RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO

Risoluzione di moduli su domini d'integrità noetheriani con proprietà di estensione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 155-165

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__155_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

RISOLUZIONE DI MODULI SU DOMINI D'INTEGRITÀ NOETHERIANI CON PROPRIETÀ DI ESTENSIONE

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO *)

In una precedente nota [2] ho dimostrato (parte II teor. 3), che una condizione necessaria e sufficiente affinchè un dominio d'integrità noetheriano soddisfi alla proprietà di estensione (v. def. qui al n. 1), è che ogni suo ideale generato da 2 elementi e libero fuori di un ideale d'altezza >1, abbia dimensione omologica $\leqslant 1$.

In questa nota dimostro che *su un dominio noetheriano A soddisfacente alla proprietà di estensione, ogni A-modulo privo di torsione, di rango r e generato da $r+1$ elementi, che sia libero fuori di un ideale d'altezza* >1, (v. def. al n. 2), *ha dimensione omologica* $\leqslant 1$, *anzi ammette una risoluzione libera di lunghezza* $\leqslant 1$.

Questo teorema, mediante trasformazione funtoriale, si traduce (n. 9), in una proprietà di fasci algebrici coerenti, privi di torsione e liberi fuori di un chiuso ammissibile di uno schema affine $(X, 0_X)$ noetheriano, integro, con proprietà di estensione. Precisamente, *se un siffatto fascio $\mathfrak{F}$ ha rango r ed ammette un epimorfismo* $0_X^{r+1} \to \mathfrak{F} \to 0$, *questo ha nucleo libero.*

1. Indichiamo con A un dominio noetheriano, cioè un anello commutativo con $1 \neq 0$, privo di divisori dello zero e soddisfacente alla condizione delle catene ascendenti; con A_S il corpo delle frazioni di A, e con A_p l'anello locale $(A-p)^{-1}A$ delle frazioni di A con denominatore fuori di un ideale primo p di A.

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Per ogni elemento σ di A_S sia I^σ il conduttore $A:\sigma$ di A in $A[\sigma]$, cioè l'ideale degli elementi a di A tali che $a\sigma \in A$. Se $\sigma \in I_p^\sigma = I^\sigma \underset{A}{\otimes} A_p$, diciamo che σ è definito su p, e se σ è definito sopra ogni ideale primo p che non contiene un dato ideale Q di A, diciamo che σ è definito fuori di Q ([2], nn. 2, 3). Se in A_S gli elementi definiti fuori di un ideale d'altezza maggiore di 1 sono soltanto gli elementi di A, diciamo che A *soddisfa alla proprietà di estensione* ($A \in P.E.$); quindi $A \in P.E.$ se per ogni ideale Q di A di altezza maggiore di 1 risulta $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p = A$, l'intersezione essendo fatta in A_S per tutti gli ideali primi p di A che non contengono Q ([2], prop. 2).

2. Sia M un modulo di tipo finito, privo di torsione e di rango r, sul dominio noetheriano A, ed M_S lo spazio vettoriale $(A-0)^{-1}M$ delle frazioni di M con denominatore in $A-0$.

Se $M_p = M \underset{A}{\otimes} A_p$ è il modulo delle frazioni di M con denominatore in $A-p$, e Q è un ideale di A, $\bigcap_{p \not\supset Q} M_p$ in M_S risulta un modulo sull'anello $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p$.

Diremo che M è *libero fuori di* Q se esiste un isomorfismo di $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p$-moduli.

$$\bigcap_{p \not\supset Q} A_p^r \cong \bigcap_{p \not\supset Q} M_p$$

il quale, per ogni $p \not\supset Q$, si estenda ad un A_p-isomorfismo di A_p^r su M_p.

3. Sia A un dominio noetheriano soddisfacente alla proprietà di estensione, ed M un A-modulo privo di torsione, di rango r, generato da $r+1$ elementi e libero fuori di un ideale Q di A di altezza maggiore di 1.

Poichè $A \in P.E.$, $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p = A$ ed $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p^r = A^r$, dunque $\bigcap_{p \not\supset Q} M_p$ è un A-modulo isomorfo ad A^r.

