RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Sul teorema dei nuclei per le distribuzioni funtoriali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 109-113

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__109_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

SUL TEOREMA DEI NUCLEI PER LE DISTRIBUZIONI FUNTORIALI

GIULIANO BRATTI *)

§ 1. In questa nota si ottiene il seguente

TEOREMA. *Sia $F : (\mathfrak{L}B) \to (\mathfrak{L}C)$ un funtore compatto-continuo della categoria degli spazi di Banach nella categoria degli spazi completi e di Hausdorff.*

Lo spazio vettoriale topologico ${}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{x,y}} \to F\}$ *è isomorfo, algebricamente e topologicamente, allo spazio* $\mathrm{Hom}_c(\mathfrak{D}_x\,;\ {}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_y} \to F\})$ $(\simeq \mathfrak{D}'_x \,\widehat{\otimes}_\varepsilon\, {}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_y} \to F\}$, [4], p. 361). (Le notazioni sono quelle di Popa in [2]; $\mathfrak{D}_{x,y}$, $\mathfrak{D}_x$ e $\mathfrak{D}_y$ sono gli spazi delle « test fonctions » nelle variabili indicate).

Tenuta presente la proposizione 2 di [2], p. 673, se $F \equiv \varepsilon_{\boldsymbol{C}}$, $\boldsymbol{C}$ il corpo complesso, poichè $\mathfrak{D}_{x,y}$ e $\mathfrak{D}_x$ hanno la proprietà dell'approssimazione, [3], p. 6, si ha:

$$ {}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{x,y}} \to F\} = \mathfrak{D}'_{x,y} \ \text{ e } \ {}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_y} \to F\} \simeq \mathfrak{D}'_y\,; $$

il teorema di sopra dà allora, come caso particolare, *il teorema dei nuclei di Schwartz,* $\mathfrak{D}'_x \,\widehat{\otimes}_\varepsilon\, \mathfrak{D}'_y \simeq \mathfrak{D}'_{x,y}$, [3], p. 93.

È facile vedere, e la dimostrazione è del tutto simile a quella riportata in § 2 per il teorema enunciato, che si può estendere, comprendendo parte della proposizione 28 di [3], p. 98, il teorema enunciato in questo modo:

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Via Belzoni, 3 - Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

Siano $A_{x,y}$, A_x *e* A_y *spazi vettoriali topologici con la proprietà dell'approssimazione, nucleari, di Fréchet o tali che* $\forall E$ *spazio di Banach,* $A_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E = \lim \operatorname{ind} A^{(n)}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ *se* $A_{x,y} = \lim \operatorname{ind} A^{(n)}_{x,y}$ *con* $A^{(n)}_{x,y}$ *di Fréchet, analogamente su* A_x *e* A_y*;* A'_x *abbia la proprietà dell'approssimazione. Si supponga che:*

a) $A_x \otimes A_y$ *è denso in* $A_{x,y}$*;* $\forall a_x \in A_x$ *la mappa* $a_x : A_y \to A_{x,y}$, $a_x(a_y) = a_x \otimes a_y$ *è continua; così* $\forall a_y \in A_y$ *da* A_x *in* $A_{x,y}$*;*

b) $A_{x,y} \subset A_x \widehat{\otimes}_\varepsilon A_y$ *e l'iniezione è continua.*

Allora:

$$_c\{\varepsilon_{A_{x,y}} \to F\} \simeq \operatorname{Hom}_c(A_x\,;\ _c\{\varepsilon_y \to F\}) \simeq A'_x \widehat{\otimes}_\varepsilon\, _c\{\varepsilon_{A_y} \to F\}$$

algebricamente e topologicamente.

