RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

A. MANES
M. P. POLETTI

Qualche risultato sull'interpolazione per applicazioni non lineari fra spazi di Banach

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 115-128

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__115_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

QUALCHE RISULTATO SULL'INTERPOLAZIONE PER APPLICAZIONI NON LINEARI FRA SPAZI DI BANACH

A. MANES - M. P. POLETTI *)

Introduzione.

La teoria dell'interpolazione per applicazioni lineari fra spazi di Banach si è molto sviluppata nel decennio scorso; invece la teoria dell'interpolazione per applicazioni non lineari è soltanto all'inizio e indubbiamente trova notevoli difficoltà.

L'estensione dei risultati noti nel caso lineare può essere ricercata in due diverse direzioni:

1) Vedere se un particolare metodo di interpolazione lineare è valido anche per applicazioni non lineari di una certa classe. In questa direzione si è mosso J. L. Lions [3], il quale ha dimostrato che il metodo delle tracce è valido per certe applicazioni non lineari.

2) Vedere se, per certi spazi che sono fra loro in interpolazione per le applicazioni lineari, l'interpolazione è valida anche per certe categorie di applicazioni non lineari.
Questa è la via seguita da F. E. Browder [1].

In questo lavoro viene portato un contributo riguardo a ciascuna delle due direzioni.

In primo luogo (§ 1) introduciamo un procedimento di interpola-

*) Indirizzo degli AA.: Istituto Matematico « L. Tonelli », Università di Pisa.
A. Manes ha svolto questo lavoro usufruendo di una borsa di studio del C.N.R.

zione lineare che, per il suo carattere, risulta valido anche per applicazioni lipschitziane.

Successivamente (§ 2) dimostriamo un teorema analogo a quello di Browder ([1], Teorema 1), rispetto agli spazi, eliminiamo le ipotesi restrittive poste da Browder, ma aggiungiamo l'ipotesi che le applicazioni siano, oltre che lipschitziane, di classe C^1.

Quest'ultima ipotesi sembra abbastanza naturale: infatti essendo le applicazioni di classe C^1 localmente approssimabili con applicazioni lineari, è ragionevole pensare che le proprietà di interpolazione valide per le applicazioni lineari si possano, fino ad un certo punto, estendere ad esse.

Non ci è riuscito di vedere se l'applicazione di interpolazione risulta essa stessa di classe C^1.

§ **1.** Consideriamo due spazi di Banach X_0, X_1, tali che:

(*a*) X_1 contenuto in X_0

(*b*) X_1 sia denso in X_0

(*c*) l'inclusione $i : X_1 \to X_0$ sia continua.

Fissiamo un numero reale θ, con $0<\theta<1$.

Per ogni $x \in X_0$ consideriamo le successioni di elementi di X_1, $\{u_n\}_{n \in N}$, tali che la serie $\sum_{0}^{\infty}{}_n u_n$ converga ad x nella norma di X_0, e per ognuna di queste successioni la quantità

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \| u_n \|_{X_0}^{1-\theta} \| u_n \|_{X_1}^{\theta} \ .$$

DEFINIZIONE 1.1. Indichiamo con X_θ l'insieme degli $x \in X_0$ tali che esista almeno una successione $\{u_n\}_{n \in N}$ di elementi di X_1 con le proprietà:

1) $\sum_{0}^{\infty}{}_n u_n = x$ nella norma di X_0

2) $\sum_{0}^{\infty}{}_n \| u_n \|_{X_0}^{1-\theta} \| u_n \|_{X_1}^{\theta} < \infty$

e poniamo

$$\| x \|_{X_\theta} = \inf_{(\{u_n\}_{n \in N})} \sum_0^\infty {}_n \| u_n \|_{X_0}^{1-\theta} \| u_n \|_{X_1}^{\theta} .$$

Teorema 1.2. Dati due spazi di Banach X_0, X_1 tali che valgano le proprietà (*a*), (*b*), (*c*), allora $\| x \|_{X_\theta}$ è una norma su X_θ, $0<\theta<1$; X_θ con la norma così definita è uno spazio di Banach tale che:

1) $X_1 \subset X_\theta \subset X_0$

2) X_1 è denso in X_θ, X_θ è denso in X_0

3) $i_1 : X_1 \to X_\theta$, $i_0 : X_\theta \to X_0$ sono continue.

