RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

B. HANOUZET

Espaces de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi espace

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 227-272

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__227_0>

ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS APPLICATION AU PROBLEME DE DIRICHLET DANS UN DEMI ESPACE

B. HANOUZET *)

On résoud le problème de Dirichlet pour certains opérateurs elliptiques définis dans l'espace entier ou dans un demi espace. On obtient des résultats pour des opérateurs elliptiques dégénérés ou non; la dégénérescence signifie ici que les coefficients de la partie principale de l'opérateur tendent vers zéro (ou vers l'infini) quand $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ tend vers l'infini.

Dans la première partie, on introduit des espaces de Sobolev avec poids dans un ouvert non borné, les poids étant des fonctions de la distance du point à l'origine. Pour certaines valeurs des paramètres, ces espaces coïncident avec les espaces $D^{m,p}$ obtenus par complétion de l'espace des fonctions C^∞ à support compact par rapport à la norme de Dirichlet d'ordre m (voir [3] et [6] pour la définition de $D^{m,p}$).

Notons que c'est l'inégalité de Hardy [5] qui, pour un ouvert non borné joue le rôle de l'inégalité de Poincaré (voir [12] par exemple) valable pour un ouvert « borné dans une direction ».

La deuxième partie est consacrée à l'étude des espaces des traces sur un hyperplan. Les méthodes habituelles liées à la théorie des semi groupes ne s'appliquent pas directement. Le théorème de surjectivité est obtenu par construction explicite d'un relèvement.

Dans la troisième partie, on étudie le problème de Dirichlet dans $\boldsymbol{R}^n$ et le problème de Dirichlet inhomogène dans un demi espace. On ne

---

*) Indirizzo dell'A.: Departement de Mathématiques et Informatiques, Université de Rennes, Av. Général Leclerc B.P. 25 A, Rennes, Francia.

considère que des problèmes variationnels, ce qui fournit l'existence et l'unicité d'une solution dans des espaces convenables. Les résultats de régularités sont obtenus en approchant le problème par une famille de « problèmes tronqués » et en démontrant des inégalités à priori, indépendantes des troncatures, pour ces problèmes tronqués. Ces résultats se généralisent au problème de Dirichlet inhomogène dans un ouvert Ω complémentaire d'un compact de frontière suffisamment régulière.

Nous retrouvons ici certain résultats de J. Barros-Neto [1] qui utilise les espaces $D^{m,p}$ pour $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0$. Notre méthode permet de s'affranchir de cette condition; les théorèmes de traces sont plus généraux que ceux donnés dans [1]. Citons aussi L. D. Kudrjavcev [7] qui introduit des espaces analogues pour des fonctions poids tendant vers zéro à l'infini.

Certains résultats, démontrés ici, sont annoncés dans [4]. Le plan est le suivant:

I - Les espaces.

1 - Notations et premières propriétés.

2 - Les espaces duals.

3 - Comparaison à $D^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$.

4 - Propriétés de $W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

II - Les espace de traces.

1 - Les espaces $W_\alpha^{s,p}(\boldsymbol{R}^n)$, $s\in\boldsymbol{R}_+$.

2 - Espace $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

3 - Etude des traces pour $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

4 - Espaces des traces pour $W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

III - Problème de Dirichlet. Etude de la régularité.

1 - Cas de l'espace entier.

2 - Problème de Dirichlet inhomogène dans un demi espace.

I. LES ESPACES

1. Notations et premières propriétés.

$\boldsymbol{R}^n$ designant l'espace euclidien de dimension n, on note $\boldsymbol{R}^n_+$ le demi espace ouvert: $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid x_n > 0\}$ et $\overline{\boldsymbol{R}^n_+}$ le demi espace fermé: $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. Le point générique de $\boldsymbol{R}^n_+$ sera noté (x', y) avec $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ et $y = x_n \in \boldsymbol{R}_+$.

D_i désignant la dérivée partielle $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, pour $\lambda \in \boldsymbol{N}^n$, on pose

$$D^\lambda = D_1^{\lambda_1} \dots D_n^{\lambda_n} = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_n^{\lambda_n}}.$$

Les notations relatives aux espaces de distributions sont celles de [13]. Introduisons enfin les fonctions poids $(1+\rho^2)^\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, où la fonction ρ est définie par $\rho(x) = |x| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$.

Nous pouvons maintenant introduire les espaces:

DÉFINITION I.1. *Pour $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $p \in \boldsymbol{R}$, $1 < p < \infty$, $m \in \boldsymbol{N}$, Ω ouvert de $\boldsymbol{R}^n$ on pose*:

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid (1+\rho^2)^{\frac{\alpha - m + |\lambda|}{2}} D^\lambda u \in L^p(\Omega);\ |\lambda| \leq m\}.$$

Cette définition n'a d'intérêt que si l'ouvert Ω est non borné; sinon, quel que soit α, l'espace coïncide avec $W^{m,p}(\Omega)$, espace de Sobolev habituel (voir [10] ou [12] par exemple). Nous avons immédiatement les propriétés:

1) $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$

2) $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach quand on le munit de la norme:

$$|u|_{W_\alpha^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\lambda| \leq m} |(1+\rho^2)^{\frac{\alpha - m + |\lambda|}{2}} D^\lambda u|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p} \tag{I.1}$$

3) On a les inclusions suivantes, avec injections continues:

$$W_\alpha^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow W_{\alpha-m}^{0,p}(\Omega).$$

4) Pour $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire φ restriction à Ω d'une fonction de $\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$, l'application

$$u \to \varphi u$$

est linéaire continue de $W_\alpha^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

5) Dans le cas $p=2$ on note $W_\alpha^m(\Omega)=W_\alpha^{m,2}(\Omega)$: $W_\alpha^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire:

$$(u,\ v)_{W_\alpha^m(\Omega)}=\sum_{|\lambda|\leq m}\int_\Omega (1+\rho^2)^{\alpha-m+|\lambda|} D^\lambda u \overline{D^\lambda v} dx.$$

2. Les espaces duals.

Nous commençons par démontrer un résultat de densité.

THÉORÈME I.1.

$\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$

$\mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

Nous démontrons seulement le premier résultat, la démonstration du deuxième est analogue. On se ramène par troncatures aux propriétés de $W^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$. Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$ avec $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi(x)=1$ pour $\rho(x) \leq 1$, $\varphi(x)=0$ pour $\rho(x) \geq 2$ et posons:

$$\varphi_k(x)=\varphi\left(\frac{x}{k}\right),\ u_k=\varphi_k u.$$

Nous montrons que, pour $u \in W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$, $u_k \in W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ et

$$\text{(I.2)} \qquad \lim_{k\to+\infty} |u_k-u|_{W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)}=0.$$