§ **2.** Per la dimostrazione del teorema enunciato in § 1 si farà uso essenziale del teorema di A. Grothendieck di [1], p. 52; si ha: *Se E e F sono spazi di Frèchet ogni parte compatta di* $E \widehat{\otimes}_\pi F$ *è contenuta nell'inviluppo convesso bilanciato e chiuso di un insieme* $A \otimes B$ *dove A (risp. B) è una parte compatta di E (risp. F).*

Dimostrazione del Teorema di § 1. Sia $x : {_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{x,y}}} \to F\} \to$ $\to \operatorname{Hom}_c(\mathfrak{D}_x\,;\ _c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_y} \to F\})$ la mappa lineare così definita:

$$\forall \varphi(x) \in \mathfrak{D}_x \text{ e } \forall E \in \mathcal{O}b(\mathfrak{L}B),\ \langle \chi(T)\cdot\varphi \rangle^E : \mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\varepsilon E \to F(E),$$
$$\langle \langle \chi(T)\cdot\varphi \rangle^E \cdot \psi(y) \rangle = \langle T^E \cdot \varphi(x) \otimes \psi(y) \rangle.$$

Che $\varphi(x) \otimes \psi(y) \in \mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ se $\psi(y) \in \mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ è facile vedere; che la $\chi(T)$ sia continua si può vedere così: se K è un compatto di $\mathfrak{D}_x$ e K_1 è compatto in $\mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $K_1 \subset \mathfrak{D}_y(H) \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ con H conveniente compatto dei reali e quindi, per il teorema di Grothendieck ricordato, $K_1 \subset \Gamma_b$ $(A \otimes B)$ con A e B compatti in $\mathfrak{D}_y(H)$ e in E rispettivamente; $K \otimes A$ è compatto in $\mathfrak{D}_{x,y}$ poichè la mappa $m : \mathfrak{D}_x(H_1) \times \mathfrak{D}_y(H) \to \mathfrak{D}_{xy}$, $m(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi$ è separatamente continua su spazi di Frèchet e quindi continua, [4], p. 354; ne deriva che $(K \otimes A) \otimes B$ è compatto in $\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$. Allora, per la continuità di $T^E : \mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E \to F(E)$,

$\langle T^E \cdot (K \otimes A) \otimes B \rangle = \langle \langle \chi(T) \cdot K \rangle^E \cdot A \otimes B \rangle$ è limitato in $F(E)$; è quindi limitato in $F(E)$ anche $\langle \langle \chi(T) \cdot K \rangle^E \cdot K_1 \rangle$. Dunque $\chi(T)$ è un morfismo (la commutatività dei diagrammi relativi è immediata) continuo di $\varepsilon_{\mathfrak{D}_y}$ in F. È immediato vedere che anche la $\langle \chi(T) \cdot \varphi \rangle^E : \mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\varepsilon E \to F(E)$ è continua.

a) χ *è iniettiva*:

se

$$\chi(T) = 0, \ \forall E \in \mathcal{O}b(\mathfrak{L}B), \ \langle T^E \cdot \varphi(x) \otimes \psi(y) \otimes e \rangle = 0.$$

Poichè $(\mathfrak{D}_x \otimes \mathfrak{D}_y) \otimes E$ è denso in $\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $T^E \equiv 0$ e quindi $T \equiv 0$.

b) χ *è suriettiva*:

${}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{x,y}} \to F\}$ è completo poichè sottospazio chiuso del prodotto, con la topologia prodotto, $X\{\mathrm{Hom}_c(\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E)), \forall E \in \mathcal{O}b(\mathfrak{L}B)\}$ e questi spazi sono completi, [4], p. 345. Se

$$L \in {}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{x,y}} \to F\}, \ L = \lim_J \Sigma_k^{(J)} U_K \otimes V_K ,$$