Dimostrazione. Dimostriamo che $\| x \|_{X_\theta}$ è una norma verificando tutte le proprietà:

I) $\| x \|_{X_\theta} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$x = 0 \Rightarrow \| x \|_{X_\theta} = 0$ è banalmente vera; dimostriamo che $\| x \|_{X_\theta} = 0 \Rightarrow x = 0.$

Fissato un $\varepsilon > 0$, esiste una successione u_n in X_0 tale che:

$$\sum_0^\infty {}_n u_n = x, \quad \sum_0^\infty {}_n \| u_n \|_{X_0}^{1-\theta} \| u_n \|_{X_1}^{\theta} \leq \varepsilon .$$

Essendo l'inclusione $i : X_1 \to X_0$ continua, vale la disuguaglianza:

$$\| z \|_{X_0} \leq c \, \| z \|_{X_1} \quad (c \text{ costante}).$$

Perciò:

$$\left(\frac{1}{c} \right)^{\theta} \sum_0^\infty {}_n \| u_n \|_{X_0} \leq \sum_0^\infty {}_n \| u_n \|_{X_0}^{1-\theta} \| u_n \|_{X_1}^{\theta} \leq \varepsilon .$$

Ciò implica $\| x \|_{X_0} = 0$, perciò $x = 0$.

II) $\| x \|_{X_\theta} \geq 0$ per ogni $x \in X_\theta$.

III) $\| ax \|_{X_\theta} = | a | \, \| x \|_{X_\theta}$ per ogni $a \in R$ e $x \in X_\theta$; poichè la funzione che definisce la norma è omogenea di grado 1 è banalmente vera.

IV) Dati x_1, $x_2 \in X_\theta$ dobbiamo dimostrare che

$$\| x_1 + x_2 \|_{X_\theta} \leq \| x_1 \|_{X_\theta} + \| x_2 \|_{X_\theta} .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo le successioni $\{u_k\}_{k \in N}$ e $\{v_h\}_{h \in N}$ tale che

$$x_1 = \sum_0^\infty{}_k\, u_k , \qquad x_2 = \sum_0^\infty{}_h\, v_h$$

e

$$\sum_0^\infty{}_k \| u_k \|_{X_0}^{1-\theta} \| u_k \|_{X_1}^{\theta} \leq \| x_1 \|_{X_\theta} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_0^\infty{}_h \| v_h \|_{X_0}^{1-\theta} \| v_h \|_{X_1}^{\theta} \leq \| x_2 \|_{X_\theta} + \frac{\varepsilon}{2} ;$$

se prendiamo come rappresentante di $x_1 + x_2$ la serie

$$u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \ldots + u_n + v_n + \ldots$$

si avrà

$$\| x_1 + x_2 \|_{X_\theta} \leq \sum_0^\infty{}_k \| u_k \|_{X_0}^{1-\theta} \| u_k \|_{X_1}^{\theta} + \sum_0^\infty{}_h \| v_h \|_{X_0}^{1-\theta} \| v_h \|_{X_1}^{\theta} \leq$$

$$\leq \| x_1 \|_{X_\theta} + \| x_2 \|_{X_\theta} + \varepsilon ;$$

per l'arbitrarietà di ε la disuguaglianza è dimostrata.

$\| x \|_{X_\theta}$ è quindi una norma su X_θ.

La completezza di X_θ e le inclusioni dense e continue di X_1 in X_θ e di X_θ in X_0 seguono banalmente dalla definizione di X_θ e della sua norma. c.v.d.

Osservazione. Per ogni $x \in X_1$ vale la disuguaglianza

$$\| x \|_{X_\theta} \leq \| x \|_{X_0}^{1-\theta} \| x \|_{X_1}^{\theta} .$$

Basta infatti rappresentare x mediante la serie $x = x + 0 + 0 + \ldots$

TEOREMA 1.3. Date due coppie di spazi di Banach X_0, X_1; Y_0, Y_1 tali che $X_1 \subset X_0$, $Y_1 \subset Y_0$, X_1 e Y_1 densi rispettivamente in X_0 e Y_0 e le inclusioni $i: X_1 \to X_0$, $j: Y_1 \to Y_0$ continue, consideriamo gli spazi di Banach X_θ e Y_θ, $0<\theta<1$, definiti come dalla definizione 1.1.