Soit $\lambda \in \boldsymbol{N}^n$ avec $|\lambda| \leq m$, exprimons:

$$\left(\int_{\boldsymbol{R}^n} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} \, | D^\lambda(u_k-u) |^p \, dx \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{\boldsymbol{R}^n} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} \left| \sum_{\mu\leq\lambda} \binom{\lambda}{\mu} (D^\mu\varphi_k)(D^{\lambda-\mu}u) - D^\lambda u \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_{\rho(x)\geq k} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} \, | \varphi_k - 1 |^p \, | D^\lambda u |^p \, dx \right)^{1/p}$$

$$+ \sum_{\substack{\mu\leq\lambda \\ \mu\neq\lambda}} \binom{\lambda}{\mu} \left(\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} \, | (D^\mu\varphi_k)(D^{\lambda-\mu}u) |^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Dans cette inégalité, il est immédiat que le premier terme de droite tend vers zéro quand k tend vers l'infini. Pour les autres termes, on a:

$$D^\mu\varphi_k(x) = \frac{1}{k^{|\mu|}} (D^\mu\varphi) \left(\frac{x}{k} \right)$$

donc

$$\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} \, | (D^\mu\varphi_k)(D^{\lambda-\mu}u) |^p \, dx \leq$$

$$\leq C \int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} k^{-|\mu|p} \, | D^{\lambda-\mu}u |^p \, dx \leq$$

$$\leq C \int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} (1+4k^2)^{\frac{|\mu|p}{2}} k^{-|\mu|p} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|-|\mu|)p/2} \, | D^{\lambda-\mu}u |^p \, dx \leq$$

$$\leq C \int_{k\leq\rho(x)\leq 2k} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda-\mu|)p/2} \, | D^{\lambda-\mu}u |^p \, dx.$$

Comme cette dernière expression tend vers zéro quand k tend vers l'infini, on obtient (I.2).

Soit maintenant $u \in W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ à support compact, alors u appartient $W^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$. Par suite, il existe une suite $(\Psi_l)_{l\in \boldsymbol{N}}$, $\Psi_l \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$, telle que u et Ψ_l aient leurs supports dans un compact fixe et de plus

$$\lim_{l\to+\infty} |\Psi_l - u|_{W^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)} = 0.$$

Alors, d'après la propriété des supports

$$\lim_{l\to+\infty} |\Psi_l - u|_{W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)} = 0,$$

ce qui termine la démonstration.

Conséquence. $W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ est un espace normal, par suite son dual est un espace de distributions. Par définition on pose:

$$W_{-\alpha}^{-m,p'}(\boldsymbol{R}^n) = (W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n))'; \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Il est immédiat que si $T \in W_{-\alpha}^{-m,p'}(\boldsymbol{R}^n)$, il existe une famille de fonctions $(f_\lambda)_{|\lambda|\le m}$ (non unique), telle que:

$$\begin{cases} f_\lambda \in W^{0,p'}_{-\alpha+m-|\lambda|}, \text{ et} \\ T = \sum_{|\lambda|\le m} D^\lambda f_\lambda . \end{cases}$$

3. Comparaison à $D^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$.

Rappellons la définition de $D^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ (voir [3] et [6]).

Définition I.2. *Pour $m \in \boldsymbol{N}$, $1 < p < \infty$ on note $D^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ le complété de $\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$ pour la norme*

$$|u|_{D^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)} = \Big(\sum_{|\lambda|=m} |D^\lambda u|^p_{L^p(\boldsymbol{R}^n)}\Big)^{1/p}.$$

Pour $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$, cet espace est un espace de distributions et on a le résultat suivant:

THÉORÈME I.2. *Pour* $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0$ *les espaces* $W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ *et* $D^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ *coïncident, algébriquement et topologiquement.*

Pour φ appartenant à $\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$ on a évidemment:

$$|\varphi|_{D^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)}\leq|\varphi|_{W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)}$$

il suffit donc de montrer que si $\lambda\in\boldsymbol{N}^n$, $|\lambda|<m$ on a

$$|(1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}}D^\lambda\varphi|_{L^p(\boldsymbol{R}^n)}\leq C|\varphi|_{D^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)}. \tag{I.3}$$

Nous utilisons les coordonnées polaires $x=\rho\sigma$, $\rho\geq 0$, $\sigma\in S_{n-1}$ (sphère unité de $\boldsymbol{R}^n$) pour montrer d'abord que:

$$|(1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}}D^\lambda\varphi|_{L^p(\boldsymbol{R}^n)}\leq C\sum_{|\mu|=|\lambda|+1}|\rho^{|\mu|-m}D^\mu\varphi|_{L^p(\boldsymbol{R}^n)}. \tag{I.4}$$

Pour $\Psi\in\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$ on a:

$$|\Psi(\rho\sigma)|\leq\int_\rho^{+\infty}|D_t\Psi(t\sigma)|\,dt.$$

On obtient donc:

$$\int_{R^n}(1+\rho^2)^{(|\lambda|-m)p/2}|\Psi(x)|^p\,dx\leq$$

$$\leq\int_{S_{n-1}}d\sigma\int_0^{+\infty}(1+\rho^2)^{(|\lambda|-m)p/2}\left(\int_\rho^{+\infty}|D_t\Psi(t\sigma)|\,dt\right)^p\rho^{n-1}d\rho\leq$$

$$\leq C\int_{S_{n-1}}d\sigma\int_0^{+\infty}\rho^{(|\lambda|-m)p+n-1}\left(\int_\rho^{+\infty}|D_t\Psi(t\sigma)|\,dt\right)^p d\rho.$$

Mais l'hypothèse $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0$ implique $(|\lambda|-m)p+n-1>-1$, on peut donc appliquer l'inégalité de Hardy [5] qui fournit:

$$\left| (1+\rho^2)^{\frac{(|\lambda|-m)}{2}} \Psi \right|_{L^p(\boldsymbol{R}^n)} \leq$$

$$\leq C \left(\int_{S^{n-1}} d\sigma \int_0^{+\infty} \rho^{(|\lambda|+1-m)p+n-1} \left| D_\rho \Psi(\rho\sigma) \right|^p d\rho \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{n} \left| \rho^{|\lambda|+1-m} D_i \Psi(x) \right|_{L^p(\boldsymbol{R}^n)}.$$

En remplaçant Ψ par $D^\lambda \varphi$ on obtient (I.4). Si $|\lambda|+1<m$, on peut réïtérer le procédé, ce qui fournit (I.3).

REMARQUES.

1) Si $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0$ on a aussi (voir [1]): $W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ est isomorphe à l'espace:

$$\left\{ u \in \mathfrak{D}'(\boldsymbol{R}^n) \mid D^\lambda u \in L^{q_{m-|\lambda|}}(\boldsymbol{R}^n);\ |\lambda| \leq m,\ \frac{1}{q_{m-|\lambda|}} = \frac{1}{p} - \frac{m-|\lambda|}{n} \right\}.$$

2) Sans l'hypothèse $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0$, on peut obtenir aussi le résultat suivant: $W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ est isomorphe au complété de $\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$ dans l'espace:

$$\{ u \in \mathfrak{D}'(\boldsymbol{R}^n) \mid (1+\rho^2)^{-m/2} u \in L^p(R^n);\ D^\lambda u \in L^p(\boldsymbol{R}^n),\ |\lambda|=m \}.$$

Pour généraliser le théorème I.2 au cas α quelconque, nous démontrons au préalable:

THÉORÈME I.3. *Pour α, $\beta \in \boldsymbol{R}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, l'application*

$$u \to (1+\rho^2)^{\beta/2} u$$

est un isomorphisme de $W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$ sur $W_{\alpha-\beta}^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$.

L'application $u \to (1+\rho^2)_{-\beta/2} u$ est l'isomorphisme inverse.