somme finite, $U_k \in \mathfrak{D}'_x$, $V_k \in {}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_y} \to F\}$. Se U e V sono del tipo di sopra, la mappa lineare $U \widehat{\otimes}_\varepsilon V^E : \mathfrak{D}_x \widehat{\otimes}_\varepsilon (\mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\varepsilon E) \to F(E)$ è continua; visto che $\mathfrak{D}_x \widehat{\otimes}_\varepsilon (\mathfrak{D}_y \widehat{\otimes}_\varepsilon E)$ è isomorfo a $(\mathfrak{D}_x \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathfrak{D}_y) \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, [1], p. 51, e che esiste isomorfismo algebrico e continuo fra $\mathfrak{D}_{x,y}$ e $\mathfrak{D}_x \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathfrak{D}_y$, ($\mathfrak{D}_{x,y} = \mathfrak{D}_x \widehat{\otimes}_i \mathfrak{D}_y$ e $i \geq \varepsilon$, [4], p. 95), $U \widehat{\otimes}_\varepsilon V^E$ si può pensare con dominio $\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ e codominio $F(E)$.

Indicati con $(\Sigma_k^{(J)} U_k \otimes V_k)^\sim$ i morfismi funtoriali di $\varepsilon_{\mathfrak{D}_{x,y}}$ in F ottenuti come sopra dai termini del limite per L, dimostriamo che in ${}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{x,y}} \to F\}$ la rete $(\Sigma_k^{(J)} U_k \otimes V_k)^\sim$ è di Cauchy, per il che è sufficiente far vedere che la rete $\Sigma_k^{(J)} U_k \widehat{\otimes}_\varepsilon V_k^E$ è di Cauchy in

$$\mathrm{Hom}_c(\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E; F(E));$$

è immediato vedere poi che se $L' = \lim_J (\Sigma_k^{(J)} U_k \otimes V_k)^\sim$ $\chi(L') = L$.

Se A è compatto in $\mathfrak{D}_{x,y} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $A \subseteq \Gamma_{\bar{b}}(A_1 \otimes A_2)$ A_2 compatto in E; a causa della proposizione 1 di [3'], p. 17, $A_2 \subset \Gamma_{\bar{b}}(A_3 \otimes A_4)$. In definitiva: $A \subset \Gamma_{\bar{b}}(\Gamma_{\bar{b}}(A_3 \otimes A_4) \otimes A_2)$. Poichè la rete $\Sigma_k^{(J)} U_k \otimes V_k$ è di

Cauchy in $\mathrm{Hom}_c(\mathfrak{D}_x\,;\ {}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_y}\to F\})$ se V è intorno di zero in $F(E)$ esiste J_0 tale che se J_1 e $J_2 \geq J_0$:

$$\Sigma_k^{(J_1)}\langle U_k\cdot\varphi\rangle\langle V_k^E\cdot\psi(y)\otimes e\rangle-\Sigma_k^{(J_2)}\langle U_k\cdot\varphi\rangle\langle V_k^E\cdot\psi(y)\otimes e\rangle\in V,$$
$$\forall\varphi\in A_3\,,\ \forall\psi\in A_4 \text{ e } \forall e\in A_2\,.$$

Se

$$\varphi(x,\ y)\in\Gamma_b(A_3\otimes A_4)\otimes A_2\,,\ \langle(\Sigma_k^{(J_1)}\ldots)^{\sim}-(\Sigma_k^{(J_2)}\ldots)\cdot\varphi(x,\ y)\rangle\in V$$

così come se

$$\varphi(x,\ y)\in\Gamma_{\bar b}(A_3\otimes A_4)\otimes A_2$$

e se

$$\varphi(x\,,\ y)\in\Gamma_{\bar b}(\Gamma_{\bar b}(A_3\otimes A_4)\otimes A_2).$$

Ciò significa che la rete $\Sigma_{(J)}^k U_k\,\widehat{\otimes}_\varepsilon\,V_k$ è di Cauchy.

