RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIONIGI GALLETTO

Precisazioni su « Contributo allo studio dei sistemi continui a trasformazioni reversibili con caratteristiche di tensione asimmetriche »

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 171-176

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__171_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

PRECISAZIONI SU « CONTRIBUTO ALLO STUDIO DEI SISTEMI CONTINUI A TRASFORMAZIONI REVERSIBILI CON CARATTERISTICHE DI TENSIONE ASIMMETRICHE »

DIONIGI GALLETTO *)

Nella recensione di [1] apparsa tempo fa in [3] si afferma che in detto lavoro, « per le diverse variabili da cui si fa dipendere l'energia libera, vengono usate denominazioni e notazioni tensoriali, ma che la loro natura tensoriale è limitata all'uso di particolari coordinate ». Tale affermazione viene fondata sull'osservazione che, « quando le coordinate cartesiane della configurazione non deformata si interpretano come coordinate curvilinee della configurazione attuale, le variabili in questione assumono una forma non tensoriale: esse risultano dalla composizione di tensori ordinari con simboli di Christoffel che, come è noto, non sono tensori ».

Per provare l'infondatezza dell'obiezione sopra riportata, vengono qua dedotte, in coordinate generali, le espressioni degli enti più significativi considerati in [1], mettendone in evidenza il carattere tensoriale; in particolare vengono dedotte quelle espressioni che, scritte in coordinate cartesiane, hanno tratto in inganno il recensore. Esse costituiscono un controesempio per l'affermazione che la composizione di tensori ordinari con simboli di Christoffel non dà mai luogo a tensori.

1. Sia C la configurazione di riferimento di un sistema continuo tridiminensionale e C' la sua configurazione attuale. Supposto inizialmente lo spazio riferito a un sistema di coordinate cartesiane trirettangole (coordinate che verranno indicate rispettivamente con x^{α} o con $x^{\alpha'}$ a seconda che si riferiscano a punti di C o di C'), per il lavoro speci-

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Fisica Matematica dell'Università, Torino.

fico delle forze interne di contatto relativo a C, nell'ipotesi che siano presenti coppie di contatto, sussiste l'espressione [1])

$$\delta l^{(i)} = (T^{(\alpha\beta)} + \omega'^{\alpha\beta\gamma}{}_{\delta} L'^{\delta}_{\gamma})\delta e_{\alpha\beta} + L'^{\beta}_{\alpha}\delta\mu'^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{1.1}$$

con $T^{(\alpha\beta)}$ parte simmetrica del tensore lagrangiano degli sforzi, L'^{β}_{α} tensore lagrangiano dei momenti, $e_{\alpha\beta}$ tensore di deformazione e

$$\mu'^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma\delta} x^{\alpha'}_{\beta\gamma} x^{\alpha'}_{\delta}, \tag{1.2}$$

$$\omega'^{\alpha\beta\gamma}{}_{\delta} = \frac{1}{2}(\eta^{\gamma\mu\alpha} x^{\beta}_{\alpha'} + \eta^{\gamma\mu\beta} x^{\alpha}_{\alpha'}) x^{\alpha'}_{\mu\delta} \equiv \frac{1}{2}\eta^{\gamma\mu(\alpha} x^{\beta)}_{\alpha'} x^{\alpha'}_{\mu\delta}, \tag{1.3}$$

con $\eta^{\alpha\beta\gamma}$ tensore di Ricci e

$$x^{\alpha'}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}, \qquad x^{\alpha}_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}, \qquad x^{\alpha'}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}.$$

Posto

$$g'_{\alpha\beta} = x^{\alpha'}_{\alpha} x^{\alpha'}_{\beta}$$

e ricordando che risulta

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g'_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}), \tag{1.4}$$

da (1.2) seguono subito le relazioni, già stabilite al n. 2 di [1],

$$\mu'^{\alpha}{}_{\beta} = \eta^{\alpha\gamma\delta}\partial_{\gamma} e_{\delta\beta}, \tag{1.5}$$

dove è da intendersi

$$\partial_{\gamma} e_{\delta\beta} = \frac{\partial e_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}}.$$

---

1) Cfr. [1], 2.

2. Si supponga ora lo spazio riferito a un arbitrario sistema di coordinate, coordinate che verranno indicate rispettivamente con x^i o con $x^{i'}$ a seconda che si riferiscano a punti di C o di C'.

Stante l'invarianza di C, e quindi delle coordiante x^i, rispetto a variazioni di C', l'espressione di $\delta l^{(i)}$, corrispondente, in tale sistema di coordinate, alla (1.1), è data da

$$\delta l^{(i)} = (T^{(ij)} + \omega'^{ijh}{}_k L'_h{}^k)\delta e_{ij} + L'_i{}^j \delta\mu'^i{}_j\,,$$

dove, naturalmente, è da intendersi, tra l'altro,

$$\mu'^i{}_j = x^i_\alpha x^\beta_j \mu'^\alpha{}_\beta\,, \tag{2.1}$$

$$\omega'^{ijh}{}_k = x^i_\alpha x^j_\beta x^h_\gamma x^\delta_k \omega'^{\alpha\beta\gamma}{}_\delta\,, \tag{2.2}$$

con il significato dei simboli ormai evidente.

Sussistendo la relazione (1.5), da (2.1) segue che, in ogni riferimento, risulta [2])

$$\mu'^i{}_j = \eta^{ihk} \nabla_h e_{kj}\,: \tag{2.3}$$

quanto basta per asserire che l'interpretazione tensoriale data in [1] alle variabili $\mu'^i{}_j$ come componenti del rotore del tensore di deformazione (rotore di deformazione) non è limitata all'uso di particolari coordinate.