Allora, ogni applicazione lipschitziana di X_0 in Y_0 e di X_1 in Y_1 è anche lipschitziana di X_θ in Y_θ, per ogni θ in $(0, 1)$.

DIMOSTRAZIONE. Siano F_0 ed F_1 applicazioni non lineari, lipschitziane, definite rispettivamente in X_0 e X_1 e tali che rendano commutativo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "F_0"] & Y_0 \\ X_\theta \arrow[u, "i_0"] & Y_\theta \arrow[u, "j_0"'] \\ X_1 \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "F_1"] & Y_1 \arrow[u, "j_1"'] \end{tikzcd}$$

cioè, tenendo presente che $i = i_0 \circ i_1$ e $j = j_0 \circ j_1$,
$F_0 \circ i = j \circ F_1$; sia

$$\| F_0(x_2) - F_0(x_1) \|_{Y_0} \leq L_0 \| x_2 - x_1 \|_{X_0}$$

$$\| F_1(x_2) - F_1(x_1) \|_{Y_1} \leq L_1 \| x_2 - x_1 \|_{X_1} .$$

Dobbiamo dimostrare che

1) $\exists F_\theta$ tale che $j_1 \circ F_1 = F_\theta \circ i_1$

2) F_θ è lipschitziana in X_θ.

Definiamo l'applicazione

$$\tilde{F}_\theta : X_1 \to Y_\theta$$

in modo da rendere commutativo il diagramma, cioè

$$\tilde{F}_\theta = j_1 \circ F_1 .$$

Dimostriamo ora che $\tilde{F}_\theta$ è lipschitziana anche quando in X_1 si assuma la metrica indotta dalla norma su X_θ.

Dati $x_1, x_2 \in X_1$ e fissato $\varepsilon > 0$, rappresentiamo la differenza $x_2 - x_1$ mediante la serie $\sum_0^\infty {}_n u_n$, in modo che

$$\sum_0^\infty {}_n \| u_n \|_{X_0}^{1-\theta} \| u_n \|_{X_1}^\theta \leq \| x_2 - x_1 \|_{X_\theta} + \varepsilon .$$

Essendo

$$\| x \|_{X_\theta} \leq \| x \|_{X_0}^{1-\theta} \| x \|_{X_1}^\theta \forall x \in X_1 \text{, si ha:}$$

$$\| \tilde{F}_\theta(x_2) - \tilde{F}_\theta(x_1) \|_{Y_\theta} \leq \| \sum_1^\infty {}_m \tilde{F}_\theta(x_1 + \sum_0^m {}_k u_k) - \tilde{F}_\theta(x_1 + \sum_0^{m-1} {}_k u_k) \|_{Y_\theta} \leq$$

$$\leq \sum_1^\infty {}_m \| \tilde{F}_\theta(x_1 + \sum_0^m {}_k u_k) - \tilde{F}_\theta(x_1 + \sum_0^{m-1} {}_k u_k) \|_{Y_\theta} \leq$$

$$\leq \sum_1^\infty {}_m \| \tilde{F}_\theta(x_1 + \sum_0^m {}_k u_k) - \tilde{F}_\theta(x_1 + \sum_0^{m-1} {}_k u_k) \|_{Y_0}^{1-\theta} \| \tilde{F}_\theta(x_1 + \sum_0^m {}_k u_k) - \tilde{F}_\theta(x_1 + \sum_0^{m-1} {}_k u_k) \|_{Y_1}^\theta \leq$$

$$\leq \sum_0^\infty {}_m L_1^\theta L_0^{1-\theta} \| u_m \|_{X_0}^{1-\theta} \| u_m \|_{X_1}^\theta \leq L_0^{1-\theta} L_1^\theta (\| x_2 - x_1 \|_{X_\theta} + \varepsilon).$$

$\tilde{F}_\theta$ è quindi lipschitziana in X_1, ma essendo X_1 denso in X_θ, si può estendere l'applicazione $\tilde{F}_\theta$ ad X_θ ottenendo così un'applicazione F_θ, lipschitziana con la medesima costante, che ha la proprietà d'interpolazione. c.v.d.

OSSERVAZIONE. La costante di Lipschitz dell'applicazione F_θ è $L_0^{1-\theta} L_1^\theta$.

