ANTONIO C. GRIOLI

Su una generalizzazione degli spazi di Appel

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 129-138

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__129_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

SU UNA GENERALIZZAZIONE DEGLI SPAZI DI APPEL

ANTONIO C. GRIOLI *)

1. Introduzione.

L'Appel ha associato ad un generico sistema continuo $\mathcal{C}$ in movimento uno spazio rigido mediante le condizioni che rispetto ad esso si annullino la quantità di moto e il momento della quantità di moto relativi [1]).

Nella presente nota considero un generico sistema continuo $\mathcal{C}$ e mi propongo di determinare l'atto di moto del fluido ideale incomprimibile $\mathcal{C}^{(\tau)}$ rispetto a cui è minima l'energia cinetica (relativa) $T^{(r)}$ [2]).

Considerata una opportuna generalizzazione del teorema di Clebsch, mostro come in generale tale atto di moto sia univocamente determinato e come a un istante in cui il continuo sia omogeneo rispetto alla densità, esso coincida con la parte solenoidale del campo di velocità di $\mathcal{C}$ [3]).

Mostro inoltre come il suddetto minimo $T^{(r)}$ sia in generale effettivamente minore che nel caso dell'Appel, come del resto è da attendersi, e determino i moti per i quali invece tali due minimi coincidono.

In 5 estendo al caso dei fluidi di riferimento incomprimibili una caratterizzazione degli spazi di Appel data da A. Bressan in [4].

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Università - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

1) Vedi [1].

2) In relazione al moto di un continuo rispetto ad un fluido di riferimento vedi [2], [3] e [6].

3) Beninteso nella decomposizione (7) con la condizione (8).

Faccio infine osservare come l'energia cinetica relativa $T^{(r)}$ eguaglia l'energia che si perderebbe per trasformazione in calore se improvvisamente si liberasse $\mathcal{C}$ dagli eventuali vincoli esterni e gli si imponesse il vincolo interno di incomprimibilità e dò un esempio fisico di realizzazione di tale vincolo.

2. Su una generalizzazione del teorema di Clebsch.

Un noto teorema di Clebsch assicura che un campo vettoriale può porsi nella forma

$$\overline{v} = \overline{grad}\, \alpha + \overline{rot}\, \overline{w}, \tag{1}$$

dove α è una funzione scalare delle coordinate, soluzione dell'equazione

$$\Delta\alpha = div\, \overline{v} \qquad \text{in } D. \tag{2}$$

È immediata la seguente estensione di tale teorema.

Dato un campo vettoriale $\overline{v}$ definito in un dominio D e due funzioni delle coordinate f e g mai nulle, sussiste per $\overline{v}$ la seguente decomposizione:

$$\overline{v} = f\, \overline{grad}\, \alpha + g\, \overline{rot}\, \overline{w} \tag{3}$$

ove α coincide sulla frontiera di D con una funzione continua, arbitrariamente prefissata, almeno quando siano verificate le seguenti ipotesi:

I) le funzioni $\frac{g}{f}\left(\frac{f}{g}\right)_{/i}$ e $\frac{g}{f}\sum_1^3{}_i \left(\frac{v^i}{g}\right)_{/i}$ sono di classe $C^{(0,\lambda)}$, $i = 1, 2, 3$

II) il dominio D è di classe $A^{(1,\lambda)}$ [5]).

---

[4]) Una proprietà analoga è stata dimostrata da Bressan nel caso di moti di trascinamento rigidi e dell'imposizione del vincolo di rigidità, in [4].

[5]) Dicesi di classe $C^{(k,\lambda)}$ una funzione definita in un dominio limitato e ivi dotato di derivate k-esime λ-holderiane. Per ulteriori precisazioni e per definizione di insiemi di classe $A^{(k,\lambda)}$ vedi [5], p. 2.

