RENDICONTI del SEMINARIO MATEMATICO della UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. DE MARCO

Sulla uniformità naturale nei gruppi topologici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 167-169

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__167_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 47 (1972)

SULLA UNIFORMITÀ NATURALE NEI GRUPPI TOPOLOGICI

G. De Marco *)

È ben noto che uno spazio completamente regolare (X, τ) è uniformizzabile, nel senso che esistono uniformità $\mathfrak{D}$ su X che inducono la topologia τ.

In generale esistono infinite uniformità ammissibili per X (chiamiamo ammissibile un'uniformità che induce la topologia τ) e non vi è, in astratto, alcun motivo per preferire l'una all'altra.

La situazione si presenta diversa per i gruppi topologici.

Infatti,, se G è gruppo topologico, e $\mathcal{U}$ il filtro degli intorni dell'unità di G, la uniformità destra $\mathcal{W}_d$ avente per la base gli insiemi del tipo:

$$W_d(U)=\{(x, y) : xy^{-1}\in U\} \qquad (U\in\mathcal{U})$$

e quella sinistra $\mathcal{W}_s$ avente per base gli insiemi del tipo:

$$W_s(U)=\{(x, y) : x^{-1}y\in U\} \qquad (U\in\mathcal{U})$$

sono entrambe ammissibili e, in un certo senso, privilegiate.

Infatti ([B], § 3, ex. 1, p. 108) si prova facilmente che esse sono le uniche uniformità ammissibili per G aventi una base di « entourages » invarianti per traslazioni destre o sinistre, rispettivamente.

Un caso di particolare interesse è quello in cui queste due uniformità coincidono: esso è esaminato in ([B], § 3, ex. 3, p. 108), dove si

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

prova, tra l'altro, che $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}_s$ è equivalente al fatto che l'applicazione $(x, y) \rightarrow xy$ è uniformemente continua come applicazione di $G \times G$ (con l'uniformtià prodotto di $\mathcal{W}_d$, o di $\mathcal{W}_s$) in G (munito di $\mathcal{W}_d$ o di $\mathcal{W}_s$).

Scopo della presente nota è di porre in rilievo un fatto correlato a quest'ultima situazione, e che non sembra essere mai stato osservato. Precisamente, proviamo il:

TEOREMA 1. *Sia G un gruppo topologico. Se esiste una uniformità $\mathcal{W}$, ammissibile per G, tale che l'applicazione $(x_1, x_2) \rightarrow x_1x_2$ è uniformemente continua come applicazione di $(G \times G, \mathcal{W} \times \mathcal{W})$ in $(G, \mathcal{W})$, allora $\mathcal{W}$ è unica, e si ha $\mathcal{W} = \mathcal{W}_d = \mathcal{W}_s$.*

DIMOSTRAZIONE. Dato $V \in \mathcal{W}$, esiste $W \in \mathcal{W}$ tale che $(x_1, x) \in \mathcal{W}$ tale che $(x_1, y_1) \in W$ e $(x_2, x_2) \in W$ implicano $(x_1x_2, y_1y_2) \in V$. Posto $x_2 = y_1 = a$, si ottiene:

$$(x_1, y_1) \in W \text{ implica } (x_1a, y_1a) \in V \text{ e per ogni } a \in G.$$

Si ponga $W_0 = \{(xa, ya) : (x, y) \in W, a \in G\}$. Si ha $W \subseteq W_0 \subseteq V$ e W_0 invariante per traslazioni destre.

Attesa l'arbitrarietà di V, gli insiemi del tipo W_0 sono una base per $\mathcal{W}$. Quindi $\mathcal{W}$ è un'uniformità ammissibile avente una base di « entourages » invarianti per traslazioni destre. Per ([B], § 3, ex. 1, p. 108) si ha $\mathcal{W} = \mathcal{W}_a$. Analogamente, posto $x_1 = y_1 = a$ si prova che $\mathcal{W} = \mathcal{W}_s$.

Combinando questo risultato con ([B], § 3, ex. 3, p. 108) si ottiene

TEOREMA 2. *Si G un gruppo topologico. Le condizioni che seguono sono equivalenti*:

(a) *L'uniformità destra $\mathcal{W}_d$ e l'uniformità sinistra $\mathcal{W}_s$ di G coincidono.*

(*b*) *Esiste un'uniformità $\mathcal{W}$, ammissibile per G, tale che l'applicazione $(x_1, x_2) \rightarrow x_1x_2$ di $(G \times G, \mathcal{W} \times \mathcal{W})$ in $(G, \mathcal{W})$ è uniformemente continua.*

Inoltre, se (b) *è vera, allora $\mathcal{W} = \mathcal{W}_d = \mathcal{W}_s$.*

Se G è abeliano, $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}_s$ trivialmente. In tal caso l'uniformità

$\mathcal{W} = \mathcal{W}_d = \mathcal{W}_s$ si può chiamare *uniformità naturale* del gruppo abeliano topologico G. Si ha:

COROLLARIO. *Sia G un gruppo abeliano topologico.*

L'uniformità naturale $\mathcal{W}$ è l'unica uniformità ammissibile per G che rende uniformemente continua l'applicazione $(x_1, x_2) \rightarrow x_1 x_2$ *di* $(G \times G, \mathcal{W} \times \mathcal{W})$ *in* $(G, \mathcal{W})$.

BIBLIOGRAFIA

[B] BOURBAKI, N.: *Éléments de Mathématique,* Topologie Générale, livre III, Chapitre 3, Hermann, Paris, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 novembre 1971.