Se $m_1, m_2, \ldots, m_{r+1}$ sono i generatori di M su A, ed $f_1, f_2, \ldots, f_r$ i generatori liberi di $\bigcap_{p \not\supset Q} M_p$ su $\bigcap_{p \not\supset Q} A_p = A$, allora essendo $M \subset \bigcap_{p \not\supset Q} M_p$, sono univocamente determinati gli $a_{ij} \in A$ tali che sia

$$m_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} f_j \qquad i=1, \ldots, r+1. \tag{1.3}$$

Indicheremo con $[a_{ij}]$ la matrice su A di tipo $(r+1) \times r$ formata con le a_{ij}, e con $[a_{ij}]_{\hat{s}}$, $(s=1, 2, \ldots, r+1)$, le submatrici quadrate della $[a_{ij}]$ ottenute sopprimendo la s-esima riga. Inoltre i minori d'ordine r della $[a_{ij}]$ s'indicheranno con

$$\alpha_s = \det [a_{ij}]_{\hat{s}} \qquad (s=1, 2, \ldots, r+1).$$

4. Lemma 1. *Nelle ipotesi e con le notazioni del n. 3, per ogni $p \not\supset Q$, qualche minore d'ordine r della matrice $[a_{ij}]$ non appartiene a p.*

Infatti per ogni $p \not\supset Q$ esistono in A degli $a_k \notin p$ e b_{ki}, $k=1, 2, \ldots, r$, $i=1, 2, \ldots, r+1$, tali che

$$a_k f_k = \sum_{i=1}^{r+1} b_{ki} m_i \qquad k=1, 2, \ldots, r; \tag{1.4}$$

quindi, per le (1.3),

$$a_k f_k = \sum_{i=1}^{r+1} b_{ki} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{r} f_j \sum_{i=1}^{r+1} b_{ki}\, a_{ij} \qquad k=1, 2, \ldots, r,$$

da cui, per la libertà degli f_j su A, si deduce che valgono in A le r^2 relazioni:

$$\sum_{i=1}^{r+1} b_{ki} a_{ij} = \begin{cases} a_k \notin p & \text{per } k=j \ (j=1, 2, \ldots, r; \\ 0 & \text{per } k \neq j \ \ k=1, 2, \ldots, r) \end{cases} \tag{2.4}$$

Le (2.4) esprimono che il prodotto delle due matrici su A $[b_{ki}]$ e $[a_{ij}]$ è una matrice diagonale di tipo $r \times r$ il cui determinante non appartiene all'ideale primo p di A:

$$\det [[b_{ki}] \times [a_{ij}]] = \prod_{k=1}^{r} a_k \notin p. \tag{3.4}$$

D'altra parte se β_s $(s=1, 2, \ldots, r+1)$, sono i determinanti delle submatrici quadrate che si ottengono da $[b_{ki}]$ sopprimendo la s-esima colonna, per la formula di Binét-Cauchy (vale la dimostrazione data in [5] per le matrici sopra un corpo), è:

$$\det [[b_{ki}] \times [a_{ij}]] = \sum_{s=1}^{r+1} \beta_s \alpha_s . \tag{4.4}$$

Da (3.4) e (4.4) si deduce, come volevasi, che qualcuno degli $\alpha_s \notin p$; in particolare qualcuno di essi non è nullo, sia

$$\alpha_{r+1} = \det [a_{ij}]_{\widehat{r+1}} \neq 0.$$

5. Consideriamo ancora i minori $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}$ d'ordine r della matrice $[a_{ij}]$, ed osserviamo che se $[a_{ij}]_{\widehat{s}, r+1}$ sono le matrici che si ottengono dalla $[a_{ij}]_{\widehat{r+1}}$ sostituendo agli elementi a_{sj} della s-esima riga, gli a_{r+1j} della $(r+1)$-esima di $[a_{ij}]$, risulta:

$$\det [a_{ij}]_{\widehat{s}, r+1} = (-1)^{r-s} \det [a_{ij}]_{\widehat{s}} = (-1)^{r-s} \alpha_s . \tag{1.5}$$

LEMMA 2. *Nelle ipotesi e con le notazioni del n. 3, se M non è libero, il sistema delle r equazioni*

$$x_s \alpha_{r+1} + x_{r+1}(-1)^{r-s} \alpha_s = 0 \qquad s=1, 2, \ldots, r, \tag{2.5}$$

ammette soluzioni proprie in A^{r+1}.