Infatti, la condizione di solubilità della (3) intesa come equazione differenziale in $\overline{w}$ è data da:

$$div \frac{\overline{v}}{g} = div \left(\frac{f}{g} \, \overline{grad}\, \alpha \right). \tag{4}$$

Sviluppando la (4) si ottiene la seguente equazione differenziale di tipo ellittico nella funzione incognita α:

$$\sum_1^3{}_i\, \alpha_{/ii} + \sum_1^3{}_i \frac{g}{f} \left(\frac{f}{g} \right)_{/i} \alpha_{/i} = \frac{g}{f} \sum_1^3{}_i \left(\frac{v^i}{g} \right)_{/i}. \tag{5}$$

Nelle ipotesi fatte, assegnati i valori di α sulla frontiera di D, esiste ed è unicala soluzione della (5) [6], quindi esiste ed è unica la decomposizione (3). È immediato constatare inoltre che $\overline{grad}\,\alpha$ con α nullo sulla frontiera σ di D è ortogonale in media al rotore di un arbitrario vettore $\overline{a}$. Si ha infatti:

$$\int_D \overline{grad}\, \alpha \times \overline{rot}\, \overline{a}\, dD = - \int_\sigma \alpha \overline{n} \times \overline{rot}\, \overline{a}\, d\sigma = 0, \tag{6}$$

ove $\overline{n}$ è il versore della normale interna a σ.

3. Determinazione dell'atto di moto incomprimibile minimizzante l'energia cinetica relativa di $\mathcal{C}$.

Sia $\overline{v}$ il campo vettoriale rappresentante l'atto di moto di $\mathcal{C}$ all'istante t, μ la sua densità e D la regione da esso occupata. Impongo a $\overline{v}$, μ e D di soddisfare alle seguenti ipotesi:

I') le funzioni $\frac{1}{\mu}\mu_{/i}$ e $\sum_1^3{}_i\, \mu v^i_{/i}$ sono di classe $C^{(0,\lambda)}$, $i = 1, 2, 3$

II') D è un dominio di classe $A^{(1,\lambda)}$.

---

[6]) Per la dimostrazione del teorema di esistenza e di unicità vedi [5], p. 60 e altre.

In tali ipotesi, per la generalizzazione del teorema di Clebsch dimostrata in **2.** sussiste per $\overline{v}$ la decomposizione:

$$\overline{v}=\frac{\overline{grad}\,\alpha}{\mu}+\overline{rot}\,\overline{w} \tag{7}$$

con

$$\alpha=0 \tag{8}$$

sulla frontiera σ di D.

Indicato poi con:

$$\overline{v}'=\overline{rot}\,\overline{w}' \tag{9}$$

l'atto di moto di un arbitrario fluido incomprimibile $\mathcal{C}'$, l'energia cinetica relativa di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{C}'$ è, tenuto conto di (6), (7) e (8):

$$\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}\int_D \mu\left[\frac{1}{\mu}\overline{grad}\,\alpha+\overline{rot}\,(\overline{w}-\overline{w}')\right]^2 dD= \\ &=\frac{1}{2}\int_D \frac{1}{\mu}\,\overline{grad}^2\,\alpha dD+\frac{1}{2}\int_D \mu\,\overline{rot}^2\,(\overline{w}-\overline{w}')dD. \end{aligned} \tag{10}$$

Da (10) si vede come al variare della funzione vettoriale $\overline{w}'$, il minimo di T si ha per:

$$\overline{rot}\,\overline{w}'=\overline{rot}\,\overline{w}, \tag{11}$$

tale minimo essendo dato da:

$$T^{(r)}=\frac{1}{2}\int_D \frac{1}{\mu}\overline{grad}^2\,\alpha dD. \tag{12}$$

Essendo $\overline{rot}\,\overline{w}$ univocamente determinato per le considerazioni precedenti, tale risulta essere $\overline{rot}\,\overline{w}'$ e quindi anche l'atto di moto del fluido incomprimibile. Si vede subito come nel caso di μ costante tale atto di moto coincide con la parte solenoidale del campo di velocità di $\mathcal{C}$.

