

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GERHARD SCHMEISSER

Zur Lage der kritischen Punkte eines Polynoms

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 46 (1971), p. 405-415

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__405_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ZUR LAGE DER KRITISCHEN PUNKTE
EINES POLYNOMS

GERHARD SCHMEIßER *)

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. W. Specht,
zum 65. Geburtstag gewidmet.

1. Eine Vermutung von B. H. Sendov¹⁾, die als Vermutung von Ilieff in die Literatur eingegangen ist besagt:

Liegen die Nullstellen eines Polynoms

$$(1) \quad f(z) = \prod_{\nu=1}^n (z - \zeta_{\nu})$$

vom Grad $n \geq 2$ im Einheitskreisbereich $|z| \leq 1$, so enthält jeder Kreisbereich

$$(2) \quad |z - \zeta_{\nu}| \leq 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

mindestens eine Nullstelle der Ableitung, also einen sogenannten kritischen Punkt von $f(z)$.

Ein Beweis ist bisher nur in Spezialfällen gelungen. Es wurden einerseits Polynome von kleinem Grad n untersucht, wobei man insgesamt für $2 \leq n \leq 5$ Erfolg hatte (vergl. [2], [5], [7], [8], [9] und [10]). Andererseits wurden Klassen von Polynomen angegeben, für die die Vermutung ohne zusätzliche Voraussetzungen über den Grad gezeigt werden konnte. So gilt die Vermutung, wenn der Rand des Pflerchbereichs von $f(z)$ eine gewisse geometrische Eigenschaft erfüllt ([10], Satz 1)

*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Institut der Universität, 8520 Erlangen, Bismarckstraße 1 1/2, Germania occ.

¹⁾ Vergl. Math. Rev. 40 (1970), S. 521 Referat 2831.

oder das konstante Glied verschwindet ([10], Satz 3) oder die Faktorzerlegung von $f(z)$ eine bestimmte ausgezeichnete Gestalt besitzt ([9], Theorem 2; vergl. auch Abschnitt 5 dieser Arbeit). Da man offenbar weit davon entfernt ist, die Vermutung von Ilieff allgemein zu beweisen, schlagen wir im Abschnitt 2 zwei Wege vor, auf denen man sich ihr nähern kann und geben in den Abschnitten 3 und 4 jeweils ein erstes Ergebnis dazu an. Im Abschnitt 5 beschäftigen wir uns mit einer Klasse von Lückenpolynomen für die die Vermutung von Ilieff bewiesen werden kann.

2. In der analytischen Theorie der Polynome kennt man eine Reihe von Abschätzungen für die Beträge aller Nullstellen eines Polynoms (vergl. [6], Chap. VII; [11], Abschnitt B). Eine so gewonnene obere Schranke nennt man auch kurz eine « Nullstellenschranke des Polynoms ». Im Hinblick auf die Vermutung von Ilieff ist die folgende schwächere Fragestellung naheliegend.

PROBLEM 1. *Es sei $r(f)$ eine gewisse Nullstellenschranke. Man zeige, daß dann für jede Nullstelle ζ eines beliebigen Polynoms $f(z)$ der Kreisbereich $|z - \zeta| \leq r(f)$ wenigstens eine Nullstelle der Ableitung enthält.*

Da die meisten Nullstellenschranken für gewisse ausgezeichnete Polynome angenommen werden, kann man mit den Lösungen von Problem 1 eventuell neue Klassen von Polynomen finden, für die die Vermutung von Ilieff gilt.

Unser zweiter Vorschlag besteht darin, sich der Vermutung approximativ zu nähern, ohne dabei die zulässigen Polynome irgendwelchen Einschränkungen zu unterwerfen.

PROBLEM 2. *Man bestimme eine (möglichst kleine) universelle Konstante ρ , so daß für jedes Polynom der Gestalt (1) mit $n \geq 2$ jeder Kreisbereich*

$$|z - \zeta_\nu| \leq \rho \max_{1 \leq \mu \leq n} |\zeta_\mu| \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

wenigstens eine Nullstelle der Ableitung enthält.