---

[2]) Le componenti η^{ihk} risultano espresse da

$$\eta^{ihk} = det \,\|\, x^i_\alpha \,\|\, \delta^{i\,h\,k}_{1\,2\,3}, \tag{a}$$

con la definizione di $\delta^{i\,h\,k}_{1\,2\,3}$ ben nota. La relazione (a) sussiste *qualunque* sia il sistema di coordinate considerato, ossia il tensore η^{ihk}, definito da (a), è un tensore *pari*.

3. Si indichino con $\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix}$ i simboli di Christoffel di 2ª specie costruiti tramite i tensori

$$g'_{ij}=x^{\alpha}_{i}x^{\beta}_{j}g'_{\alpha\beta}=x^{\alpha'}_{i}x^{\alpha'}_{j}, \qquad g_{ij}=x^{\alpha}_{i}x^{\alpha}_{j} \ .$$

Risultando, come subito segue da (1.4),

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(g'_{ij}-g_{ij}),$$

da (2.3) si deduce

$$\mu'^{i}{}_{j}=\frac{1}{2}\eta^{ihk}\nabla_{h}g'_{kj}=\frac{1}{2}\eta^{ihk}\left(\partial_{h}g'_{kj}-\begin{Bmatrix} l \\ hj \end{Bmatrix}g_{kl}\right),$$

ossia, in definitiva,

$$\mu'^{i}{}_{j}=\frac{1}{2}\eta^{ihk}g'_{kl}\left(\begin{Bmatrix} l \\ hj \end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix} l \\ hj \end{Bmatrix}\right), \tag{3.1}$$

relazioni valide in ogni riferimento.

Nel caso in cui il riferimento sia cartesiano, i simboli $\begin{Bmatrix} l \\ hj \end{Bmatrix}$ sono nulli e le relazioni (3.1) si riducono alle

$$\mu'^{\alpha}{}_{\beta}=\frac{1}{2}\eta^{\alpha\gamma\delta}\{\beta\gamma,\,\delta\}',$$

che non differiscono da quelle stabilite al n. 13 di [1], dove, come è stato precisato sin dall'inizio di detto lavoro, si è sempre supposto lo spazio iferito a coordinate cartesiane ortogonali (salvo, beninteso, l'interpretazione che, per scopi unitari, è stata data, proprio al n. 13, alle coordinate x^{α}).

4. Dalle relazioni (2.2), (1.3) si deduce

$$\omega'^{ijh}{}_{k}=\eta^{hl(i}x^{j)}_{\alpha'}x^{\alpha'}_{\mu\delta}x^{\mu}_{l}x^{\delta}_{k}=\eta^{hl(i}x^{j)}_{\alpha'}(x^{\alpha'}_{\mu}-x^{\alpha'}_{,\mu}x^{\mu}_{lk})=$$

$$=\eta^{hl(i}\begin{Bmatrix} j) \\ lk \end{Bmatrix}'-\eta^{hl(i}\begin{Bmatrix} j) \\ lk \end{Bmatrix},$$

ossia, con evidente significato dei simboli,

$$\omega'^{ijh}{}_k = \eta^{hl(i} \left(\left\{ {j) \atop lk} \right\} \right)' - \left(\left\{ {j) \atop lk} \right\} \right),$$

relazioni valide in ogni riferimento e che, nel caso in cui il riferimento sia cartesiano, si riducono alle

$$\omega'^{\alpha\beta\gamma}{}_\delta = \eta^{\gamma\mu(\alpha} \left\{ {\beta) \atop \mu\delta} \right\}', \tag{4.1}$$

stabilite al n. 13 di [1].

5. Alle componenti $\mu'^i{}_j$ e $\omega'^{ijh}{}_k$ si può assegnare una ulteriore forma tensoriale, che è data da

$$\mu'^i{}_j = \frac{1}{2} \eta^{ihk} x^{i'}_{j;h} x^{i'}_k, \tag{5.1}$$

$$\omega'^{ijh}{}_k = \eta^{hl(i} x^{j)}_{i'} x^{i'}_{l;k}, \tag{5.2}$$

dove con $x^{i'}_{h;k}$ è da intendersi la derivata tensoriale del *duplice vettore* $x^{i'}_h$, espressa da[3])

$$x^{i'}_{h;k} = x^{i'}_{hk} + \left\{ {i' \atop h'k'} \right\} x^{h'}_h x^{k'}_k - \left\{ {i \atop hk} \right\} x^{i'}_i. \tag{5.3}$$

Le espressioni (5.1), (5.2), nel caso in cui il riferimento sia cartesiano, si identificano con le espressioni (1.2), (1.3) e la sostituzione di (5.3) in esse le trasforma nelle espressioni (3.1) e (4.1).

Le considerazioni sino ad ora svolte confermano senza dubbi di sorta il carattere tensoriale degli enti sino ad ora considerati. Con sviluppi ormai ovvi si può poi verificare il carattere tensoriale di tutti gli altri enti considerati in [1], con l'ovvia avvertenza di trattare come *duplici tensori* gli enti nei quali compaiono sia indici con apice che indici senza apice.

---

[3]) Cfr., ad es., [2], 1, 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. GALLETTO: *Contributo allo studio dei sistemi continui a trasformazioni reversibili con caratteristiche di tensione asimmetriche,* Rend. Semin. Mat. Univ. di Padova, vol. XXXV (1965), pp. 299-334.

[2] J. L. ERICKSEN: *Tensor Fields* (Appendice all'articolo di C. TRUESDELL e R. TOUPIN: *The Classical Field Theories*), Handbuch der Physik, vol. III/1, Berlin, Springer-Verlag, 1960.

[3] *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete,* vol. 139 (1968), pp. 424-425.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 dicembre 1971.