Cette propriété tient au fait suivant: pour $\lambda \in \boldsymbol{N}^n$, il existe une constante $C>0$ telle que

$$|D^{\lambda}(1+\rho^2)^{\beta/2}|\leq C(1+\rho^2)^{\frac{\beta-|\lambda|}{2}}.$$

Pour le cas $m\geq 0$, soit $u\in\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$ et posons

$$v=(1+\rho^2)^{\beta/2}u.$$

Pour $|\lambda|\leq m$, on a

$$(1+\rho^2)^{\frac{\alpha-\beta-m+|\lambda|}{2}}|D^{\lambda}v|\leq C\sum_{\mu\leq\lambda}\binom{\lambda}{\mu}(1+\rho^2)^{\frac{\alpha-m+|\lambda-\mu|}{2}}|D^{\lambda-\mu}u|$$

et par suite

$$|(1+\rho^2)^{\beta/2}u|_{W^{m,p}_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{R}^n)}\leq C|u|_{W^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n)}.$$

La réciproque est immédiate.

Pour le cas $m<0$, il suffit de transposer le résultat précédent.

Corollaire I.1. *Pour $m\in\boldsymbol{N}$, $\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0$, l'application*:

$$u\mapsto\Big(\sum_{|\lambda|=m}|D^{\lambda}((1+\rho^2)^{\alpha/2}u)|^p_{L^p(\boldsymbol{R}^n)}\Big)^{1/p}$$

définit sur $W^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$ une norme équivalente à celle définie par (I.1).

En effet l'application $u\mapsto(1+\rho^2)^{\alpha/2}u$ est un isomorphisme de $W^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$ sur $W^{m,p}_{0}(\boldsymbol{R}^n)$ et on applique le théorème I.2.

Corollaire I.2. *L'application $u\mapsto(1+\rho^2)^{\beta/2}D^{\lambda}u$ est linéaire continue de $W^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$ dans $W^{m-|\lambda|,p}_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{R}^n)$.*

4. Propriétés de $W^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n_+)$.

Théorème I.4. *$W^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n_+)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec l'espace des restrictions à $\boldsymbol{R}^n_+$ des fonctions de $W^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$.*

Notons provisoirement $w_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ l'espace des restrictions à $\boldsymbol{R}_+^n$ des fonctions de $W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$| u |_{w_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)} = \inf_{v \in W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)} | v |_{W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)}$$

$$v |_{\boldsymbol{R}_+^n} = u.$$

Il est immédiat que: $w_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n) \hookrightarrow W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

La réciproque vient ensuite grâce au résultat suivant:

LEMME I.1. *Il existe un opérateur de prolongement linéaire continu de $W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ dans $W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$.*

On utilise la méthode de Babich [2]. Pour $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$, on pose:

$$(P\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x', y) \text{ si } y > 0 \\ \sum_{k=1}^{m} s_k \varphi(x', -ky) \text{ si } y < 0. \end{cases}$$

En choisissant les paramètres s_k solutions du système

$$\sum_{k=1}^{m+1} s_k(-k)^j = 1, \qquad j = 0, 1, \ldots, m,$$

$P\varphi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ à support compact dans $\boldsymbol{R}^n$, donc $P\varphi$ appartient à $W_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$.

Pour vérifier la continuité de P, on forme

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} D^\lambda P\varphi(x) dx = \int_{\boldsymbol{R}_-^n} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} | D^\lambda \varphi(x) |^p dx +$$

$$+ \int_{\boldsymbol{R}_+^n} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} | D^\lambda \sum_{k=1}^{m+1} s_k \varphi(x', -ky) |^p dx$$

$(\boldsymbol{R}_-^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid x_n < 0\})$.

En posant $t=-ky$ dans

$$\int_{R^n_-} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} \,|\, D^\lambda(\varphi(x', -ky)) \,|^p \, dx$$

on obtient, à un facteur près, un terme de la forme

$$\int_{R^n_+} \left(1+\rho^2\left(x', \frac{-t}{k}\right)\right)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} |\, D^\lambda\varphi(x', t) \,|^p \, dx'dt.$$

Mais comme $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{k}\rho(x', t) \leq \rho\left(x', \frac{t}{k}\right) \leq \rho(x', t)$$

ce qui montre que ce dernier terme est majoré, à une constante près, par

$$\int_{R^n_+} (1+\rho^2)^{(\alpha-m+|\lambda|)p/2} \,|\, D^\lambda\varphi(x', y) \,|^p \, dx.$$

Pour $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{R^n_+})$, donc pour $\varphi \in W^{m,p}_\alpha(R^n_+)$ on a bien:

$$|\, P\varphi \,|_{W^{m,p}_\alpha(R^n)} \leq C \,|\, \varphi \,|_{W^{m,p}_\alpha(R^n_+)}.$$

Comme $W^{m,p}_\alpha(R^n_+)$ coïncide localement avec $W^{m,p}(R^n_+)$, pour $m \geq 1$, $\mathfrak{D}(R^n_+)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}_\alpha(R^n_+)$. Nous introduisons donc un nouvel espace

DÉFINITION I.3. *Pour $m \in \boldsymbol{N}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $1 < p < +\infty$, on désigne par $\mathring{W}^{m,p}_\alpha(R^n_+)$ l'adhérence de $\mathfrak{D}(R^n_+)$ dans $W^{m,p}_\alpha(R^n_+)$.*

Nous notons $W^{-m,p}_{-\alpha}(R^n_+)$ le dual de $\mathring{W}^{m,p'}_\alpha(R^n_+)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. Cet espace est un espace de distributions.

On obtiens les résultats, analogues au théorème I.3:

1) Pour $m\in\boldsymbol{N}$, α, $\beta\in\boldsymbol{R}$ l'application

$$u\mapsto(1+\rho^2)^{\beta/2}u$$

est un isomorphisme de $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n_+)$ sur $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{R}^n_+)$.

2) Pour $m\in\boldsymbol{Z}$, cette application est un isomorphisme de $W^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n_+)$ sur $W^{m,p}_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{R}^n_+)$.

D'autre part, on a l'analogue du corollaire I.1:

Pour $m\in\boldsymbol{N}$, $\dfrac{1}{p}-\dfrac{m}{n}>0$, l'application

$$u\mapsto\Big(\sum_{|\lambda|=m}|D^{\lambda}((1+\rho^2)^{\alpha/2}u)|^p_{L^p(\boldsymbol{R}^n_+)}\Big)^{1/p}$$

définit sur $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n_+)$ une norme équivalente à celle définie par (I.1).

II. LES ESPACES DE TRACES

Comme toute fonction u appartenant à $W^{m,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$ est localement dans $W^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$, la trace de u sur l'hyperplan $\Pi=\{x\in\boldsymbol{R}^n\mid x_n=0\}$ est localement dans $W^{m-1/p,p}(\boldsymbol{R}^{n-1})$ (voir [12] par exemple).

Nous nous proposons d'étudier le comportement à l'infini des traces sur un hyperplan des fonctions de $W^{m,p}_0(\boldsymbol{R}^n)$. Pour cela, nous avons besoin d'introduire de nouveaux espaces.

1. Les espaces $W^{s,p}_{\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$, $s\in\boldsymbol{R}_+$.

DÉFINITION II.1. *Pour* $1<p<+\infty$, $0<\sigma<1$, *on pose*

$$W^{\sigma,p}_0(\boldsymbol{R}^n)=\{u\in\mathfrak{D}'(\boldsymbol{R}^n)\mid(1+\rho^2)^{-\sigma/2}u\in L^p(\boldsymbol{R}^n);\qquad\forall i=1,\ldots,n,$$
$$\int_0^{+\infty}t^{-1-\sigma p}dt\int_{\boldsymbol{R}^n}|u(x+te_i)-u(x)|^p\,dx<\infty\}\ ^{1)}$$

---

1) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ désignent les vecteurs de la base canonique de $\boldsymbol{R}^n$.