Infatti siano A ed M come al n. 3, e sia

$$0 \to N_c(\varphi) \to A^{r+1} \xrightarrow{\varphi} M \to 0 \tag{3.5}$$

la sequenza esatta canonica per M, dove $N_c(\varphi)$ è lo A-modulo di rango 1 costituito dalle $(r+1)$-ple $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1})$ di elementi di A che verificano la relazione

$$\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i m_i = 0$$

e quindi, per (1.3), anche la seguente

$$\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i \sum_{j=1}^{r} a_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{r} f_j \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i a_{ij} = 0.$$

Dunque, se M non è libero, esistono $(r+1)$-ple $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{r+1})$, costituite da elementi non tutti nulli di A, per le quali, poichè $f_1, f_2, ..., f_r$ sono liberi su A, risultano vere le relazioni seguenti:

$$\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i a_{ij} = 0 \qquad j=1, 2, ..., r;$$

cioè risulta, in termini di matrici,

$$[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{r+1}] \times [a_{ij}] = 0. \tag{4.5}$$

Supponiamo, come detto alla fine del numero precedente, che sia $\alpha_{r+1} = \det [a_{ij}]_{\widehat{r+1}} \neq 0$ e scriviamo la (4.5), (col prodotto delle matrici per blocchi), come segue

$$[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r] \times [a_{ij}]_{\widehat{r+1}} + \lambda_{r+1} \times [a_{(r+1)1} a_{(r+1)2} \dots a_{(r+1)r}] = 0. \tag{5.5}$$

Siano α_{sj} $(j=1, 2, ..., r)$ i cofattori degli elementi della s-esima riga della matrice $[a_{ij}]_{\widehat{r+1}}$ e moltiplichiamo a destra il primo membro della (5.5) per

$$\begin{bmatrix} \alpha_{s1} \\ \alpha_{s2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{sr} \end{bmatrix} = {}^t[\alpha_{s1} \alpha_{s2} \dots \alpha_{sr}];$$

abbiamo allora

$$\begin{aligned} [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r] \times [a_{ij}]_{\widehat{r+1}} \times {}^t[\alpha_{s1} \alpha_{s2} \dots \alpha_{sr}] + \\ + \lambda_{r+1} \times [a_{(r+1)1} a_{(r+1)2} \dots a_{(r+1)r}] \times {}^t[\alpha_{s1} \alpha_{s2} \dots \alpha_{sr}] = 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

il cui primo membro è una matrice ad un solo elemento, e precisamente

$$\lambda_s \det [a_{ij}]_{\widehat{r+1}} + \lambda_{r+1}(a_{(r+1)1}\alpha_{s1} + a_{(r+1)2}\alpha_{s2} + \dots + a_{(r+1)r}\alpha_{sr}).$$

Allora poichè

$$a_{(r+1)1}\alpha_{s1} + a_{(r+1)2}\alpha_{s2} + \dots + a_{(r+1)r}\alpha_{sr} = \det [a_{ij}]_{\widehat{s,r+1}} = (-1)^{r-s} \det [a_{ij}]_{\widehat{s}}$$

la (6.5) può scriversi

$$\lambda_s \det [a_{ij}]_{\widehat{r+1}} + \lambda_{r+1}(-1)^{r-s} \det [a_{ij}]_{\widehat{s}} = 0.$$

Applicando il procedimento esposto qui sopra, successivamente per $s=1, 2, \dots, r$, si vede dunque che le componenti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}$ degli elementi di $N_c(\varphi)$ verificano le relazioni

$$\lambda_s\alpha_{r+1} + \lambda_{r+1}(-1)^{r-s}\alpha_s = 0 \qquad s=1, 2, \dots, r; \tag{7.5}$$

cioè gli elementi $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1})$ di $N_c(\varphi) \neq \{0\}$ sono le soluzioni del sistema (2.5), e il lemma è dimostrato.