§ 2.

DEFINIZIONE 2.1. Date due terne di spazi di Banach (A_0, A, A_1), (B_0, B, B_1) tali che:

1) $A_0 \subset A \subset A_1$, $B_0 \subset B \subset B_1$

2) le inclusioni $i_0 : A_0 \to A$, $i_1 : A \to A_1$, $j_0 : B_0 \to B$, $j_1 : B \to B_1$, siano continue

3) A_0 denso in A_1 , B_0 denso in B_1 ,

diciamo che formano un sistema di interpolazione per applicazioni lineari se ogni applicazione lineare continua

$$L_1 : A_1 \to B_1$$

che induce un'applicazione lineare continua

$$L_0 : A_0 \to B_0$$

induce anche un'applicazione lineare continua

$$L : A \to B$$

che renda commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{L_1} & B_1 \\ {\scriptstyle i_1}\uparrow & L & \uparrow{\scriptstyle j_1} \\ A & \longrightarrow & B \\ {\scriptstyle i_0}\uparrow & L_0 & \uparrow{\scriptstyle j_0} \\ A_0 & \longrightarrow & B_0 \end{array} .$$

Il problema che ci proponiamo di studiare è il seguente: Date due terne di spazi di Banach (A_0 , A, A_1), (B_0 , B, B_1) che formano un sistema di interpolazione per le applicazioni lineari, noi cercheremo di vedere se queste formano un sistema di interpolazione anche per applicazioni lipschitziane. In altre parole, ci chiediamo se, data un'applicazione (non lineare)

$$T_1 : A_1 \to B_1 \text{ tale che } \| T_1(u) - T_1(v) \|_{B_1} \leq M_1 \| u - v \|_{A_1} ,$$

che induce un'applicazione

$$T_0 : A_0 \to B_0$$

per cui si abbia

$$\| T_0(u) - T_0(v) \|_{B_0} \leq M_0 \| u - v \|_{A_0} ,$$

induce anche un'applicazione

$$T : A \to B$$

con la stessa proprietà:

$$\| T(u) - T(v) \|_B \leq M \| u - v \|_A .$$

TEOREMA 2.2. Date le terne (A_0, A, A_1) e (B_0, B, B_1) che formano un sistema di interpolazione di spazi di Banach per le applicazioni lineari, allora ogni applicazione che sia di classe C^1 e lipschitziana sia fra A_0 e B_0 che fra A_1 e B_1, induce un'applicazione lipschitziana d'interpolazione fra A e B.

Alla dimostrazione di questo teorema bisogna premettere il seguente lemma.

LEMMA 2.3. Date le terne (A_0, A, A_1) e (B_0, B, B_1) che formano un sistema di interpolazione di spazi di Banach per applicazioni lineari, allora l'applicazione che fa corrispondere alla coppia

$$(f_0 : A_0 \to B_0 ; \ f_1 : A_1 \to B_1)$$

l'applicazione di interpolazione

$$f : A \to B$$

è continua e limitata come applicazione di

$$\mathfrak{L}(A_0, B_0) \cap \mathfrak{L}(A_1, B_1) \to \mathfrak{L}(A, B)$$

e si ha:

$$\| f \|_{\mathfrak{L}(A, B)} \leq k(\| f_0 \|_{\mathfrak{L}(A_0, B_0)} + \| f_1 \|_{\mathfrak{L}(A_1, B_1)}).$$

DIMOSTRAZIONE. La continuità è una conseguenza del teorema del grafico chiuso.

Sia (f_{0n}, f_{1n}) una successione convergente in $\mathfrak{L}(A_0, B_0) \cap \mathfrak{L}(A_1, B_1)$ e sia f_n la successione delle applicazioni indotte fra A e B. Supponiamo che:

f_{0n} converga verso un'applicazione $f_0 \in \mathfrak{L}(A_0, B_0)$

f_{1n} converga verso un'applicazione $f_1 \in \mathfrak{L}(A_1, B_1)$

f_n converga verso un'applicazione $\tilde{f} \in \mathfrak{L}(A, B)$,

dobbiamo dimostrare che $\tilde{f}$ è proprio l'applicazione di interpolazione f indotta dalla coppia (f_0, f_1).