$W_0^{\sigma,p}(\boldsymbol{R})$ est un espace de Banach pour la norme:

$$
\text{(II.1)} \qquad \begin{aligned} |u|_{W_0^{\sigma,p}(\boldsymbol{R}^n)} = \{ &|(1+\rho^2)^{-\sigma/2}u|^p_{L^p(\boldsymbol{R}^n)} + \\ &+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{+\infty} t^{-1-\sigma p}dt \int_{\boldsymbol{R}^n} |u(x+te_i)-u(x)|^p\, dx\}^{1/p}. \end{aligned}
$$

Pour $s\in\boldsymbol{R}_+$ on désigne par $[s]$ la partie entière de s; on introduit

DÉFINITION II.2. *Pour $1<p<+\infty$, $s\in\boldsymbol{R}_+$, on pose*

$$
W_0^{s,p}(\boldsymbol{R}^n) = \{u\in W^{[s],p}_{[s]-s}(\boldsymbol{R}^n) \mid
$$
$$
\forall\lambda\in\boldsymbol{N}^n, |\lambda|=[s],\ D^\lambda u\in W_0^{s-[s],p}(\boldsymbol{R}^n)\}
$$

$W_0^{s,p}(\boldsymbol{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme naturelle. Pour $s\in\boldsymbol{N}$, on retrouve la définition I.1.

Pour $\alpha\in\boldsymbol{R}$, par analogie avec le théorème I.3, on introduit enfin

DÉFINITION II.3. *Pour $1<p<+\infty$, $s\in\boldsymbol{R}_+$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$ on pose*

$$
W_\alpha^{s,p}(\boldsymbol{R}^n) = \{u\in\mathfrak{D}'(\boldsymbol{R}^n) \mid (1+\rho^2)^{\alpha/2}u\in W_0^{s,p}(\boldsymbol{R}^n)\}.
$$

2. Espace $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n_+)$.

Rappelons tout d'abord la définition de la trace d'ordre j pour une fonction φ de $\mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}^n_+})$.

$$
(\gamma_j\varphi)(x') = (D_n{}^j\varphi)(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \frac{\partial^j\varphi}{\partial x_n{}^j}(x', 0).
$$

Dans la suite, nous poserons $\rho_n(x) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$, pour la commodité de l'étude nous introduisons de nouveaux espaces.

DÉFINITION II.4. *Pour $1<p<+\infty$, $m\in\boldsymbol{N}$, on pose:*

$$
X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n_+) = \{u\in\mathfrak{D}'(\boldsymbol{R}^n_+) \mid \forall\lambda\in\boldsymbol{N}^n,\ |\lambda|\le m,\ (1+\rho^2_{n-1})^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^\lambda u\in L^p(\boldsymbol{R}^n_+)\}.
$$

$X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_n^+)$ est un espace de Banach quand on le munit de la norme naturelle

$$|u|_{X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)}=\Big(\sum_{|\lambda|\leq m}|(1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}}D^\lambda u|_{L^p(\boldsymbol{R}_+^n)}^p\Big)^{1/p}$$

et on vérifie comme au théorème I.1 que $\mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$ est dense dans $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

L'introduction de $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ trouve son intérêt dans le fait suivant

THÉORÈME II.1. *Les espaces* $W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ *et* $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ *ont les mêmes traces sur l'hyperplan* $\Pi=\{x\in\boldsymbol{R}^n\mid x_n=0\}$.

Pour $u\in\mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$ posons $\gamma u=(\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1}u)$.

Nous supposons que l'application $\gamma : \mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})\mapsto(\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^{n-1}))^m$ se prolonge en une application continue de $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ sur un espace de Banach T et nous montrons que T est aussi l'espace des traces pour $W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

Il est immédiat que l'espace $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ s'injecte continuement dans $W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$. Supposons provisoirement qu'on a su construire une application Q linéaire continue: $W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)\mapsto X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$, telle que, pour toute fonction u de $\mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$, Qu appartienne à $\mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$ et $\gamma(Ou)=\gamma u$. Pour $u\in\mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$ on a alors

$$|\gamma u|_T=|\gamma Qu|_T\leq C|Qu|_{X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)}\leq C|u|_{W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)}$$

donc l'application γ se prolonge en une application linéaire continue (notée aussi γ) de $W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ dans T. γ est surjective car, si $v\in T$, il existe $u\in X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ donc $u\in W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ telle que $\gamma u=v$.

Reste à construire l'application Q.

Soit φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{\boldsymbol{R}^+}$ telle que $\varphi(t)=1$ pour $0\leq t\leq 1$, $\varphi(t)=0$ pour $t\geq 2$ et posons $\Psi(x)=\varphi((1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2}y)$, et pour

$$u\in W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n),\ Qu=\Psi u.$$

Notons que la troncature définissant Q est différente de celles utilisées habituellement. La fonction Ψ construite ici est telle que:

$$\operatorname{supp}\Psi\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n\mid 0\leq y\leq 2(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{1/2}\}$$

$$\Psi\equiv 1 \text{ pour } 0\leq y\leq(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{1/2}.$$

On utilisera un procédé analogue pour la construction du relèvement dans le théorème de traces (théorème II.2, partie B).

Montrons que Q est linéaire continue de $W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ dans $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

Pour $\lambda \in \boldsymbol{N}^n$, $|\lambda| \leq m$, on a

$$(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^\lambda(\Psi u) = (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}} \sum_{\mu \leq \lambda} \binom{\lambda}{\mu} (D^\mu \Psi)(D^{\lambda-\mu} u)$$

et nous montrons que pour chaque terme de cette expression

$$|(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}} (D^\mu \Psi)(D^{\lambda-\mu} u)|_{L^p(\boldsymbol{R}_+^n)} \leq$$

$$\leq C\,|(1+\rho_n^2(x))^{\frac{|\lambda-\mu|-m}{2}} D^{\lambda-\mu}|_{L^p(\boldsymbol{R}_+^n)}.$$

Posons $f(x) = (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} y$, alors $\Psi = \varphi \circ f$ et $D^\mu \Psi$ se présente sous forme d'une combination linéaire de termes de la forme

$$(\varphi^{(r)} \circ f)(D^{\nu^1} f)^{k_1} \dots (D^{\nu^s} f)^{k_s}$$

où $1 \leq r \leq |\mu|$ et $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^s \in \boldsymbol{N}^n$,

$$|\nu^1|\, k_1 + \dots + |\nu^s|\, k_s = |\mu|.$$

Pour $\nu \in \boldsymbol{N}^n$, $\nu = \nu' + \nu_n e_n$ (ν' indice de dérivation tangentiel: $\nu' = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, 0)$) exprimons

$$D^\nu (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} y = \begin{cases} 0 \text{ si } \nu_n > 1 \\ D^{\nu'}(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} \text{ si } \nu_n = 1 \\ y D^{\nu'}(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} \text{ si } \nu_n = 0 \end{cases}$$

donc, pour $0 \leq (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} y \leq 2$, on obtient toujours une majoration de la forme

$$|D^\nu((1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2} y)| \leq C(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-|\nu|/2}.$$

On obtient donc

$$|D^{\mu}\Psi| \leq (1+\rho_{n-1}^2)^{-|\mu|/2}|\Psi_{\mu}|$$

où Ψ_{μ} est une fonction continue bornée dans $\overline{R_+^n}$ à support dans le domaine défini par $0 \leq (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2}y \leq 2$.