6. LEMMA 3. *Sempre nelle ipotesi e con le notazioni del n.* 3, *l'A-modulo* $N_c(\varphi)$ *che compare nella* (3.5) *è isomorfo all'ideale intersezione dei conduttori di A in* $A\left[\dfrac{\alpha_s}{\alpha_{r+1}}\right]$ *per* $s=1, 2, \dots, r$.

Infatti osserviamo che nella (3.5) $N_c(\varphi)$ è isomorfo come A-modulo ad $\alpha_{r+1}N_c(\varphi)$, e gli elementi di quest'ultimo, per le (7.5) risultano del tipo

$$\begin{aligned} \alpha_{r+1}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}) &= \\ = \lambda_{r+1}((-1)^r\alpha_1, (-1)^{r-1}\alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, -\alpha_r, \alpha_{r+1}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

per quei λ_{r+1} di A tali che, (7.5), in A_s risulti

$$\lambda_{r+1}\frac{(-1)^{r-s-1}\alpha_s}{\alpha_{r+1}} \in A \quad \text{per ogni } s=1, 2, \dots, r;$$

cioè, (n. 1), posto $\sigma_s = \dfrac{\alpha_s}{\alpha_{r+1}} \in A_S$, $\lambda_{r+1} \in I^{\sigma_s} = A : \sigma_s$, per ogni $s=1, 2, \dots, r$.

Quindi i λ_{r+1} della (1.6) sono gli elementi dell'ideale

(2.6) $$I = I^{\sigma_1} \cap I^{\sigma_2} \cap \dots \cap I^{\sigma_r}$$

cioè gli elementi a di A tali che $a\sigma_s \in A$ per ogni $s=1, 2, \dots, r$ ed I non è vuoto perchè $\alpha_{r+1} \in I$ in quanto ogni σ_s ammette, per definizione, una rappresentazione con denominatore uguale ad α_{r+1} .

Si può dunque affermare che nella sequenza (3.5) $N_c(\varphi) \cong I$.

7. Sia $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ un sistema di generatori dell'ideale I definito al n. precedente, allora ogni $\sigma_s = \dfrac{\alpha_s}{\alpha_{r+1}}$ $(s=1, 2, \dots, r)$ ammette le rappresentazioni

(1.7) $$\frac{f_{s_1}}{q_1} = \frac{f_{s_2}}{q_2} = \dots = \frac{f_{s_n}}{q_n} .$$

Osserviamo inoltre che se è:

(2.7) $$\alpha_{r+1} = a_1 q_1 + \dots + a_n q_n ,$$

poichè, per le (1.7), valgono le n relazioni:

$$\begin{gathered} \alpha_s q_1 = \alpha_{r+1} f_{s_1} \\ \alpha_s q_2 = \alpha_{r+1} f_{s_2} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_s q_n = \alpha_{r+1} f_{s_n} , \end{gathered}$$

moltiplicando i due membri di ciascuna di queste, rispettivamente per $a_1, a_2, \dots, a_n$ e sommando membro a membro, si deduce che è

(3.7) $$\alpha_s = a_1 f_{s_1} + a_2 f_{s_2} + \dots + a_n f_{s_n} ,$$

cioè se vale la (2.7), allora per ogni $s=1, 2, \dots, r$, esiste una n-pla $f_{s_1}, f_{s_2}, \dots, f_{s_n}$ di elementi di A tali che valga la (3.7).

Dimostriamo ora il seguente

LEMMA 4. *Sia A un dominio noetheriano soddisfacente alla proprietà di estensione, ed M un A-modulo privo di torsione, di rango r,* *generato da $r+1$ elementi e libero fuori d'un ideale Q di A di altezza maggiore di* 1, *allora nella sequenza esatta canonica*

$$0 \to N_c(\varphi) \to A^{r+1} \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

anche $N_c(\varphi)$ è libero almeno fuori di Q.