Sia x un elemento di A_0; si ha:

$$\lim_{n \to \infty} f_{0n}(x) = f_0(x)$$

$$\lim_{n \to \infty} j_0 \circ f_{0n}(x) = j_0 \circ f_0(x)$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(i_0(x)) = \tilde{f} \circ i_0(x).$$

Poichè per ipotesi si ha:

$$j_0 \circ f_{0n} = f_n \circ i_0 ,$$

i limiti coincidono, quindi

$$f \circ i_0(x) = j_0 \circ f_0(x) = \tilde{f} \circ i_0(x).$$

Se ne deduce che $f = \tilde{f}$ per tutti gli elementi di A_0 e perciò, per la densità di A_0 in A, è $f = \tilde{f}$.

Poichè nello spazio $\mathfrak{L}(A_0, B_0) \cap \mathfrak{L}(A_1, B_1)$ si può considerare la norma

$$\| f_0 \|_{\mathfrak{L}(A_0, B_0)} + \| f_1 \|_{\mathfrak{L}(A_1, B_1)} ,$$

si ha:

$$\| f \|_{\mathfrak{L}(A, B)} \leq k(\| f_0 \|_{\mathfrak{L}(A_0, B_0)} + \| f_1 \|_{\mathfrak{L}(A_1, B_1)}).$$

c.v.d.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.2. Siano (A_0, A, A_1) e (B_0, B, B_1) due terne di spazi di Banach tali che $A_0 \subset A \subset A_1$ e $B_0 \subset B \subset B_1$ con A_0 denso in A_1 e B_0 denso in B_1.

Supponiamo che F_0 e F_1 siano applicazioni lineari definite rispettivamente in A_0 e A_1 e che siano di classe C^1 tali da rendere commutativo il seguente diagramma (α)

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "F_1"] & B_1 \\ A \arrow[u, "i_1"] & B \arrow[u, "j_1"'] \\ A_0 \arrow[u, "i_0"] \arrow[r, "F_0"'] & B_0 \arrow[u, "j_0"'] \end{tikzcd} \qquad (\alpha)$$

Allora $\exists!\ F : A \rightarrow B$ lineare tale che

$$j_0 F_0 = F i_0$$

$$j_1 F = F_1 i_1 .$$

Siano dunque f_0 e f_1 applicazioni non lineari definite rispettivamente in A_0 e A_1, di classe C^1, lipschitziane e tali che rendano commutativo il diagramma (β)

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] & B_1 \\ A \arrow[u, "i_1"] & B \arrow[u, "j_1"'] \\ A_0 \arrow[u, "i_0"] \arrow[r, "f_0"'] & B_0 \arrow[u, "j_0"'] \end{tikzcd} \qquad (\beta)$$

cioè $j \circ f_0 = f_1 \circ i$, dove $i = i_1 \circ i_0$, $j = j_1 \circ j_0$; dobbiamo dimostrare che $\exists!$ $f : A \rightarrow B$ tale che

$$j_0 \circ f_0 = f \circ i_0$$

ed inoltre f è lipschitziana.

Definiamo dapprima l'applicazione $\tilde{f} : A_0 \rightarrow B$ in modo da rendere commutativo il diagramma (γ)

$$\begin{tikzcd} & B \\ A_0 \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f_0"'] & B_0 \arrow[u, "j_0"'] \end{tikzcd} \qquad (\gamma)$$

cioè poniamo

$$\tilde{f} = j_0 \circ f_0 .$$

$\tilde{f}$ è lipschitziana anche quando in A_0 si assume la metrica indotta da A.

Vediamo cioè che esiste k tale che, per ogni x, $x+h \in A_0$,

$$\| \tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) \|_B \leq k \| i_0(x+h) - i_0(x) \|_A .$$

Notiamo che $\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) = j_0(f_0(x+h) - f_0(x))$ ed inoltre che dalle ipotesi che f_0 e f_1 sono lipschitziane e di classe C^1 segue che f'_0 e f'_1 sono limitate.

