RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

Regolarizzazione delle distribuzioni funtoriali, di una variabile, quasi periodiche, mediante funzioni funtoriali, e loro approssimazioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 397-404

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__397_0>

REGOLARIZZAZIONE DELLE DISTRIBUZIONI FUNTORIALI, DI UNA VARIABILE, QUASI PERIODICHE, MEDIANTE FUNZIONI FUNTORIALI, E LORO APPROSSIMAZIONI

GIULIANO BRATTI *)

§ **1.** In questo lavoro si ottiene il seguente *teorema di densità*: *sia $\mathfrak{L}B$ la categoria degli spazi di Banach sui reali R e $F : \mathfrak{L}B \to \mathfrak{L}B$ sia un funtore covariante. Se ${}_b\{\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1} \to F\}_{\text{q.p.}}$ è lo spazio delle distribuzioni funtoriali quasi periodiche a valori in F,* [1], *e se si indica lo spazio delle loro regolarizzate* (*def.* 2, § 2) *mediante funzioni $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto con ${}_b\{\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1} \to F\} * \mathfrak{D}$, si ha*:

$$\{\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1} \to F\}_{\text{q.p.}} = \{{}_b\{\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1} \to F\}_{\text{q.p.}} * \mathfrak{D}\}^{-}$$

dove la chiusura è in ${}_b\{\varepsilon\mathfrak{D}_{L^1} \to F\}$.

Il teorema di sopra estende, alle distribuzioni funtoriali quasi periodiche, il teorema di pag. 391 di [2].

I simboli usati sono quelli di [4].

§ **2.** In tutto il seguito è fondamentale la definizione di *funzione funtoriale* data da N. Popa in [5]. ΣR_x sia la somma diretta topologica, con la topologia usuale della somma diretta, [3], pag. 121, di copie di R, indiciata su R stesso. Una base per ΣR_x è data dagli elementi:

$$(z_u)^x_{u\in R}\ ,\ z_u=0 \text{ se } u\neq x,\ z_u=1 \text{ se } u=x.$$

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università - Via Belzoni, 3 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

Lemma 1. *$\forall h \in R$, $\tau_h : \Sigma R_x \to \Sigma R_x$, $\langle \tau_h \cdot (z_u)_{u \in R}^x \rangle = (z_u)_{u \in R}^{x+h}$, è continua.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata non appena si tenga presente il risultato di [3], pag. 121.

Def. 1. *Se $F : \mathfrak{L}B \to \mathfrak{L}B$ è un funtore covariante e $f \in {}_b\{\varepsilon_{\Sigma R_x} \to F\}$ è una funzione funtoriale di variabile reale a valori nel funtore F, f si dice quasi periodica se $(\tau_h f)_{h \in R}$ è relativamente compatto in ${}_b\{\varepsilon_{\Sigma R_x} \to F\}$.*

[$(\tau_h f)^E : \Sigma R_x \hat{\otimes}_\varepsilon E \to F(E)$, E-componente di $\tau_h f$, è il prolungamento per continuità di $\chi_h(f^E) : \Sigma R_x \otimes_\varepsilon E \to F(E)$,

$$\langle \chi_h(f^E) \cdot (z_u)_{u \in R}^x \otimes e \rangle = \langle f^E \cdot (z_u)_{u \in R}^{x+h} \otimes e \rangle.$$

Che $\chi_h(f^E)$ sia continua si ha dal fatto che $\chi_h(f^E) = f^E \circ (\tau_h \otimes_\varepsilon 1_E)$; $\Sigma R_x \varepsilon E = \Sigma R_x \hat{\otimes}_\varepsilon E$ [1])].

Sia $\varphi(x) \in \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ il dominio delle distribuzioni scalari reali.

