equiv \mathfrak{A}^J/G$, con I e J opportuni insiemi e F e G ultrafiltri: allora per il teorema 2 e il lemma 2 avremo il seguente diagramma che porta al risultato:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(W) \arrow[r, tail, two heads, "\sim"] & \mathcal{C}(W^I/F) \arrow[d, tail, "\wr"] \\ \mathcal{C}(\mathfrak{A}) \arrow[r, tail] & \mathcal{C}(\mathfrak{A}^J/G) \end{tikzcd} .$$

[1]) La dimostrazione può essere davvero semplificata perchè ultimamente S. SHELAH ha dimostrato che il teorema di KEISLER si può dimostrare anche senza ipotesi del continuo.

3. Assiomatizzabilità della semplicità in varietà generate da algebre semifiltrali, semiideali.

Il risultato del corollario 1 si otterrebbe facilmente se la semplicità fosse esprimibile nel linguaggio adeguato, come nel caso delle W-algebre ad esempio. Ciò induce a pensare che, nel caso che W sia semifiltrale o, con ipotesi più forte, filtrale, sia vero che Σ sia una classe assiomatica. Cercheremo di stabilire alcuni risultati, a tal proposito, supponendo più in generale che Σ sia la classe delle algebre semplici di una varietà generata da una classe semiideale per passare a risultati più forti nel caso che la varietà in questione sia generata da un'algebra ideale, semifiltrale o filtrale.

TEOREMA 4. *Sia V una varietà di tipo τ e Σ la classe delle algebre semplici di V; allora condizione necessaria e sufficiente perchè Σ sia assomatica è che in un prodotto diretto di elementi di Σ un filtro massimale sull'insieme degli indici dia luogo ad una congruenza massimale.*

Sfruttiamo la caratterizzazione algebrica delle classi assiomatiche e cioè il seguente: se Σ è una sottoclasse della classe di modelli di tipo τ, cioè $\Sigma \subseteq M_\tau$, Σ è assiomatica se e solo se è chiusa sotto ultralimiti e ultraprodotti e $M_\tau - \Sigma$ è chiusa sotto ultralimiti. La condizione del teorema 2 è allora manifestamente necessaria; infatti sia $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$, $\mathfrak{A}_i \in \Sigma$ allora se Σ è assiomatica $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$ è semplice, dovendo appartenere a Σ, quindi F individua una congruenza massimale su $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$.

Viceversa; sia $\mathfrak{A} \in M_\tau - \Sigma$ e supponiamo per assurdo che $\mathfrak{A}_\omega$ sia un ultralimite di $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}_\omega \in \Sigma$; siccome $\mathfrak{A} \overset{h}{\rightarrowtail} \mathfrak{A}_\omega$ con h monomorfismo allora $\mathfrak{A} \in V$ e siccome $\mathfrak{A} \in M_\tau - \Sigma$ segue $\mathfrak{A}$ non è semplice; ma siccome $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}) \rightarrowtail \mathfrak{C}(\mathfrak{A}_\omega)$ per il lemma 2, seguirebbe che $\mathfrak{A}_\omega$ non è semplice, che è assurdo. Se $\mathfrak{A} \in \Sigma$, $\mathfrak{A}^I/F$ (con F ultrafiltro su I) è semplice per l'ipotesi del teorema e allora anche $\mathfrak{A}_\omega$ lo è, infatti ciò si dimostra con la stessa tecnica del teorema 2; cioè anche Σ è chiusa sotto gli ultralimiti. Infine è verificata anche la terza condizione; sia $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$, $\mathfrak{A}_i \in \Sigma$ e F è un ultrafiltro su I allora $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \in V$ e inoltre per l'ipotesi del teorema è semplice, quindi $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \in \Sigma$.

COROLLARIO 2. *La classe delle algebre semplici di una varietà generata da una classe K filtrale e quella delle algebre semplici di una varietà ideale sono assiomatiche.*

Si vede facilmente che, in tutti i casi menzionati nel corollario, Σ è semifiltrale[2]) e allora dal teorema 4 discende la verità dell'enunciato.