Wie einfache Beispiele zeigen, gilt $\rho \geq 1$. Die Vermutung von Ilieff besagt somit, daß $\rho = 1$ die bestmögliche Lösung von Problem 2 ist.

3. Wir behandeln zunächst das Problem 1 und beweisen den

SATZ 1. *Ist $r(f)$ eine Nullstellenschranke, die nur von den Beträgen der Koeffizienten des Polynoms*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{\nu} \quad (n \geq 2, a_n \neq 0)$$

abhängt, so enthält für jede Nullstelle ζ von $f(z)$ der Kreisbereich $|z - \zeta| \leq r(f)$ wenigstens eine Nullstelle der Ableitung.

BEWEIS. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $r := r(f)$ die Cauchyschranke ist, da diese von keiner anderen nur von den Beträgen der Koeffizienten abhängenden Nullstellenschranke unterboten wird. Dann erfüllt r bekanntlich die Gleichung

$$(3) \quad |a_0| + |a_1| r + \dots + |a_{n-1}| r^{n-1} = |a_n| r^n.$$

Ist ζ eine Nullstelle von $f(z)$, so können wir ferner voraussetzen, daß $0 \leq \zeta \leq r$ ist, da sich bei jeder Drehung der komplexen Zahlenebene um den Nullpunkt die Beträge der Koeffizienten nicht ändern. Nun bilden wir

$$(4) \quad rf'(\zeta) = rf'(\zeta) - \frac{n}{2} f(\zeta) = -\frac{n}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \zeta^{\nu-1} \left(\nu r - \frac{n}{2} \zeta \right).$$

Für die reellen Funktionen

$$h_{\nu}(x) := x^{\nu-1} \left(\nu r - \frac{n}{2} x \right)$$

gilt, falls $\nu \geq 2$

$$h_{\nu}(0) = 0 \quad \text{und} \quad h_{\nu}(r) = r^{\nu} \left(\nu - \frac{n}{2} \right);$$

ferner besitzt $h_{\nu}(x)$ für $x_{\nu} := \frac{2r(\nu-1)}{n}$ ein relatives Maximum. Ist $\nu-1 \geq n/2$, so gilt $x_{\nu} \geq r$. Für $\nu-1 < n/2$ bekommt man

$$|h_{\nu}(x_{\nu})| = r |x_{\nu}^{\nu-1}| \leq r^{\nu}.$$

Unter Einbeziehung des trivialen Falles $\nu = 1$ haben wir somit für $1 \leq \nu \leq n$

$$\max_{0 \leq x \leq r} |h_\nu(x)| \leq r^\nu \max \left(1, \left| \nu - \frac{n}{2} \right| \right) \leq \frac{n}{2} r^\nu.$$

Wenn wir in (4) zu den Beträgen übergehen und die Dreiecksungleichung anwenden, so bekommen wir demnach

$$|rf'(\zeta)| \leq \frac{n}{2} \sum_{\nu=0}^n |a_\nu| r^\nu.$$

Ausnützung der Definitionsgleichung (3) der Cauchyschranke liefert

$$\left| \frac{f'(\zeta)}{na_n} \right| \leq r^{n-1}.$$

Der Satz von Vieta und der Satz vom geometrischen Mittel ergeben nun, daß $f'(z)$ mindestens eine Nullstelle in $|z - \zeta| \leq r$ besitzt. Wie das Beispiel

$$f(z) = z^n - 1$$

zeigt, kann in Satz 1 das Gleichheitszeichen angenommen werden.

Für die Vermutung von Ilieff bekommen wir das

KOROLLAR. *Für ein Polynom*

$$f(z) = a_n z^n - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu$$

vom Grad $n \geq 2$ mit reellen Koeffizienten $a_\nu \geq 0$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$) ist die Vermutung von Ilieff richtig.