4. Confronto col caso dell'Appel.

Faccio vedere come $T^{(r)}$ sia in generale proprio minore dell'energia cinetica relativa $T'^{(r)}$ del caso dell'Appel e determino i casi in cui invece tali quantità coincidono. Nel caso dell'Appel si approssima il moto di $\mathcal{C}$ con un moto rigido e dunque l'energia cinetica relativa è espressa da:

$$T'^{(r)} = \frac{1}{2} \int_D \mu \left(\frac{1}{\mu} \overline{grad}\, \alpha + \overline{rot}\, \overline{w} - \overline{b} - \overline{\omega} \wedge \overline{GP} \right)^2 dD \tag{13}$$

ove $\overline{b}$ e $\overline{\omega}$ sono vettori costanti.

Tenuto conto di (6) e del fatto che $\overline{b} + \overline{\omega} \wedge \overline{GP}$ è solenoidale e può quindi porsi nella forma $\overline{b} + \overline{\omega} \wedge \overline{GP} = \overline{rot}\, \overline{a}$ da (13) segue:

$$T'^{(r)} = \frac{1}{2} \int_D \frac{1}{\mu} \overline{grad}^2\, \alpha dD + \frac{1}{2} \int_D \mu (\overline{rot}\, \overline{w} - \overline{b} - \overline{\omega} \wedge \overline{GP})^2 dD. \tag{14}$$

Si vede che il termine $\int_D \mu (\overline{rot}\, \overline{w} - \overline{b} - \overline{\omega} \wedge \overline{GP})^2 dD$ che compare in (14) è sempre positivo o nullo ed è nullo se e solo se l'atto di moto del fluido $\mathcal{C}$ all'istante t è esprimibile nella forma:

$$\overline{v} = \frac{1}{\mu} \overline{grad}\, \alpha + \overline{u} \tag{15}$$

dove α deve soddisfare alla condizione (8) e $\overline{u}$ rappresenta un atto di moto rigido, ossia se e solo se $\overline{v}$ è la somma di un atto di moto rigido con uno irrotazionale in D e ortogonale a σ su σ.

5. Proprietà del risultante della quantità di moto relativa, del suo momento risultante e dell'energia cinetica relativa.

Valuto il risultante della quantità di moto relativa e il suo momento baricentrale. Si ha, tenuto conto di (8):

$$\bar{Q}^{(r)} = \int_D \mu(\bar{v} - \bar{v}')dD = \int_D \overline{grad}\, \alpha dD = -\int_\sigma \alpha \bar{n} d\sigma = \bar{0} \tag{16}$$

$$\overline{K}_G^{(r)} = \int_D \mu \overline{GP} \wedge (\bar{v} - \bar{v}')dD = \int_D \overline{GP} \wedge \overline{grad}\, \alpha dD = \bar{c}_i \int_D \varepsilon^{ilm} \chi_l \alpha_{/m} dD = \tag{17}$$

$$= -\bar{c}_i \int_\sigma \varepsilon^{ilm} \chi_l \alpha n_m d\sigma - \bar{c}_i \int_D \varepsilon^{ilm} \alpha \chi_{l/m} dD,$$

dove con ε^{ilm} si è indicato il tensore di Ricci e si è denotato con la sbarretta la derivata parziale rispetto alla generica coordinata, in un riferimento cartesiano ortogonale R di origine G e versori $\bar{c}_i$. È sottinteso il simbolo di sommatoria rispetto agli indici i, l, ed m.

Tenuto conto di (8) e della emisimmetria di ε^{ilm} da (17) si deduce:

$$\overline{K}_G^{(r)} = \bar{0}. \tag{18}$$

Si riconosce dunque l'annullarsi della quantità di moto e del momento della quantità di moto nel moto relativo al fluido $\mathcal{C}^{(\tau)}$ minimizzante l'energia cinetica relativa di $\mathcal{C}$. Per (16) e (18) si annulla il momento della quantità di moto rispetto a qualunque polo.

Considero lo spazio S' dei riferimenti fluidi incomprimibili $\mathcal{C}'$ e ne scelgo uno che chiamo $\mathcal{C}^*$, come riferimento assoluto. Sia:

$$\bar{v}^* = \overline{rot}\, \bar{w}^* \tag{19}$$

la velocità dei suoi punti rispetto a R.