Si osserva che da qui discende il fatto noto: se V è la varietà degli anelli commutativi con unità, siccome V è semiideale, $\Sigma \subseteq V$ è assiomatica, infatti Σ è la classe di tutti i campi.

TEOREMA 5. *Sia M_τ la classe delle algebre di tipo τ e sia $V \subseteq M_\tau$, $\Sigma \subseteq V$ con:*

1) *V, Σ assiomatiche, $V = Md(J)$.*

2) *$V - \Sigma$ chiusa sotto gli ultraprodotti.*

3) a) $\boldsymbol{HS}(\Sigma) = \Sigma$ [3])
b) $\boldsymbol{H}(\Sigma) = \Sigma$
c) $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\,(\Sigma) = \Sigma$

allora si ha $\Sigma = Md(J \cup \{\sigma\})$, con σ enunciato positivo e universale, oppure σ enunciato positivo, oppure σ enunciato della forma $\forall x_1 \,..\, \forall x_n \, \exists y_1 \,..\, \exists y_n [\bigwedge_{i=1}^{r} \bigvee_{j=1}^{s} (\alpha_{ij} \rightarrow \beta_{ij})]$ con α_{ij}, β_{ij} atomiche, a seconda che valga rispettivamente la 3)-a), *la* 3)-b) *o la* 3)-c).

DIM. Siccome Σ è assiomatica per noti teoremi sulla conservazione delle formule che sfruttano le ipotesi 3) si ha:

$$\Sigma = Md[Th(\Sigma) \cap \Omega]$$

dove Ω è:

a$_1$) l'insieme degli enunciati equivalenti a enunciati positivi e universali;

b$_1$) l'insieme degli enunciati equivalenti a enunciati positivi;

---

2) Discende dai risultati di G. M. BERGMAN in [2].

3) $\boldsymbol{H}(X)$ è la classe delle immagini omomorfe di elementi di X,
$\boldsymbol{S}(X)$ la classe delle sottoalgebre di elementi di X,
$\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\,(X)$ la classe dei limiti diretti di elementi di X.

c_1) l'insieme degli enunciati equivalenti a quelli del tipo $\forall .. \exists .. [\bigvee_i \bigwedge_j (\alpha_{ij} \rightarrow \beta_{ij})]$ con α_{ij}, β_{ij} atomiche;

e Ω è tale a seconda che siamo nell'ipotesi a), nella b) o nell'ipotesi c). Sia allora $I = Th(\Sigma) \cap \Omega$.

Si ha:

$Md(J \cup I) = Md(J) \cap Md(I) = V \cap \Sigma$; $J \cup I \supseteq J \cup \{i\}$ per ogni $i \in I$ da cui $Md(J \cup I \subseteq Md(J \cup \{i\})$ per ogni $i \in I$. Se ci fosse un i tale che $\Sigma = Md(J \cup I) = Md(J \cup \{i\})$ il teorema sarebbe già dimostrato. Supponiamo dunque per assurdo che per ogni i $\Sigma \subsetneq Md(J \cup \{i\})$ allora esiste almeno un $\mathfrak{A}_i$ con $\mathfrak{A}_i \in Md(J \cup \{i\})$, $\mathfrak{A}_i \notin \Sigma$ cioè $\mathfrak{A}_i \in V - \Sigma$ e $\mathfrak{A}_i \models i$.

Sia $H_j = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models j\}$, $H_{j_1} \cap H_{j_2} = H_{j_1 \wedge j_2}$ e $j_1 \wedge j_2 \in I$; cioè $\{H_j\}_{j \in I}$ ha la proprietà dell'interazione finita, quindi esiste un ultrafiltro che contiene la famiglia $\{H_j\}_{j \in I}$ e sia F. Si consideri ora $\mathfrak{A} = \Pi\, \mathfrak{A}_i / F$, se $j \in I$ $H_j = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models j\} \in F$ dunque $\mathfrak{A} \models j$ per ogni $j \in I$ cioè $\mathfrak{A} \in Md(I) = \Sigma$ e cioè $V - \Sigma$ non sarebbe chiusa sotto gli ultraprodotti contro l'ipotesi.