En reportant ce résultat, on obtient:

$$\int_{R_+^n} (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}p} |D^{\mu}\Psi|^p \, |D^{\lambda-\mu}u|^p dx \leq$$

$$\leq C \int_{0 \leq y \leq 2(1+\rho_{n-1}(x'))^{1/2}} (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda|-|\mu|-m}{2}p} |\Psi_{\mu}|^p \, |D^{\lambda-\mu}u|^p \, dx \leq$$

$$\leq C \int_{R_+^n} (1+\rho_n^2)^{\frac{|\lambda-\mu|-m}{2}p} |D^{\lambda-\mu}u|^p \, dx.$$

ce qui montre que $|Qu|_{X_0^{m,p}(R_+^n)} \leq C\,|u|_{W_0^{m,p}(R_+^n)}$.

Par ailleurs on vérifie immédiatement que, pour $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{R}_+^n)$ on a $\gamma Qu = \gamma u$.

3. Etude des traces pour $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

Enonçons le résultat principal

THÉORÉME II.2. *Il existe une application linéaire continue*

$$\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1}) \text{ de } X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n) \text{ dans } \prod_{j=0}^{m-1} W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})$$

avec les propriétés suivantes:

A) *Pour* $u \in \mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$, $\gamma u = \left(u(x', 0), \ldots, \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} u\right)(x', 0)\right)$

B) γ *est une application surjective*

C) *Le noyau de* γ *est égal à l'adhérence de* $\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}_+^n)$ *dans* $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$.

La démonstration de ce théorème est l'objet des points A, B, C qui suivent

A. Nous montrons dans cette partie que l'application

$$\gamma : \mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}^n_+}) \mapsto \prod_{j=0}^{m-1} \mathfrak{D}(\mathbf{R}^{n-1}),$$

se prolonge en une application linéaire continue de $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n_+)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1})$. Pour cela, nous montrons qu'il existe une contante $C>0$ telle que, pour $u\in\mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}^n_+})$ et $j=0, 1, \dots, m-1$, on ait

$$\text{(II.2)} \qquad |\gamma_j u|_{W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})} \leq C\,|u|_{X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n_+)}\,.$$

Notons d'abord que $\gamma_j u = \gamma_0 \dfrac{\partial^j}{\partial y^j} u$ et que

$$\left|\frac{\partial^j u}{\partial y^j}\right|_{X_0^{m-j,p}(\boldsymbol{R}^n_+)} \leq |u|_{X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n_+)}\,,$$

il suffit donc de vérifier que, pour $j=0, 1, \dots, m-1$, on a

$$|\gamma_0 u|_{W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})} \leq C\,|u|_{X_0^{m-j,p}(\boldsymbol{R}^n_+)}$$

ou encore, que pour $m\geq 1$, on a

$$|\gamma_0 u|_{W_0^{m-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})} \leq C\,|u|_{X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n_+)}\,.$$

Nous vérifions donc que, pour $\lambda=(\lambda', 0)\in\boldsymbol{N}^n$, c'est-à-dire λ multi-indice de dérivation tangentielle, on a:

— si $|\lambda|\leq m-1$

$$\text{(II.3)} \qquad \left|(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\left(\frac{1}{p}+|\lambda|-m\right)\frac{p}{2}} D^\lambda u(x', 0)\right|_{L^p(\boldsymbol{R}^{n-1})} \leq C\,|u|_{X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n_+)}$$

— si $|\lambda|=m-1$, pour $i=1, \ldots, n-1$.

$$\text{(II.4)} \qquad \left(\int_0^{+\infty} t^{-p}dt \int_{R^{n-1}} |D^\lambda u(x'+te'_i, 0)-D^\lambda u(x', 0)|^p dx'\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C\,|u|_{X_0^{m,p}(R_+^n)}\ ^{2)}.$$

Il est immédiat ensuite que (II.3) et (II.4) impliquent (II.2).

Démonstration de (II.3).

Pour $u\in \mathfrak{D}(\overline{R_+^n})$, on a

$$|D^\lambda u(x', y)|^p = -\int_y^{+\infty} D_n |D^\lambda u(x', t)|^p dt \leq$$

$$\leq p\int_y^{+\infty} |D^\lambda u(x', t)|^{p-1} |D_n D^\lambda u(x', t)|\, dt.$$

On obtient donc

$$\int_{R^{n-1}} (1+\rho_{n-1}^2)^{\left(\frac{1}{p}+|\lambda|-m\right)\frac{p}{2}} |D^\lambda u(x', 0)|^p dx' \leq$$

$$\leq C\int_{R_+^n} ((1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}} |D^\lambda u(x', y)|)^{p-1}\cdot$$

$$((1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|+1-m}{2}} |D_n D^\lambda u(x', y)|)dx'dy.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on majore ce dernier terme par

$$C\left(\int_{R_+^n} (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{|\lambda|-m}{2}p} |D^\lambda u(x', y)|^p dx'dy\right)^{\frac{p-1}{p}}\cdot$$

$$\left(\int_{R_+^n} (1+\rho_{n-1}^2)^{(|\lambda|+1-m)p/2} |D_n D^\lambda u(x', y)|^p dx'dy\right)^{1/p}$$

---

2) $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}$ désignent les vecteurs de la base canonique de R^{n-1}.

(II.3) vient ensuite immédiatement.

Démonstration de (II.4).

Il suffit de montrer que, pour $v\in\dot{\mathfrak{D}}(\overline{\boldsymbol{R}^n_+})$, on a

$$\Big(\int_0^{+\infty} t^{-p}dt\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} |\, v(x_1+t,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_{n-1}\,,\ 0)\ -v(x',\ 0\,|^p\, dx')^{1/p}\leq C\,|\, v\,|_{X^{1,p}_0(\boldsymbol{R}^n_+)}.$$

On part de l'identité (voir J. L. Lions [8]):

$$v(x_1+t,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_{n-1}\,,\ 0)-v(x',\ 0)=\int_0^t (D_nv)(x',\ \sigma)d\sigma-$$

$$-\int_0^t \{D_nv(x_1+t-\sigma,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_{n-1}\,,\ \sigma)-D_1v(x_1+t-\sigma,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_{n-1}\,,\ \sigma)\}d\sigma=$$

$$=\int_0^t D_nv(x',\ \sigma)d\sigma-\int_0^t f(x_1+t-\sigma,\ x_2\,,\ \ldots,\ x_{n-1}\,,\ \sigma)d\sigma$$

et nous étudions séparément chacun des termes. De

$$\left(\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}}\left|\int_0^t D_nv(x',\ \sigma)d\sigma\right|^p dx'\right)^{1/p}\leq\int_0^t\left(\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} |\,D_nv(x',\ \sigma)\,|^p\, dx'\right)^{1/p} d\sigma$$

on tire l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} t^{-p}dt\left\{\left(\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}}\left|\int_0^t D_nv(x',\ \sigma)d\sigma\right|^p dx'\right)^{1/p}\right\}<$$

$$<\int_0^{+\infty} t^{-p}dt\left\{\int_0^t\left(\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} |\,D_nv(x',\ \sigma)\,|^p\, dx'\right)^{1/p} d\sigma\right\}^p.$$