c) χ *è un omeomorfismo.*

Sia $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}(A;\ \mathfrak{U}(B;\ V))$ intorno di zero in

$$\mathrm{Hom}_c(\mathfrak{D}_x\,;\ {}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_y}\to F\}$$

della pre-base, A compatto in $\mathfrak{D}_x$, B in $\mathfrak{D}_y\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ e V intorno di zero in $F(E)$. Dire che $\chi(T)\in\mathfrak{U}$ equivale a dire che $\langle T^E\cdot\varphi(x)\psi(y)\rangle\in V$ $\forall\varphi(x)\in A$, $\forall\psi(y)\in B$. Se

$$m:\ \mathfrak{D}_x(K)\times\mathfrak{D}_y(H)\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E\to\mathfrak{D}_{x,j}\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E$$

è la mappa $m(\varphi,\ \psi)=\varphi\otimes\psi$, essa è separatamente continua [1]) e quindi continua. Ne segue $A\otimes B$ è compatto $\mathfrak{D}_{x,j}\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E$; sicchè al fine che

---

[1]) Se $\varphi(x)\in\mathfrak{D}_x(K)$, $m_\varphi\colon\mathfrak{D}_y\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E\to\mathfrak{D}_{x,y}\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $m_\varphi(\psi(y))=\varphi(x)\otimes\psi(y)$ è continua poichè $m_\varphi=\tilde{m}_\varphi\,\widehat{\otimes}_\varepsilon 1_E$ dove $\tilde{m}_\varphi:\mathfrak{D}_y\to\mathfrak{D}_{x,y}$ è la moltiplicazione e 1_E l'identità di E. Se $\psi(y)\in\mathfrak{D}_y(H)\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $m_\varphi:\mathfrak{D}_x(K)\to\mathfrak{D}_{x,y}\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ è continua, per verificarlo è sufficiente tener presente che la topologia in $\mathfrak{D}_{x,y}\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E$ ha un sistema di intorni dello zero negli $\mathfrak{U}(\{\alpha\};\ V)$, $\{\alpha\}$ equicontinuo in E', V intorno di zero in $\mathfrak{D}_{x,y}$; $\varphi(x,\ y)\in\mathfrak{U}(\{\alpha\},\ V)$ se $\forall\alpha\in\{\alpha\}$, $\alpha(\varphi(x,\ y))\in V$.

$\chi(T)\in\mathcal{U}$ è sufficiente che $T^E\in\mathcal{U}(A\otimes B,\ V)$ intorno di zero in $\mathrm{Hom}_c(\mathfrak{D}_{x,y}\hat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E))$, *ciò implica la continuità di* χ. Si ha pure, con il procedimento ed i simboli della dimostrazione in b), che

$$\chi(p_E^{-1}(\mathcal{U}(A;\ V)))\supset\mathcal{U}(A_3,\ \mathcal{U}(A_4;\ V)),$$

$\mathcal{U}(A;\ V)$ intorno di zero in $\mathrm{Hom}_c(\mathfrak{D}_{x,y}\otimes_\varepsilon E;\ F(E))$, p_E E-esima proiezione di ${}_c\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{x,y}}\rightarrow F\}$ in

$$x\{\mathrm{Hom}_c(\mathfrak{D}_{x,y}\hat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E)),\ E\in\mathcal{O}b(\mathfrak{L}B)\}.$$

Segue che χ è bicontinua e la dimostrazione è del tutto conclusa.

BIBLIOGRAFIA

[1] Grothendieck, A.: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléairs*, Amer. Math. Society, number 16, 1966.

[2] Popa, N.: *Quelques applications de la thèorie des catègories dans la thèorie des distributions*, Revue Roumaine des mathèmatiques pures et applique, 1968.

[3] Schwartz, L.: *Théorie des distributions a valeurs vectorielles*, Ann. Ist. Fourier, Tomo 7, 1957 et

[3′] Schwartz, L.: *Théorie des distributions a valeurs vectorielles*, Ann. Ist. Fourier, Tomo 8, 1958.

[4] Treves, F.: *Topological vector spaces, distributions and Kernels*, Ac. Press, 1967.

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 ottobre 1971.