Lemma 2. *a) $\forall T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$ e $\forall E \in \mathcal{O}b(\mathfrak{L}B)$,*

$$(T \tilde{*} \varphi)^E : \Sigma R_x \otimes_\varepsilon E \to F(E),$$

$$\langle (T \tilde{*} \varphi)^E \cdot (z_u)_{u \in R}^x \otimes e \rangle = \langle T_t^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle,$$

è una mappa lineare e continua;

b) la mappa

$$(* \varphi) : {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\} \to {}_b\{\varepsilon_{\Sigma R_x} \to F\}, \ \langle (* \varphi) \cdot T \rangle = T * \varphi,$$

dove $T * \varphi$ è il morfismo la cui E-componente è il prolungamento per continuità di $(T \tilde{*} \varphi)^E$ a tutto $\Sigma R_x \hat{\otimes}_\varepsilon E$, è lineare e continua.

Dimostrazione. *a)* la linearità di $(T \tilde{*} \varphi)^E$ è ovvia; per dimostrare la sua continuità, sia $i_\varphi : \Sigma R_x \to \mathfrak{D}_{L^1}(t)$ la mappa così definita:

---

[1]) ΣR_x ha la proprietà della approssimazione.

$$\langle i_\varphi \cdot \sum_1^n {}_i\, y_i(z_u)^{x_i} \rangle = \sum_1^n {}_i\, y_i \varphi(x_i - t).$$

Se $I_x : R_x \to \Sigma R_x$ è l'iniezione canonica, $i_\varphi \circ I_x : R_x \to \mathfrak{D}_{L^1}(t)$ è continua poichè se $y_n \to y_0$ in R_x, $y_n\varphi(x-t)$ converge a $y_0\varphi(x-t)$ in $\mathfrak{D}_{L^1}(t)$. Segue, [3], pag. 122, che i_φ è continua. Allora è continua anche $(T \tilde{*} \varphi)^E$ poichè:

$$(T \tilde{*} \varphi)^E = T_t^E \circ (i_\varphi \otimes_\varepsilon 1_E).$$

Che $T * \varphi$ sia un morfismo funtoriale di $\varepsilon_{\Sigma R_x}$ in F si vede così: se

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathrm{Hom}_b (E_1 ;\ E_2),\ \langle F(\alpha) \circ (T \tilde{*} \varphi)^{E_1} \cdot (z_u)^x_{u \in R} \otimes e \rangle &= \\
= \langle F(\alpha) \cdot \langle T_t^{E_1} \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle \rangle &= \\
= \langle T_t^{E_2} \cdot \varphi(x-t) \otimes \alpha(e) \rangle = \langle (T \tilde{*} \varphi)^{E_2} \cdot (z_u)^x_{u \in R} \otimes \alpha(e) \rangle &= \\
= \langle (T \tilde{*} \varphi)^{E_2} \circ 1_{\Sigma R_x} \otimes_\varepsilon \alpha \cdot (z_u)^{u \in R}_x \otimes e \rangle&.
\end{aligned}$$

Allora, mantenendosi la commutatività del diagramma nel prolungamento per continuità,

$$F(\alpha) \circ (T * \varphi)^{E_1} = (T * \varphi)^{E_2} \circ (1_{\Sigma R_x} \widehat{\otimes}_\varepsilon \alpha).$$

b) $(* \varphi)$ è mappa lineare; che sia continua si ha da: sia

$$(* \varphi)^E : \mathrm{Hom}_b (\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E)) \to \mathrm{Hom}_b (\Sigma R_x \widehat{\otimes}_\varepsilon F(E))$$

la mappa così definita:

$$\langle (* \varphi)^E \cdot T \rangle = (T * \varphi)^E,$$

E-componente del morfismo $T * \varphi$.

Se L è limitato in $\Sigma R_x \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $\langle i_\varphi \widehat{\otimes}_\varepsilon 1_E \cdot L \rangle = L_1$ è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$; sicchè, fissato $\mathfrak{U}(L, V)$ intorno di zero in $\mathrm{Hom}_b (\Sigma R_x \widehat{\otimes}_\varepsilon E;$ $F(E))$, V intorno di zero in $F(E)$, si ha:

$$\langle (* \varphi) \cdot \mathfrak{U}(L_1, V) \rangle \subseteq \mathfrak{U}(L, V)$$

di facile verifica.