Osservazione 6. Le ipotesi 2, 3-b), 3-c) del teorema precedente, quando M_τ sia la classe di algebre di tipo τ e V sia una varietà contenuta in M_τ e Σ la sottoclasse delle algebre semplici di V, sono sempre verificate; quindi o Σ non è assiomatica (come è il caso ad esempio quando Σ è la classe dei gruppi semplici) oppure $\Sigma = Md(J \cup \{\sigma\})$ con σ della forma b_1) o c_1), cioè di quegli enunciati che si conservano per immagini omomorfe (positivi) o quelli che si conservano per limiti diretti rispettivamente.

Corollario 3. *Sia V una varietà con Σ semifiltrale e tale che ogni algebra $\mathfrak{A} \in \Sigma$ abbia tutte le sue sottoalgebre semplici, allora $\Sigma = Md(J \cup \{\sigma\})$, con σ enunciato positivo e universale, J leggi di V.*

Corollario 4. *Sia V una varietà con Σ semifiltrale*[4]*, allora $\Sigma = Md(J \cup \{\sigma\})$, con σ enunciato positivo, J leggi di V.*

Corollario 5. *Se K è una classe filtrale $V = \mathrm{var}(K)$, allora $\Sigma = Md(J \cup \{\sigma\})$, con σ enunciato positivo e universale (vedi risultati di* [2]).

---

[4]) I risultati dei corollari 3 e 4 si ricavano anche dai risultati di G. M. Bergman in [2], dove l'autore dà una caratterizzazione delle classi filtrali e semifiltrali.

COROLARIO 6. *Sia K una classe ideale e superprincipale allora* $\Sigma = Md(J \cup \{\sigma\})$, *con* σ *enunciato positivo e universale.*

In tali ipotesi infatti, per dei risultati ottenuti da R. Magari in un lavoro di prossima pubblicazione sugli « Annali dell'Università di Ferrara », gentilmente comunicatimi da lui medesimo, si ha che Σ è una classe filtrale.

COROLLARIO 7. *Sia V una varietà con* Σ *semifiltrale allora* $\Sigma = Md(J \cup \{\sigma\})$, *con* σ *enunciato della forma* $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m [\bigvee_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=1}^{s} (\alpha_{ij} \to \beta_{ij})]$ *con* α_{ij}, β_{ij} *atomiche.*

COROLLARIO 8. *La classe dei campi (algebre semplici della varietà degli anelli commutativi con unità) si trova nelle condizioni dei corollari* 4 *e* 7.

BIBLIOGRAFIA

(limitata ai lavori direttamente citati)

[1] BELL-SLOMSON: *Models and Ultraproducts*, Amsterdam, 1969.

[2] BERGMAN, G. M.: *Sulle classi filtrali di algebre*, in corso di pubblicazione sugli Annali Un. Ferrara.

[3] GRÄTZER, G.: Universals Algebra, New York, 1969.

[4] MAGARI, R.: *Su una classe equazionale di algebre*, Ann. Mat. pura e appl., Serie IV, Tomo LXV, pp. 277-311 (1967).

[5] MAGARI, R.: *Sulla varietà generata da una algebra funzionalmente completa di cardinalità infinita*, Ann. Mat. pura e appl., Serie IV, Tomo LXXVI, pp. 305-324 (1967).

[6] MAGARI, R.: *Classi metaideali di algebre simili (congruenze ideali III)*, Ann. Un. Ferrara (nuova serie), Sez. VII, Vol. XV, n. 8, pp. 131-143 (1970).

[7] KEISLER, H. S.: *Theory of models with generalized atomic formulas*, J. Symbolic Logic, 25 (1960), pp. 1-26.

[8] TULIPANI, S.: *Sulla completezza e sulla categoricità della teoria delle W-algebre semplici*, in corso di pubblicazione sugli Annali Un. Ferrara.

Per una bibliografia più ampia e completa si veda quella di [6].

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 dicembre 1971.