Di conseguenza l'energia cinetica assoluta di $\mathcal{C}$ deve intendersi espressa da

$$T^{(a)} = \int_D \mu \left[\frac{1}{\mu} \overline{grad}\, \alpha + \overline{rot}\, (\bar{w} - \bar{w}^*) \right]^2 dD. \tag{20}$$

L'energia cinetica relativa di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{C}^{(\tau)}$ è data ancora dalla (12), mentre l'energia cinetica di trascinamento è, in questo caso:

$$T^{(\tau)} = \frac{1}{2} \int_D \mu\, \overline{rot}^2\, (\bar{w} - \bar{w}^*)dD. \tag{21}$$

Da (6), (12) e (21) segue:

$$T^{(a)} = T^{(r)} + T^{(\tau)}. \tag{22}$$

La decomposizione (22) vale comunque si scelga lo spazio assoluto di riferimento, purchè appartenente a S'. Come caso particolare vale dunque anche per $\mathcal{C}^*$ rigido.

Dimostro che la decomposizione (22) caratterizza il fluido $\mathcal{C}^{(\tau)}$ dell'Appel mostrando quanto segue: Se assumendo un moto fluido incomprimibile $\mathcal{C}_1$ come moto di trascinamento vale una decomposizione del tipo della (22) comunque si faccia variare $\mathcal{C}^*$ in S', allora $\mathcal{C}_1$ coincide con $\mathcal{C}^{(\tau)}$.

Sia:

$$\overline{v}_1 = \overline{rot}\, \overline{w}_1 \tag{23}$$

la velocità dei punti di $\mathcal{C}_1$ rispetto ad R. Assunto come moto relativo quello di $\mathcal{C}$ rispetto a $\mathcal{C}_1$, il moto di trascinamento sarà quello di $\mathcal{C}_1$ rispetto a $\mathcal{C}^*$. Per ipotesi valga la

$$T^{(a)} = T_1^{(r)} + T_1^{(\tau)} \tag{24}$$

con

$$T_1^{(r)} = \frac{1}{2} \int_D \mu \left[\frac{1}{\mu} \overline{grad}\, \alpha + \overline{rot}\, (\overline{w} - \overline{w}_1) \right]^2 dD \tag{25}$$

$$T_1^{(\tau)} = \frac{1}{2} \int_D \mu\, \overline{rot}^2\, (\overline{w}_1 - \overline{w}^*) dD. \tag{26}$$

Da (24), (20), (25), (26), (6) segue:

$$\int_D \mu\, \overline{rot}\, (\overline{w}_1 - \overline{w}) \times \overline{rot}\, (\overline{w}_1 - \overline{w}^*) dD = 0. \tag{27}$$

La (27) deve valere qualunque sia $\overline{w}^*$, perchè qualunque sia $\overline{w}^*$ vale la (24). Ponendo allora nella (27):

$$\overline{w}^* = \overline{w}, \tag{28}$$

essa diviene

$$\int_D \mu \, \overline{rot}^2 \, (\overline{w}_1 - \overline{w}) dD = 0. \tag{29}$$

Da (29) segue:

$$\overline{rot} \, \overline{w}_1 = \overline{rot} \, \overline{w}, \tag{30}$$

da cui si vede che le velocità dei punti di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}^{(\tau)}$ coincidono.

6. Considerazioni energetiche.

Suppongo ora che all'istante t venga imposto al sistema $\mathcal{C}$ il vincolo interno di incomprimibilità liscio, nel senso che esso non influisca sul componente solenoidale della velocità, dopo averlo liberato dagli eventuali vincoli esterni. Togliendo tali vincoli si inducono al più delle discontinuità nelle accelerazioni, ma non nelle velocità e inoltre si evita che fenomeni impulsivi, dovuti alla brusca imposizione del vincolo di incomprimibilità, si ripercuotano in impulsi esterni. Inoltre l'imposizione di tale vincolo interno potrà causare brusche variazioni delle velocità degli elementi di $\mathcal{C}$, ma non delle loro posizioni.