Il lemma è concluso.

Segue immediatamente:

COROLLARIO. *Se* $T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}_{q.p.}$ *e se* $\varphi(x) \in \mathfrak{D}$, $T * \varphi$ *è funzione funtoriale di variabile reale a valori nel funtore F quasi periodica secondo la definizione* 1.

DEF. 2. $\forall T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$ *e* $\forall \varphi(x) \in \mathfrak{D}$, $T * \varphi$ *si dice la funzione funtoriale di variabile reale a valori nel funtore F regolarizzata di T mediante* $\varphi(x)$.

$\forall T * \varphi$, $T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}_{q.p.}$, $\varphi(x) \in \mathfrak{D}$, si consideri la mappa lineare

$$\tilde{T}(\varphi)^E : \mathfrak{D}_{L^1} \otimes_\varepsilon E \to F(E),$$

$$\langle \tilde{T}(\varphi)^E \cdot \psi(x) \otimes e \rangle = \int_R \langle T_t^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle \psi(x) dx, \; E \in \mathcal{O}b(\mathfrak{L}B),$$

integrale forte in $F(E)$, [che l'integrazione abbia significato si vede dal fatto che $\langle T_t^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle$ è funzione, della variabile x continua e limitata di R in $F(E)$ e che $\psi(x) \in \mathfrak{D}_{L^1}$.

LEMMA 3.

$$\tilde{T}(\varphi)^E : \mathfrak{D}_{L^1} \otimes_\varepsilon E \to F(E), \; \forall T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}_{q.p.}, \; \forall \varphi(x) \in \mathfrak{D}, \; \forall E \in \mathcal{O}b(\mathfrak{L}B),$$

è lineare e continua.

DIMOSTRAZIONE. La linearità di $\tilde{T}(\varphi)^E$ è, al solito, ovvia; per la continuità dimostriamo che è:

$$\int_R \langle T_t^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle \, \psi(x) dx = \int_R \langle T_t^E \cdot \psi(x+t) \otimes e \rangle \varphi(x) dx.$$

Sia $e \in E$ e $\alpha \in F(E)'$; se T_j^E è la restrizione di T^E a $\mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon (eR)$ e se $i : \mathfrak{D}_{L^1} \hat{\otimes}_\varepsilon (eR) \to \mathfrak{D}_{L^1}$ è l'isomorfismo canonico (suriettivo), esiste

$\mathcal{U} \in (\mathfrak{D}_{L^1})'$ tale che $\mathcal{U} \circ i = \alpha \circ T_l^E$, sicchè: esiste $f_J(x) \in \mathfrak{B}$ [2]) con: $\alpha \circ T_l^E = = \lim_J f_J(x) \circ i$ in $(\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon (eR))'$. Si ha come da [2], pag. 392,

$$\langle \alpha \circ T_{/t}^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle \psi(x) = \lim_J \langle f_J(t) \cdot \varphi(x-t) \rangle \psi(x)$$

uniformemente rispetto a $x \in R$.

Poichè $\psi(x) \in \mathfrak{D}_{L^1}$,

$$\int_R \langle \alpha \circ T_{/t}^E \cdot \varphi(x-t) \otimes e \rangle \psi(x) dx = \lim_J \int_R \langle f_J(t) \cdot \varphi(x-t) \rangle \psi(x) dx =$$
$$= \lim_J \int_R \langle f_J(t) \cdot \psi(x+t) \rangle \varphi(x) dx = \int_R \langle \alpha \circ T_{/t}^E \cdot \psi(x+t) \otimes e \rangle \varphi(x) dx.$$

Il teorema di Hahn-Banach conclude la dimostrazione dell'affermazione di sopra.