Eine bekannte Technik um Nullstellenschranken zu gewinnen, die auch beim Beweis des Satzes von Eneström-Kakeya angewandt wird, besteht darin, daß man das zu untersuchende Polynom mit einem bekannten Polynom multipliziert und für das so entstehende neue Polynom die Cauchyschranke oder eine dazugehörige Majorante bildet. Schranken dieses Typs hängen von den Beträgen gewisser Linearkombinationen der Koeffizienten des gegebenen Polynoms ab. Es wäre wünschenswert, auch für solche Schranken Problem 1 zu lösen.

4. Wir wenden uns nun dem Problem 2 zu. Aus den fundamentalen Sätzen der analytischen Theorie der Polynome kann man leicht Abschätzungen für ρ von unterschiedlicher Qualität gewinnen.

Zunächst liefert der Satz von Gauß-Lucas sofort

$$\rho \leq 2.$$

Mit Hilfe eines Satzes von Biernacki [1] oder einem Vorgehen wie in [10], Satz 3, das direkt auf dem Satz von Grace beruht, bekommt man nach einer einfachen geometrischen Überlegung

$$\rho \leq \sqrt{3} = 1,732 \dots$$

Eine weitere Verbesserung liefert uns das folgende Lemma, das in [4] und [10] bewiesen wurde und sich als einfache Konsequenz eines bekannten Satzes von Laguerre erweist.

LEMMA. *Liegen die Nullstellen eines Polynoms $f(z)$ vom Grad $n \geq 2$ in einem Kreisbereich $|z - a| \leq r$, und ist ζ eine Nullstelle, die auf dem Rand liegt, so enthält der Kreisbereich*

$$\left| z - \frac{\zeta + a}{2} \right| \leq \frac{r}{2}$$

mindestens eine Nullstelle von $f'(z)$.

Der kleinste abgeschlossene Kreisbereich, der alle Nullstellen von $f(z)$ enthält, besitzt auf seinem Rand entweder mindestens zwei diametral liegende Nullstellen, oder es liegen mindestens drei Nullstellen auf dem Rand, so daß dieser Umkreis des aus diesen Nullstellen gebildeten Dreiecks ist. Beachtet man, daß durch diese Nullstellen nach obigem Lemma Nullstellen der Ableitung lokalisiert werden, so findet man

$$(5) \quad \rho \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618 \dots$$

Wir wollen nun diese Abschätzung durch zweimalige Anwendung des Lemmas noch etwas verbessern.

O.B.d.A. können wir annehmen, daß $f(z)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 3$ ist, dessen Nullstellen im Einheitskreisbereich liegen, wobei ζ_1 , ζ_2 und ξ drei Nullstellen vom Betrag 1 sind mit

$$\operatorname{Re} \zeta_1 \geq 0, \operatorname{Im} \zeta_1 > 0, \zeta_2 = \overline{\zeta_1} \text{ und } \operatorname{Re} \xi < 0.$$

Der Fall von genau zwei diametral liegenden Nullstellen wird sich bei der folgenden Untersuchung als Spezialfall ergeben.

Liegen außerhalb des von ζ_1 , ζ_2 und ξ aufgespannten Dreiecks keine Nullstellen, so ist nach [10], Satz 1 die Vermutung von Ilieff für $f(z)$ richtig. Wir können deshalb voraussetzen, daß in

$$B := \{z \mid |z| \leq 1\} \cap \{z \mid \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \zeta_1\}$$

Nullstellen von $f(z)$ liegen und brauchen uns o.B.d.A. nur um diese zu kümmern.