En posant

$$F(\sigma)=\left(\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} |\,D_nv(x',\ \sigma)\,|^p\, dx\right)^{1/p}$$

et en appliquant l'inégalité de HARDY [5], on obtient

$$\int_0^{+\infty} t^{-p} \left| \int_0^t F(\sigma) d\sigma \right|^p dt \leq C \int_0^{+\infty} | F(t) |^p dt$$

ce qui fournit enfin

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{-p} dt \int_{R^{n-1}} \left| \int_0^t D_n v(x', \sigma) d\sigma \right|^p dx' \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C \left(\int_0^{+\infty} \int_{R^{n-1}} | D_n v(x', t) |^p dx' dt \right)^{1/p} \leq C \, | v |_{X_0^{1,p}(R_+^n)} .$$

Etudions maintenant le deuxième terme

$$\int_0^{+\infty} t^{-p} dt \left\{ \left(\int_{R^{n-1}} \left| \int_0^t f(x_1 + t - \sigma, x_2, \ldots, x_{n-1}, \sigma) d\sigma \right|^p dx' \right)^{1/p} \right\}^p \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} t^{-p} dt \left\{ \int_0^t \left(\int_{R^{n-1}} | f(x_1 + t - \sigma, x_2, \ldots, x_{n-1}, \sigma) |^p dx' \right)^{1/p} d\sigma \right\}^p .$$

Mais d'autre part, on a

$$G(t, \sigma) = \left(\int_{R^{n-1}} | f(x_1 + t - \sigma, x_2, \ldots, x_{n-1}, \sigma) |^p dx' \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{R^{n-1}} | f(x', \sigma) |^p dx' \right)^{1/p} = G(\sigma).$$

En appliquant comme ci-dessus l'inégalité de Hardy, on obtient

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{-p} dt \int_{R^{n-1}} \left| \int_0^t f(x_1 + t - \sigma, x_2, \ldots, x_{n-1}, \sigma) d\sigma \right|^p dx' \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C\left(\int_0^{+\infty} |G(t)|^p\,dt\right)^{1/p} = C\left(\int_0^{+\infty}\int_{R^{n-1}} |f(x',t)|^p\,dx'dt\right)^{1/p} \leq C\,|v|_{X_0^{1,p}(\boldsymbol{R}_+^n)}\,.$$

Ceci termine la démonstration du point A.

B. Nous allons construire un opérateur de relèvement R linéaire continu de $\prod_{j=0}^{m-1} W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})$ dans $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$. Nous montrons d'abord qu'il suffit de construire un relèvement pour chaque composante.
En effet, supposons que, pour chaque $u_j \in W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})$ on sache construire $R_j u_j$ tel que

$$|R_j u_j|_{X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)} \leq C\,|u_j|_{W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})}$$

$$\gamma_j(R_j u_j) = u_j\,.$$

On introduit alors l'opérateur linéaire

$$(P_j u)(x',y) = \sum_{k=1}^{m} s_k (R_{k-1} u_{k-1})(x', ky)$$

où les s_k sont solutions du système

$$\sum_{k=1}^{m} k^i s_k = \delta_i^j, \quad i=0,\,1,\,\ldots,\,m-1.$$

On a alors

$$|P_j u|_{X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)} \leq C \sum_{k=0}^{m-1} |u_k|_{W_0^{m-k-\frac{1}{p}}(\boldsymbol{R}^{n-1})}$$

$$\gamma_k(P_j u) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ u_j \text{ si } k = j. \end{cases}$$

Il suffit de poser ensuite

$$Ru = \sum_{j=0}^{m-1} P_j u$$

pour obtenir le relèvement désiré.

Avant de construire le relèvement pour $u_j \in W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})$, nous montrons deux résultats préliminaires.

LEMME II.1. *Soit $a>0$ donné, $\varphi \in \mathfrak{D}([0, a[)$. Alors, pour $\lambda \in \boldsymbol{N}^n$,*

$$\left| (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}} D^\lambda(\varphi((1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2}y)v(x', y)) \right|_{L^p(\boldsymbol{R}_+^n)} \leq$$

$$\leq \sum_{\mu \leq \lambda} \binom{\lambda}{\mu} \left| (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda-\mu|-m}{2}} \Psi_\mu((1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2}y) D^{\lambda-\mu}v(x', y) \right|_{L^p(\boldsymbol{R}_+^n)}$$

où chaque Ψ_μ est une fonction continue bornée sur $\overline{\boldsymbol{R}_+}$ à support dans $[0, a[$.

Le résultat est immédiat en se reportant à la démonstration du théorème II.1.

LEMME II.2. *Pour $\alpha \leq 0$, $z \in \boldsymbol{R}^n$, $|z| < \frac{1}{2n}$, il existe une constante C indépendante de z telle que*

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (1+\rho^2)^\alpha |u(x+(1+\rho^2)^{1/2}z)|^p \, dx \leq C \int_{\boldsymbol{R}^n} (1+\rho^2)^\alpha |u(x)|^p \, dx.$$

Dans

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (1+\rho^2(X))^\alpha |u(X)|^p \, dX$$

on pose

$$X = x + (1+\rho^2)^{1/2}z = \theta(x).$$

On vérifie que le jacobien de la transformation θ vaut

$$1 + \sum_{i=1}^n x_i(1+\rho^2)^{-1/2}z_i \geq \frac{1}{2}$$

et que θ est un difféomorphisme de $\boldsymbol{R}^n$ sur lui même. On a donc

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (1+\rho^2(X))^\alpha |u(X)|^p \, dX =$$

$$=\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+\rho^2(x+(1+\rho^2)^{1/2}z))^\alpha \mid u(x+(1+\rho^2)^{1/2}z) \mid^p (1+\sum_{i=1}^n x_i(1+\rho^2)^{-1/2}z_i)dx \geq$$

$$\geq C\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+\rho^2(x))^\alpha \mid u(x+1+\rho^2)^{1/2}z) \mid^p dx.$$

Nous construisons maintenant le relèvement en adaptant une méthode classique (voir [12] par exemple). On pourrait aussi utiliser une variante, bien que notre problème ne se place pas dans le cadre des semi groupes, de la méthode de J. L. Lions [9].

Dans le suite nous notons $B(0, 1)=\{x'\in \boldsymbol{R}^{n-1} \mid \rho_{n-1}(x')<1\}$ et soit $R\in\mathfrak{D}(B(0, 1))$ telle que

$$\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} R(x')dx'=\int_{|x'|<1} R(x')dx'=\frac{1}{j!}.$$

Pour $u\in w_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})$ on pose

(II.5) $$v(x', y)=y^{j-n+1}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} R\left(\frac{\sigma-x'}{y}\right)u(\sigma)d\sigma$$

ou encore

(II.5′) $$v(x', y)=y^j\int_{|s|<1} R(s)u(sy+x')ds.$$

On a immédiatement

$$v(x', 0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x, 0')= \dots =\frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}}v(x', 0)=0,$$

$$\frac{\partial^j v}{\partial y^j}(x', 0)=u(x').$$

On introduit ensuite $\varphi\in\mathfrak{D}\left(\left[0, \frac{1}{2(n-1)}\right[\right)$ telle que $\varphi(0)=1$ et on pose

(II.6) $$w(x', y)=\varphi((1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2}y)v(x', y),$$

on a toujours

$$w(x', 0)=\frac{\partial w}{\partial y}(x', 0)= \dots =\frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} \qquad w(x', 0)=0,$$

$$\frac{\partial^j w}{\partial y^j}(x', 0)=u(x').$$

D'après le lemme II.1, pour vérifier que w appartient à $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$, il suffit de montrer que, pour $|\lambda|\leq m$, Ψ fonction continue bornée sur $\overline{\boldsymbol{R}_+}$ à support dans $\left[0, \frac{1}{2(n-1)}\right[$ on a

$$(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\frac{|\lambda|-m}{2}}\Psi((1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2}y)D^\lambda v(x', y)\in L^p(\boldsymbol{R}_+^n). \tag{II.7}$$

Nous distinguerons trois cas:

$$|\lambda|\leq m-j-1, \qquad m-j\leq|\lambda|\leq m-1, \qquad |\lambda|=m.$$

Remarquons aussi que, par le changement de variables qui laisse inchangées les $n-1$ premières variables et tel que $z=(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{-1/2}y$, (II.7) devient

(II.8)

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^n}(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\left(|\lambda|-m+\frac{1}{p}\right)\frac{p}{2}}|\Psi(z)|^p|D^\lambda v(x', (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{1/2}z)|^p\, dx'dz<\infty.$$

1er Cas. $|\lambda|\leq m-j-1$.