Se A è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1} \otimes_\varepsilon E$, $\{ \sum_1^n {}_i \psi_i(x+t) \otimes e_i$, $\forall \sum_1^n {}_i \psi_i(t) \otimes e_i \in A$, $\forall x \in R\}$ è ancora limitato in $\mathfrak{D}_{L^1} \otimes_\varepsilon E$; da cui, se $a \in A$:

$$\left\| \int_R \langle \tilde{T}(\varphi)^E \cdot a \rangle dx \right\|_{F(E)} = \left\| \int_R \langle T_t^E \cdot \sum_1^n {}_i \psi_i(x+t) \otimes e_i \rangle \varphi(x) dx \right\|_{F(E)} \leq$$
$$\leq \int_R \| \langle T_t^E \cdot \sum_1^n {}_i \psi_i(x+t) \otimes e_i \rangle \| \, | \varphi(x) | \, dx \leq k \int_R | \varphi(x) | \, dx$$

$$\text{se } \| \langle T_t^E \cdot \sum_1^n {}_i \psi_i(x+t) \otimes e_i \rangle \|_{F(E)} \leq k.$$

Poichè $\mathfrak{D}_{L^1} \otimes_\varepsilon E$ è metrico e da $\tilde{T}(\varphi)^E$ ogni limitato è mappato in un limitato, $\tilde{T}(\varphi)^E$ è continua.

Il lemma è concluso.

Indicato con $T(\varphi)$ il morfismo funtoriale di $\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}}$ in F tale che: $\forall E \in \mathcal{O}b(\mathfrak{L}B)$, $T(\varphi)^E$ è l'estensione per continuità a $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$ di $\tilde{T}(\varphi)^E$ si ha:

---

[2]) $\mathfrak{B}$ è lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}_\infty$ limitate con ogni loro derivata.

LEMMA 4. $\forall T \in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}_{\text{q.p.}}$ *e* $\forall \varphi(x) \in \mathfrak{D}$ *detta* $T(\varphi)$ *la distribuzione funtoriale di* $\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}}$ *in* F *canonicamente associata alla funzione funtoriale* $T * \varphi$, $T(\varphi)$ *è quasi periodica.*

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la rete $\tau_{h_i} T(\varphi)$ in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$; poichè T è quasi periodica la rete $\tau_{h_i} T$ in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$ ammette una sottorete, $\tau_{h_{i_J}} T$ convergente a una Q quasi periodica in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}} \to F\}$. Al solito, se A è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$, $\{a(x+t), \forall a(t) \in A, \forall x \in R\}$ è ivi ancora limitato; sicchè, se $\varepsilon > 0$ è un numero reale esiste $J_0 = J_0(\varepsilon, A)$ con,

$$\forall J \geq J_0 \,,\ \| \langle T_t^E \cdot a(x+t+h_{i_J}) \rangle - \langle Q_t^E \cdot a(x+t) \rangle \| \leq \varepsilon .$$

Ciò implica che $\tau_{h_{i_J}} T(\varphi)^E \to Q^E(\varphi)$ in

$$\operatorname{Hom}_b (\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E)) \ \forall E \in \mathcal{O}b(\mathfrak{L}B)$$

poichè: se $a(t) = \lim_J \sum_1^n{}_i^{(J)} \psi_i(t) \otimes e_i$ in $\mathfrak{D}_{L^1} \widehat{\otimes}_\varepsilon E$,

$$\langle T^E(\varphi) \cdot a(t) \rangle = \lim_J \int_R \langle T_t^E \cdot \sum_1^n{}_i^{(J)} \psi_i(x+t) \otimes e_i \rangle \varphi(x) dx =$$

$$= \int_R \langle T_t^E \cdot a(x+t) \rangle \varphi(x) dx$$

avendosi che la successione di funzioni, di R in $F(E)$, $\langle T_t^E \cdot \sum_1^n{}_i^{(J)} \psi_i(x+ +t) \otimes e_i \rangle \varphi(x)$ converge uniformemente, rispetto a $x \in R$, verso la $\langle T_t^E \cdot a(x+t) \rangle \varphi(x)$. Allora:

$$\| \langle \tau_{h_{i_J}} T(\varphi)^E \cdot a(t) \rangle - \langle Q(\varphi)^E \cdot a(t) \rangle \| \leq$$

$$\leq \int_R \langle T_t^E \cdot a(x+t+h_{i_J}) \rangle - \langle Q_t^E \cdot a(x+t) \rangle \| \; | \varphi(x) | dx \leq \varepsilon \int_R | \varphi(x) | \, dx$$

se $J \geq J_0$ come sopra.