Dunque

$$\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) = j_0(f_0(x+h) - f_0(x)) =$$

$$= j_0 \int_0^1 f'_0(x+th)hdt = \int_0^1 j_0 \circ f'_0(x+th)hdt.$$

Poichè per ipotesi il diagramma (β) è commutativo si ha che per ogni $x \in A_0$ vale la relazione

$$f_1 \circ i(x) = j \circ f_0(x)$$

e differenziando

$$(f'_1(i(x)))i = jf'_0(x).$$

Essendo le terne un sistema d'interpolazione per applicazioni lineari $\exists!$ $g(x) : A \to B$ lineare tale che

$$j_0 \circ f'_0(x) = g(x) \circ i_0$$

$$j_1 \circ g(x) = f'_1(x) \circ i_1 .$$

Da cui

$$\tilde{f}(x+h)-f(x)=\int_0^1 j_0\circ f'_0(x+th)hdt=\int_0^1 g(x+th)(i_0h)dt$$

e quindi

$$\|\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)\|_B\leq\int_0^1\|g(x+h)(i_0h)\|_B dt\leq$$

$$\leq\int_0^1\|g(x+th)\|_{\mathcal{L}(A,B)}\cdot\|i_0h\|_A\,dt.$$

Ma per il lemma (2.3) $\exists k$ tale che

$$\|g(y)\|_{\mathcal{L}(A,B)}\leq k(\|f'_0(y)\|_{\mathcal{L}(A_0,B_0)}+\|f'_1(y)\|_{\mathcal{L}(A_1,B_1)}$$

e poichè f_0 e f_1 sono lipschitziane con costanti L_0 e L_1 si avrà

$$\|g(y)\|_{\mathcal{L}(A,B)}\leq k(L_0+L_1)$$

e quindi

$$\|\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)\|_B\leq k(L_0+L_1)\|i_0h\|_A$$

$\tilde{f}$ è allora un'applicazione lipschitziana con costante $k(L_0+L_1)$.

Essendo A_0 denso in A, $\tilde{f}$ può essere prolungata ad un'applicazione

$$f: A\rightarrow B$$

lipschitziana con la stessa costante.

L'applicazione f così ottenuta ha la proprietà di interpolazione. Infatti la restrizione di f ad A_0 è $\tilde{f}$, e si ha:

$$j_1\circ f\circ i_0=j_1\circ\tilde{f}=f_1\circ i=f_1\circ i_1\circ i_0$$

quindi $j_1 \circ f = f_1 \circ i_1$ su un insieme denso, per cui esse coincidono su tutto lo spazio. c.v.d.

Browder ha dimostrato recentemente che ogni sistema d'interpolazione per autoapplicazioni lineari lo è anche per autoapplicazioni lipschitziane quando gli spazi A_0, A, A_1 soddisfano alle seguenti condizioni:

a) se $\{u_n\}_{n \in N}$ è una successione di elementi di A_0 che converge sia nella norma di A_0 che in quella di A_1 ad un elemento $u \in A_0$ ed inoltre se per ogni n

$$\| u_n \|_A \leq R$$

allora

$$\| u \|_A \leq R$$

b) esiste un insieme diretto $\{F_\alpha\}$ di sottospazi di A_0 di dimensione finita ed un corrispondente insieme di proiezioni $\{P_\alpha\}$ di A_0 in F tale che

$$P_\alpha : A_0 \to F_\alpha$$

e per ogni $u \in A_0$

$$\| P_\alpha u \|_{A_j} \leq \| u \|_{A_j} \qquad (j=1,\ 2),$$

e tale che l'unione degli F_α sia densa nella somma delle tre norme in A_0, cioè ogni elemento $u \in A_0$ è limite di una successione $\{u_n\}$ di elementi dell'unione degli F_α, che converge contemporaneamente nelle norme di A_0, A, A_1.

Come si vede noi siamo riuscite ad eliminare completamente le ipotesi particolari fatte da Browder sugli spazi formanti il sistema di interpolazione, ma in compenso abbiamo dovuto restringere la classe delle funzioni ammissibili, considerando solo funzioni di classe C^1.

Non siamo però riuscite a dimostrare che da funzione interpolata è di classe C^1.

BIBLIOGRAFIA

[1] Browder, Felix E.: *Remarks on non linear interpolation in Banach spaces,* Journal of Functional Analysis 4, 390-403 (1969).

[2] Gagliardo, E.: *Interpolation d'espaces de Banach et applications,* Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 248 (1959), 1912-1914; 3388-3390; 3517-3518.

[3] Lions, J. L.: *Some remarks on variational inequalities,* Proceedings of International Conference of Functional Analysis, Tokyo 1969.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 ottobre 1971.