Posons $\lambda=\lambda'+\lambda_n e_n$ où λ' est un multi-indice de dérivation tangentielle, (II.5′) devient

$$D^\lambda v(x', y)=\sum_{\substack{h\leq\lambda_n\\ h\leq j}}\binom{\lambda_n}{h}j(j-1)\dots(j-h+1)y^{j-h}.$$

$$\int_{|s|<1}R(s)((\sum_{i=1}^{n-1}s_iD_i)^{\lambda_n-h}D^{\lambda'}u)(sy+x')ds$$

(II.8) est majoré par une somme de termes de la forme

$$\int_{R^n_+} (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{\left(|\lambda|-m+\frac{1}{p}\right)\frac{p}{2}} |\Psi(z)|^p (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{(j-h)\frac{p}{2}} z^{(j-h)p}.$$

$$\int_{|s|<1} S(s) D^{\lambda'+\mu'} u(x'+s(1+\rho^2_{n-1})^{1/2} z)\, ds\, |^p\, dx' dz$$

avec $S \in \mathfrak{D}(B(0, 1))$, $|\mu'|=\lambda_n-h$.

Ce dernier terme est majoré par

$$C \int_{|s|<1} |S(s)|^p\, ds \int_{0 \leq z \leq \frac{1}{2(n-1)}} z^{(j-h)p} |\Psi(z)|^p dz \cdot$$

$$\int_{R^{n-1}} (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{\left(|\lambda|-h+\left(\frac{1}{p}-1\right)-(m-j-1)\right)\frac{p}{2}} |D^{\lambda'+\mu'} u(s(1+\rho^2)^{1/2} z+x')|^p\, dx' \leq$$

$$\leq C \int_{R^{n-1}} (1+\rho^2_{n-1}(x'))^{\left(\left(\frac{1}{p}-1\right)+|\lambda'|+|\mu'|-(m-j-1)\right)\frac{p}{2}} |D^{\lambda'+\mu'} u(x')|^p\, dx'$$

(cette dernière majoration est obtenue grâce au lemme II.2)

$$\leq C\, |u|^p_{W_0^{m-j-\frac{1}{p}, p}(R^{n-1})}.$$

$2^{ème}$ *Cas.* $m-j \leq |\lambda| \leq m-1$.

Posons $\lambda=\mu+\nu$ avec $|\nu|=m-j-1$, donc $|\mu| \leq j$.

On vérifie d'abord qu'il existe $M \in \mathfrak{D}(B(0, 1))$ telle que

$$D^\mu v(x', y) = y^{j-|\mu|} \int_{|s|<1} M(s) u(ys+x') ds. \tag{II.9}$$

Il suffit de montrer ce résultat pour $|\mu|=1$. Partant de (II.5) on a, pour une dérivée tangentielle, soit D_1

$$D_1 v(x, y) = y^{1-n} \int_{R^{n-1}} -D_1 R\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) u(\sigma) d\sigma =$$

$$= y^{j-1} \int_{|s|<1} -D_1 R(s) u(ys + x') ds,$$

et pour la dérivée normale

$$D_n v(x', y) = (j-n+1) y^{j-n} \int_{R^{n-1}} R\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) u(\sigma) d\sigma +$$

$$+ y^{j-n+1} \int_{R^{n-1}} - \sum_{i=1}^{n} D_i R\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) \frac{\sigma_i - x'_i}{y^2} u(\sigma) d\sigma =$$

$$= y^{j-1} \int_{|s|<1} ((j-n+1) R(s) - \sum_{i=1}^{n} D_i R(s) s_i) u(ys + x') ds.$$

On pose ensuite $\nu = \nu' + \nu_n e_n$ et on a comme au 1er cas en utilisant (II.9)

$$D^{\lambda} v(x', y) = \sum_{\substack{h \leq \nu_n \\ h \leq j - |\mu|}} \binom{\nu_n}{h} (j - |\mu|) \dots (j - |\mu| - h + 1) y^{j - |\mu| - h}.$$

$$\int_{|s|<1} M(s) ((\sum_{i=1}^{n-1} s_i D_i)^{\nu_n - h} D^{\nu'} u)(sy + x') ds.$$

(II.8) est majoré par une somme de termes de la forme

$$\int_{R^n_+} (1 + \rho^2_{n-1}(x'))^{\left(|\lambda| - m + \frac{1}{p}\right)\frac{p}{2}} |\Psi(z)|^p z^{(j - |\mu| - h)p} (1 + \rho^2_{n-1}(x'))^{(j - |\mu| - h)\frac{p}{2}} .$$

$$\left| \int_{|s|<1} N(s) D^{\nu' + \nu''} u(s(1+\rho^2)^{1/2} z + x') \, ds \right|^p dx' dz$$

où $N \in \mathfrak{D}(B(0, 1))$, ν'' est un indice de dérivation tangentielle vérifiant $|\nu''| = \nu_n - h$.

En utilisant en particulier le lemme II.2 on majore ce terme par

$$C\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}}(1+\rho_{n-1}^2(x'))^{\left(\left(\frac{1}{p}-1\right)+(|\lambda|-|\mu|-h)-(m-j-1)\right)\frac{p}{2}}\,|\,D^{\nu'+\nu''}u(x')\,|^p\,dx'\leq$$

$$\leq C\,|\,u\,|^p_{W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})}$$

puisque $|\lambda|-|\mu|-h=|\nu'+\nu''|$.

3ème Cas. $|\lambda|=m$.