Per il lemma 3 del n. 6 basta dimostrare che è libero fuori di Q l'ideale I definito dalla (2.6). Allo scopo osserviamo che, per il lemma 1 del n. 4 per ogni $p \not\supset Q$, qualcuno dei minori α_s della matrice $[a_{ij}]$ definita dalle (1.3), non appartiene a p. Allora, poichè $\alpha_{r+1} \in I$, per gli ideali primi $p \not\supset Q$ per i quali è $\alpha_{r+1} \notin p$ si ha $I_p = IA_p = A_p$; per gli altri ideali primi $p \not\supset Q$, se è $\alpha_s \notin p$ $(s \leq r)$, allora per la (3.7) qualche $f_{s_i} \notin p$ e quindi, (2.7), è:

$$I_p = \alpha_s I_p = \alpha_s(A_p q_1 + A_p q_2 + \dots + A_p q_n) =$$
$$= \alpha_{r+1}(A_p f_{s_1} + A_p f_{s_2} + \dots + A_p f_{s_n}) = \alpha_{r+1} A_p\,.$$

Considerata allora una decomposizione in A di α_{r+1} in fattori irriducibili, sia α il prodotto di quei fattori di α_{r+1} che appartengono a qualche $p \not\supset Q$, sarà $I_p = A_p \alpha$ per ogni $p \not\supset Q$ e quindi $\alpha \in \bigcap_{p \not\supset Q} I_p$ anche se $\alpha \notin I$, e lo A-isomorfismo $1 \to \alpha$ di A in $\bigcap_{p \not\supset Q} I_p$ è suriettivo perchè $\bigcap_{p \not\supset Q} I_p$ è l'insieme degli elementi a di A tali che, per ogni $p \not\supset Q$, esiste un $m_p \notin p$ per cui $\dfrac{am_p}{m_p} \in I_p$ e allora, poichè α genera ciascun I_p su A_p, sarà $a = \dfrac{am_p}{m_p} = \dfrac{r_p}{s_p}\alpha$, da cui in A_S, $\rho = \dfrac{r_p}{s_p} \in \bigcap_{p \not\supset Q} A_p = A$, perciò $(a \in \bigcap_{p \not\supset Q} I_p) \Rightarrow (a \in A\alpha)$, e $\bigcap_{p \not\supset Q} I_p = A\alpha$, quindi I è libero fuori di Q, c.v.

8. Possiamo ora dimostrare il seguente

TEOREMA 1. *Se A è un dominio noetheriano soddisfacente alla proprietà di estensione, ogni A-modulo privo di torsione, di rango r, generato da $r+1$ elementi e libero fuori d'un ideale d'altezza maggiore di* 1 *ammette una risoluzione libera di lunghezza minore o eguale ad* **1.**

Infatti consideriamo ancora la sequenza esatta (3.5)

$$0 \to N_c(\varphi) \xrightarrow{i} A^{r+1} \xrightarrow{\varphi} M \to 0,$$

per i lemmi 3 (n. 6) e 4 (n. 7), esiste un isomorfismo ε di $N_c(\varphi)$ su un ideale I di A libero fuori d'un ideale Q d'altezza maggiore di 1, sia τ l'isomorfismo $\bigcap_{p \not\supset Q} I_p \to A$. Allora ([2], n. 10, teor. 1), esiste un monomorfismo ψ di A in A^{r+1} che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dr, "\tau/I"] & \\
N_c(\varphi) \arrow[ur, leftrightarrow, "\varepsilon"] \arrow[dr, "i"'] & & A \arrow[dl, "\psi"] \\
 & A^{r+1} &
\end{tikzcd}$$