Für ein festes $\varphi \in (0, \arg \zeta_1)$ und $\lambda \in [\sin \varphi, \operatorname{Im} \zeta_1]$ definieren wir nun

$$\delta_\lambda := \lambda \cot \varphi - \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad r_\lambda := \frac{\lambda}{\sin \varphi}$$

und

$$K_\lambda := \{z \mid |z + \delta_\lambda| \leq r_\lambda\}.$$

Der Rand von K_λ schneidet den Einheitskreis in $\sqrt{1 - \lambda^2} \pm i\lambda$. Für $\lambda = \sin \varphi$ ist K_λ der Einheitskreisbereich. Läßt man λ im Intervall $[\sin \varphi, \operatorname{Im} \zeta_1]$ laufen, so tritt einer der folgenden Fälle ein:

a) Alle Nullstellen von $f(z)$ liegen in $K_{\operatorname{Im} \zeta_1}$.

b) Es gibt ein λ , so daß alle Nullstellen von $f(z)$ in K_λ liegen und ferner mindestens eine Nullstelle aus B , etwa ζ_3 auf dem Rand von K_λ liegt.

Für komplexe Zahlen η und a definieren wir nun

$$C(\eta, a) := \left\{ z \mid \left| z - \frac{\eta + a}{2} \right| \leq \frac{|\eta - a|}{2} \right\}$$

und wenden uns zunächst dem Fall *b* zu. Setzen wir $C_v := C(\zeta_v, 0)$

für $\nu=1, 2$ und $C_3 := C(\zeta_3, -\delta_\lambda)$, so folgt nach dem Lemma, daß in den Kreisbereichen C_ν ($\nu=1, 2, 3$) jeweils mindestens eine Nullstelle von $f'(z)$ liegt. Mit der Bezeichnung

$$(6) \quad d := \sup_{z \in B \cap K_\lambda} \min_{1 \leq \nu \leq 3} \max_{w \in C_\nu} |z - w|$$

enthält dann für jede Nullstelle $\zeta \in B$ der Kreisbereich $|z - \zeta| \leq d$ mindestens eine Nullstelle von $f'(z)$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $\operatorname{Im} \zeta_3 \geq 0$ ist. Dann ändern wir d nicht, wenn wir B durch $B' := B \cap \{z \mid \arg z \leq \arg \zeta_3\}$ ersetzen und den Kreisbereich C_1 außer acht lassen. Ersetzt man ferner C_2 durch $C'_2 := C(-i, 0)$ und schließlich C'_2 durch $C''_2 := C(-\delta_\lambda - ir_\lambda, -\delta_\lambda)$, so vergrößert man d . Mit $C''_3 := C_3$ haben wir somit

$$d \leq \sup_{z \in B' \cap K_\lambda} \min_{2 \leq \nu \leq 3} \max_{w \in C''_\nu} |z - w| =: d''.$$

d'' läßt sich nun leicht abschätzen. Sind u_2 und u_3 die Mittelpunkte von C''_2 und C''_3 , so schneide die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{u_2 u_3}$ den von $-\delta_\lambda - ir_\lambda$ nach ζ_3 im mathematisch positiven Sinne verlaufenden Randbogen von K_λ in v . Dann gilt

$$(7) \quad d'' \leq \frac{r_\lambda}{2} + |u_2 - v|.$$

Man sieht nun sofort, daß die rechte Seite von (7) unter allen möglichen Lagen von ζ_3 dann am größten wird, wenn ζ_3 der in $\operatorname{Im} z \geq 0$ gelegene Schnittpunkt von $|z| = 1$ mit $|z + \delta_\lambda| = r_\lambda$ ist. Eine elementare Rechnung liefert

$$d'' \leq \frac{\lambda}{\sin \varphi} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4} - \left(\frac{1 - \sin \varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] =: d_1(\lambda).$$

Für $\lambda = \operatorname{Im} \zeta_1$ ist damit auch der Fall a berücksichtigt.