Il lemma è dimostrato; si può allora dimostrare il

TEOREMA. $T\in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}}\to F\}_{\text{q.p.}}$ *se e solo se ogni sua regolarizzata mediante* $\varphi(x)\in\mathfrak{D}$ *è funzione funtoriale quasi periodica.*

DIMOSTRAZIONE. La prima parte del teorema è nel corollario del lemma 2.

Per la seconda parte si ha: sia $\varphi_J(x)\in\mathfrak{D}$ una rete convergente a δ misura di Dirac, in $\mathcal{E}'$, [6], pag. 166, e $T(\varphi_J)$ le distribuzioni funtoriali canonicamente associate alle funzioni funtoriali $T*\varphi_J$ come dal lemma 4. Si dimostrerà che $\lim_J T(\varphi_J)=T$ in ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}}\to F\}$ e poichè lo spazio ${}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}}\to F\}_{\text{q.p.}}$ è chiuso, T risulterà quasi periodica.

Se $E\in\mathcal{O}b(\mathfrak{L}B)$, la mappa

$$\psi:\mathcal{E}'\to \mathrm{Hom}_b(\mathcal{E}\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ E),\ \psi(T)=T\,\widehat{\otimes}_\varepsilon 1_E\,,$$

è continua.

Se A è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E$,

$$T\in {}_b\{\varepsilon_{\mathfrak{D}_{L^1}}\to F\},\ \{\langle T_t^E\cdot a(x+t)\rangle,\ \forall a\in A,\ \forall x\in R\}$$

è limitato in $\mathcal{E}\,\widehat{\otimes}_\varepsilon E(E)$. Poichè ψ è continua, $\varphi_J\,\widehat{\otimes}_\varepsilon 1_{F(E)}\to\delta\,\widehat{\otimes}_\varepsilon 1_{F(E)}$ in $\mathrm{Hom}_b(\mathcal{E}\,\widehat{\otimes}_\varepsilon F(E);\ F(E))$, sicchè:

$$\|\langle\varphi_J\,\widehat{\otimes}_\varepsilon 1_{F(E)}-\delta\,\widehat{\otimes}_\varepsilon 1_{F(E)}\cdot\langle T_t^E\cdot a(x+t)\rangle\rangle\|\le\varepsilon$$

se $J\ge J_0$, J_0 opportuno. Ciò implica:

$$\left\|\int_R\langle T_t^E\cdot a(x+t)\rangle\varphi_J(x)dx-\langle T^E\cdot a(t)\rangle\right\|\le\varepsilon$$

cioè $T^E(\varphi_J)\to T^E$ in $\mathrm{Hom}_b(\mathfrak{D}_{L^1}\widehat{\otimes}_\varepsilon E;\ F(E))$.

Il teorema è concluso.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRATTI, G.: *Distribuzioni funtoriali in una variabile quasi periodiche,* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, 1971.

[2] BRATTI, G.: *Sulle distribuzioni vettoriali di una variabile debolmente quasi periodiche,* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, 1970.

[3] KELLEY, J. L., NAMIOKA I.: *Linear topological spaces,* D. Van Nostrand Company, 1963.

[4] POPA, N.: *Quelques applications de la théorie des catégories dans la théorie des distributions,* Revue Roumaine des Mathématiques Pures et Appliqués, 1968.

[5] POPA, N.: *Distributions fonctorielles définies par dés fonctions.* Revue Roumaine des Mathématiques Pures et Appliqués, 1969.

[6] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions.* Hermann, 1967.

[7] TREVES, F.: *Topological vector spaces, distributions and kernels,* Academic Press, 1967.

Manoscritto pervenuto in redazione l'1 settembre 1971.