Inoltre posto $\delta = (\tau/I)\cdot\varepsilon$, si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & N_c(\chi) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N_c(\varphi) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"] & A^{r+1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "1_{A^{r+1}}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & A^{r+1} \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d] & C_n(\psi) \arrow[r] & 0 \\
 & C_n(\delta) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

dove χ è tale che $\chi\cdot\varphi = \psi'$, come in [2], n. 11, teor. 2, e se ne deduce anche qui l'esistenza dell'isomorfismo $\gamma : N_c(\chi) \to C_n(\delta)$, che permette di concludere, poichè $C_n(\delta)$ è di rango 0 ed M è privo di torsione ([3], III (4.2.8) e (4.4.8)), che $N_c(\varphi) \cong A$; dunque per M esiste la sequenza esatta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i\cdot\delta^{-1}} A^{r+1} \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0,$$

c.v.d.

9. Consideriamo ora *uno schema affine noetheriano* $(X, 0_X)$, *il cui anello A sia un dominio d'integrità soddisfacente alla proprietà di estensione*, e sia $\mathfrak{F}$ un 0_X-modulo coerente e privo di torsione.

Ricordiamo che, poichè $\mathfrak{F}$ è coerente, esiste un A-modulo M di tipo finito il cui fascio associato $\tilde{M}$ è isomorfo ad $\mathfrak{F}$ ([6], 1, (1.5.1)), ed il funtore covariante $\Gamma : \mathfrak{F} \mapsto \Gamma(X, \mathfrak{F})$ è esatto ([6], 1, (1.3.11)) ed ammette il funtore esatto $M \mapsto \tilde{M}$ come quasi-inverso. Inoltre poichè $\mathfrak{F}$ è anche privo di torsione ed $(X, 0_X)$ risulta integro, è definito il rango di $\mathfrak{F}$ ed è finito e uguale al rango dell'A-modulo $\Gamma(X, \mathfrak{F})$, ([6], 1, (8.4.2), (8.1.5)). Osserviamo infine che nello spazio topologico $X = \mathrm{Spec}(A)$, (topologia di Zariski), ogni aperto quasi-compatto $D(Q) = X - V(Q)$, (dove Q è un ideale di A e quindi finitamente generato), è costituito dagli ideali primi p di A che non contengono Q. Se Q è di altezza maggiore di 1, diciamo che $D(Q)$, è *ammissibile.*

Premesso ciò, è subito visto che il teorema 1 del n. precedente è equivalente al seguente

TEOREMA 2. *Sia* $(X, 0_X)$ *uno schema affine neotheriano il cui anello A sia un dominio d'integrità soddisfacente alla proprietà di estensione, ed* $\mathfrak{F}$ *un* 0_X*-modulo coerente privo di torsione.*

Allora se è $\mathfrak{F}/D(Q) \cong 0_X^r/D(Q)$ *su di un aperto ammissibile, ed esiste un epimorfismo* $0_X^{r+1} \to \mathfrak{F} \to 0$ *di* 0_X*-moduli, questo ha nucleo libero.*

Infatti, nelle nostre ipotesi $M = \Gamma(X, \mathfrak{F})$ è un A-modulo che soddisfa alle condizioni del teorema 1, dunque per $\mathfrak{F} \cong \tilde{M}$ è vero il teorema 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] BALDASSARRI, M.: *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci,* Atti del Conv. Internaz. di Geom. Alg. di Torino (1961).

[2] BALDASSARRI GHEZZO, S.: *Proprietà di ideali in domini d'integrità noetheriani,* Rend. del Seminario Mat. della Univ. di Padova, Cedam (1970).

[3] BALDASSARRI GHEZZO, S., MARGAGLIO, C., MILLEVOI, T.: *Introduzione ai metodi della geometria algebrica,* C.N.R., Monografie Mat., Ed. Cremonese, Roma (1967).

[4] BOURBAKI, N.: *Algèbre commutative,* Chap. 1 e 2, Hermann, Paris (1961).

[5] GANTMACHER, F. R.: *Théorie des matrices*, Dunod, Paris (1966).

[6] GROTHENDIECK, A., DIEUDONNÉ, J. A.: *Eleménts de Géométrie Algébrique I*, Springer-Verlag, Berlin (1971).

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 novembre 1971.