Wir wollen nun noch ein zweites Mal das Lemma anwenden. Der Rand von K_λ schneidet die positive reelle Achse in $r_\lambda - d_\lambda$. Damit sieht man sofort, daß

$$\begin{aligned} \sup_{z \in B \cap K_\lambda} \min_{1 \leq v \leq 2} \max_{w \in C_v} |z - w| &= \frac{1}{2} + \left| \frac{\zeta_1}{2} - r_\lambda + \delta_\lambda \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} + \left| \frac{i}{2} - r_\lambda + \delta_\lambda \right| =: d_2(\lambda). \end{aligned}$$

Umformung ergibt

$$d_2(\lambda) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \lambda^2 \left(\tan \frac{\varphi}{2} \right)^2 + 1 - \lambda^2 + 2\lambda \sqrt{1 - \lambda^2} \tan \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Durch differenzieren nach λ stellt man fest, daß $d_2(\lambda)$ für $\lambda \in [\sin \varphi, 1]$ monoton fällt, während $d_1(\lambda)$ monoton wächst. Deshalb besteht für jedes feste $\lambda \in [\sin \varphi, 1]$ die Ungleichung

$$(8) \quad \rho \leq \max(d_1(\lambda), d_2(\lambda)).$$

Für $\lambda = \sin \varphi$ gilt

$$d_1(\sin \varphi) < d_2(\sin \varphi) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

d.h. (8) liefert die Abschätzung (5). Für $\lambda = 1$ findet man

$$d_1(1) \geq d_2(1).$$

Somit besitzt die Gleichung

$$(9) \quad d_1(\lambda) - d_2(\lambda) = 0$$

im Intervall $[\sin \varphi, 1]$ genau eine Nullstelle λ^* , die für festes φ unter allen Abschätzungen (8) die bestmögliche liefert.

Der Einfachheit halber setzen wir nun $\varphi = \pi/3$. Mit

$$(10) \quad c := \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt dann $d_1(\lambda) = \lambda \frac{2}{\sqrt{3}} c$. Führen wir in (9) $\tau := d_1(\lambda)$ als neue Variable

ein, so bekommen wir nach einer Umformung

$$(11) \quad \tau^4 \left(1 + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^4} \right) - \tau^3 \left(2 + \frac{1}{c^2} \right) - \tau^2 \left(1 + \frac{2}{c^2} \right) + 2\tau + 1 = 0.$$

Eine numerische Rechnung liefert für die in (c, ∞) gelegene Nullstelle τ_0 dieses Polynoms den Wert $\tau_0 = 1,5677 \dots$. Damit haben wir den

SATZ 2. *Ist c durch (10) gegeben, und bezeichnet τ_0 die (einzige) in (c, ∞) gelegene Nullstelle der Gleichung (11), so gilt für die Konstante ρ von Problem 2 die Abschätzung*

$$1 \leq \rho \leq \tau_0 < 1,568.$$

5. In [9] wurde gezeigt, daß für ein Polynom der Gestalt

$$f(z) = (z - \zeta_0)^{n_0} (z - \zeta_1)^{n_1} (z - \zeta_2)^{n_2}$$

die Vermutung von Ilieff richtig ist. Als Analogon in der additiven Struktur beweisen wir den folgenden

SATZ 3. *Für ein Polynom der Gestalt*

$$f(z) = a_0 z^{n_0} + a_1 z^{n_1} + a_2 z^{n_2}$$

$$(a_2 \neq 0, n_0 < n_1 < n_2 \geq 2)$$

ist die Vermutung von Ilieff richtig.

BEWEIS. Ist $n_0 \geq 1$, so ist nach [10], Satz 3 nichts mehr zu beweisen. Ist $n_0 = 0$ und $n_1 \geq 2$, so besitzt die Ableitung die Nullstelle Null; diese liegt in jedem der Kreisbereiche (2), und wir sind wiederum fertig. Es bleibt also nur der Fall