È da notare che, mentre la brusca soppressione di eventuali vincoli equivale alla soppressione di un sistema di reazioni finite e quindi induce soltanto discontinuità di accelerazioni senza brusche trasformazioni termodinamiche, la improvvisa imposizione di un vincolo induce in generale discontinuità delle velocità con brusca produzione di calore. Dunque la soppressione di eventuali vincoli è un fenomeno reversibile mentre la loro improvvisa imposizione è un fenomeno irreversibile.

Per le considerazioni precedenti all'istante t^+ successivo all'imposizione del vincolo, la densità resta invariata e restano invariati anche la quantità di moto e il momento della quantità di moto assoluti.

Analiticamente il vincolo di incomprimibilità si può rappresentare con:

$$div \, \overline{v}' = 0. \tag{31}$$

Decomposto $\overline{v}'$ secondo la (7) con la condizione (8), per l'ipotesi fatta sulla natura del vincolo, si vede che questo agisce solo sul componente $\frac{1}{\mu}\overline{grad}\,\alpha$ *di* $\bar{v}$ e non su $\overline{rot}\,\bar{w}$. Da (31) si trae precisamente:

$$\text{(32)} \qquad div\left(\frac{1}{\mu}\overline{grad}\,\alpha^+ + \overline{rot}\,\bar{w}\right) = \frac{1}{\mu}\Delta\alpha^+ - \frac{1}{\mu^2}\overline{grad}\,\alpha^+ \times grad\,\mu = 0.$$

Da (32), tenuto conto di (8) e delle ipotesi fatte su μ e D, segue $\alpha^+=0$ in D. Dunque all'istante t^+ la velocità degli elementi del fluido è espressa da:

$$\text{(33)} \qquad \bar{v}^+ = \overline{rot}\,\bar{w}$$

e la sua energia cinetica è:

$$\text{(34)} \qquad T^+ = \frac{1}{2}\int_D \mu\,\overline{rot^2\,w}\,dD = T^{(\tau)}.$$

Si vede quindi come tale vincolo agisca sugli elementi del fluido con un sistema di impulsi-$\overline{grad}\,\alpha dD$ esplicantesi fra i vari elementi dD del fluido stesso. Inoltre da (33) si vede che l'atto di moto che deriva per il fluido $\mathcal{C}$ dopo la brusca imposizione del vincolo di incomprimibilità è proprio quello del fluido $\mathcal{C}^{(\tau)}$ che rende minima l'energia cinetica relativa, mentre da (22) e (34) segue che tale energia cinetica è l'energia che si perde per trasformazione in calore in seguito ad una siffatta imposizione del vincolo di incomprimibilità. Con una certa approssimazione tale vincolo potrebbe essere realizzato con trasformazioni fisiche o chimiche, per esempio raffreddando una massa gassosa di H^2O, di densità costante e racchiusa in un volume pari a quello occupato da una stessa massa di H^2O allo stato liquido e in condizioni normali, in modo da liquefarla bruscamente.

BIBLIOGRAFIA

[1] APPEL, P.: *Sur la noction d'axes fixes et de mouvement absolue; Comptes rendus*, t. 166, 1918, pp. 513-516.

[2] BRINIS UDESCHINI E.: *Sul divario fra due campi cinetici*, Istituto Lombardo di scienze e lettere, Milano 1963.

[3] TRUESDELL, C. e TOUPIN, R.: *The classical field theories*, Encyclopedia of phisics, vol. III/1, S. Flugge, Springer Verlag 1960, p. 462.

[4] BRESSAN, A.: *Osservazioni di cinematica e di dinamica connesse con lo spazio di energia minima*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, serie II, tomo XIII, 1964.

[5] MIRANDA, C.: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer-Verlag, 1955.

[6] FERRARESE, G.: *Sul moto di una particella rispetto ad un riferimetno fluido: analogie tra meccanica classica e relatività generale*, Lincei Rend. Sc. fis. mat. e nat., vol. XXXIV, maggio 1963.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 novembre 1971.