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^{n_2},$$

wobei wir o.B.d.A. voraussetzen können, daß $\frac{a_1}{a_2} > 0$ ist. Ferner genügt

es, nur $n_2 \geq 4$ zu betrachten. Dann besitzt $f'(z)$ die Nullstellen

$$(12) \quad \eta_\nu := \left| \frac{a_1}{n_2 a_2} \right|^{\frac{1}{n_2-1}} \varepsilon_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n_2-1),$$

wobei die ε_ν die (n_2-1) -ten Einheitswurzeln bezeichnen. Nach dem Satz von Gauß-Lucas gilt $|\eta_\nu| \leq 1$. Da $n_2 \geq 4$, sieht man aufgrund der Darstellung (12) leicht ein, daß die Vereinigung der Kreisbereiche $|z - \eta_\nu| \leq 1$ den Einheitskreisbereich überdeckt. Für jede Nullstelle ζ von $f(z)$ existiert dann ein ν mit $|\zeta - \eta_\nu| \leq 1$.

Mit Hilfe der Beweisidee von Satz 3 läßt sich allgemeiner ein hinreichendes Kriterium für die Gültigkeit der Vermutung von Ilieff gewinnen, das besonders für großes n eine reichhaltige Klasse von Polynomen umfaßt.

SATZ 4. Für das Polynom

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu \quad (n \geq 4, a_n \neq 0)$$

sei entweder

$$a_1 = 0,$$

oder es gebe ein $\alpha > 0$, so daß

$$(13) \quad P_\alpha := \frac{\sum_{\nu=1}^n \nu |a_\nu| \alpha^{\nu-1}}{(n a_n a_1 \alpha^{n-1})^{\frac{1}{2}}} \leq \exp \left(\frac{1}{20\pi} \left(n-7 + \frac{9}{n-1} \right) \right).$$

Dann ist die Vermutung von Ilieff für $f(z)$ richtig.

BEWEIS. Unter der Voraussetzung (13) folgt nach einem Satz von Ganelius [3], daß $f'(z)$ in jedem Sektor mit Spitze im Nullpunkt und Öffnungswinkel $\frac{2\pi}{3}$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Damit verläuft der weitere Beweis wie bei Satz 3.

Für hinreichend großes n_2 ($n_2 > 50$) folgt Satz 3 auch aus dem Satz 4. Man beachte, daß die Bedingung (13) wegen des Parameters α keine Nullstellenschranke beinhaltet.

LITERATUR

- [1] BIERNACKI, M.: *Sur les zéros des polynomes*, Ann. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A. **9**, 81-98 (1957).
- [2] BRANNAN, D. A.: *On a conjecture of Ilyeff*, Proc. Camb. Phil. Soc. **64**, 83-85 (1968).
- [3] GANELIUS, T.: *Sequences of analytic functions and their zeros*, Arkiv för Mat. **3**, 1-50 (1953).
- [4] GOODMAN, A. W., RAHMAN, Q. I. and RATTI, J. S.: *On the zeros of a polynomial and its derivative*, Proc. Amer. Math. Soc. **21**, 273-274 (1969).
- [5] JOYAL, A.: *On the zeros of a polynomial and its derivative*, J. Math. Anal. Appl. **26**, 315-317 (1969).
- [6] MARDEN, M.: *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable*, Math. Surveys, Vol. **3**, New York: Amer. Math. Soc. 1949.
- [7] MEIR, A and SHARMA, A.: *On Ilyeff's conjecture*, Pacific J. Math. **31**, 459-467 (1969).
- [8] RUBINSTEIN, Z.: *On a problem of Ilyeff*, Pacific J. Math. **26**, 159-161 (1969).
- [9] SAFF, E. B. and TWOMEY, J. B.: *A note on the location of critical points of polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **27**, 303-308 (1971).
- [10] SCHMEISSER, G.: *Bemerkungen zu einer Vermutung von Ilyeff*, Math. Z. **111**, 121-125 (1969).
- [11] SPECHT, W.: *Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten*, Enzyklop. d. math. Wissensch. I, **1**, Heft 3, II, Stuttgart: Teubner 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 settembre 1971.