Posons $\lambda=\mu+\nu$ avec $|\mu|=j$. En utilisant (II.9) on a

$$D^\mu v(x',\ y)=\int_{|s|<1}M(s)u(ys+x')dx'.$$

$D^\lambda v(x',\ y)$ se présente comme une somme de termes de la forme

$$D\int_{|s|<1}N(s)(D^{\nu'}u)(ys+x')ds$$

où $N\in\mathfrak{D}(B(0,\ 1))$, D est une dérivée d'ordre 1, ν' est un multi-indice de dérivation tangentielle vérifiant $|\nu'|=m-j-1$. Comme (définition II.2)

$$|\,D^{\nu'}u\,|_{W_0^{1-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})}\leq|\,u\,|_{W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})}$$

il suffit de vérifier que, pour $v_0\in W_0^{1-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})$ on a

$$\text{(II.10)}\qquad \left|D\int_{|s|<1}N(s)v_0(ys+x')ds\right|_{L^p(\boldsymbol{R}^n_+)}\leq C\,|\,v_0\,|_{W_0^{1-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})}\,.$$

Posons $v_1=\int_{|s|<1}N(s)v_0(ys+x')ds$. Pour D dérivée tangentielle, soit D_1 on a

$$D_1v_1(x',\ y)=D_1\left\{y^{-n+1}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}}N\left(\frac{\sigma-x'}{y}\right)v_0(\sigma)d\sigma\right\}=$$

$$= -y^{-n} \int_{R^{n-1}} (D_1 N)\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) v_0(\sigma) d\sigma$$

et comme

$$y^{-n} \int_{R^{n-1}} (D_i N)\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) v_0(x') d\sigma = 0,$$

on obtient

$$D_1 v_1(x', y) = y^{-n} \int_{R^{n-1}} (D_i N)\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right)(v_0(x') - v_0(\sigma)) d\sigma =$$

$$= \int_{|s|<1} (D_1 N)(s) \frac{v_0(x') - v_0(ys + x')}{y} d\sigma.$$

Pour D dérivée normale on a de même:

$$D_n v_1(x', y) = -y^{-n} \int_{R^{n-1}} \left((n-1) N\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n-1} (D_i N)\left(\frac{y}{\sigma - x'}\right) \frac{\sigma_i - x'_i}{y}\right) v_0(\sigma) d\sigma$$

et comme:

$$y^{-n} \int_{R^{n-1}} (n-1) N\left(\frac{y}{\sigma - x'}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} (D_i N)\left(\frac{\sigma - x'}{y}\right)\left(\frac{\sigma_i - x'_i}{y}\right) v_0(x') d\sigma = 0$$

on obtient

$$D_n v_1(x', y) = \int_{|s|<1} ((n-1) N(s) + \sum_{i=1}^{n} s_i D_i N(s)) \frac{v_0(x') - v_0(ys + x')}{y} ds.$$

On a donc toujours

$$D v_1(x', y) = \int_{|s|<1} P(s) \frac{v_0(x') - v_0(ys + x')}{y} ds$$

où $P \in \mathfrak{D}(B(0, 1))$.

Comme $|\lambda|=m$ et Ψ est une fonction bornée, on est amené à majorer (cf. (II.7)).

$$\int_{R^n_+} |Dv_1(x', y)|^p\, dx'dy = \int_{R^n_+} dx'dy \left| \int_{|s|<1} P(s)\, \frac{v_0(x')-v_0(ys+x')}{y}\, ds \right|^p \leq$$

$$\leq C \int_{|s|<1} |P(s)|^p\, ds \int_0^{+\infty} y^{-p} dy \int_{R^{n-1}} |v_0(x')-v_0(ys+x')|^p\, ds.$$

On décompose $v_0(x')-v_0(ys+x')$ sous la forme

$$v(ys+x')-v_0(x') = \sum_{i=1}^{n-1} v_0(y \sum_{j\leq i} s_j e'_j + x') - v_0(y \sum_{j\leq i-1} s_j e'_j + x')$$

et on étudie séparément chacun des termes

$$\int_{R^{n-1}} | v_0(y \sum_{j\leq i} s_j e'_j + x') - v_0(y \sum_{j\leq i-1} s_j e'_j + x') |^p\, dx'$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{R^{n-1}} | v_0(y s_i e'_i + X') - v_0(X') |^p\, dX' & \text{si } s_i \geq 0 \\ \displaystyle\int_{R^{n-1}} | v_0(-y s_i e'_i + X') - v_0(X') |^p\, dX' & \text{si } s_i < 0. \end{cases}$$

Pour $s_i > 0$ on a alors, en posant $z = ys_i$

$$\int_0^{+\infty} y^{-p} dy \int_{R^{n-1}} | v_0(y s_i e'_i + X') - v_0(X') |^p\, dX' =$$

$$= \int_0^{+\infty} s_i^{p-1} z^{-p} dz \int_{R^{n-1}} | v_0(z e_i + X') - v_0(X') |^p\, dX' \leq$$

$$\leq C \int_0^{+\infty} z^{-p} dz \int_{R^{n-1}} | v_0(z e_i + X') - v_0(X') |^p\, dX'$$

car $|s|<1$.

Le cas $s_i<0$ se traite de la même façon et en définitive

$$\int_{\mathbf{R}^n_+} |Dv_1(x', y)|^p\, dx'dy \leq$$

$$\leq C\int_{|s|<1} |P(s)|^p\, ds \int_0^{+\infty} z^{-p}dz \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} |v_0(ze'_i+X')-v_0(X')|^p\, dX' \leq$$

$$\leq C\, |v_0|^p_{W_0^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1})},$$

ce qui montre (II.10) et termine la démonstration de B.

C. Notons $\mathring{X}_0^{m,p}(\mathbf{R}^n_+)$ l'adhérence de $\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n_+)$ dans $X_0^{m,p}(\mathbf{R}^n_+)$. On a évidemment

$$\gamma(\mathring{X}_0^{m,p}(\mathbf{R}^n_+))=0\in \prod_{j=0}^{m-1} W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1}).$$

Réciproquement, il suffit d'apapter une démonstration classique (voir J. L. Lions [10] par exemple). Soit $u\in X_0^{m,p}(\mathbf{R}^n_+)$ telle que $\gamma u=0$ et soit $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+)$ telle que $\varphi(y)=0$ pour $0\leq y\leq 1$, $\varphi(y)=1$ pour $y\geq 2$, $0\leq\varphi(y)\leq 1$. Pour $k\in\mathbf{N}$ on pose

$$u_k(x', y)=\varphi(ky)u(x', y)=\varphi_k(y)u(x', y)$$

et on montre que

$$\lim_{k\to+\infty} |u_k-u|_{X_0^{m,p}(\mathbf{R}^n_+)}=0. \tag{II.11}$$

En supposant ce point établi, par troncature et régularisation, on montre ensuite que, pour chaque k, il existe une suite v_l, $v_l\in\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n_+)$, telle que

$$\lim_{l\to+\infty} |v_l-u_k|_{X_0^{m,p}(\mathbf{R}^n_+)}=0$$

ce qui prouve l'assertion.

Il reste à démontrer (II.11).

Soit $\lambda\in\mathbf{N}^n$, $|\lambda|\leq m$, et posons $\lambda=\lambda'+\lambda_n e_n$ où λ' est un multi-indice de dérivation tangentielle, alors

$$D^{\lambda}u_k = D_n^{\lambda_n}\varphi_k D^{\lambda'}u.$$

Mais $v = D^{\lambda'}u \in X_0^{m-|\lambda'|, p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ et

$$\gamma v = 0 \in \prod_{j=0}^{m-|\lambda'|-1} W_0^{m-|\lambda'|-j-\frac{1}{p}, p}(\boldsymbol{R}^{n-1})$$

montrent que pour démontrer (II.11), il suffit de vérifier que pour $u \in X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ et $\gamma u = 0$, on a

$$\text{(II.12)} \qquad \lim_{k\to\infty} \left| (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{j-m}{2}} D_n^j(u_k - u) \right|_{L^p(R_+^n)} = 0.$$

En utilisant la formule de Leibnitz, on obtient

$$\left| (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{j-m}{2}} D_n(u_k - u) \right|_{L^p(R_+^n)} \leq \left| (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{j-m}{2}} (\varphi_k - 1) D_n^j u \right|_{L^p(R_+^n)} +$$
$$+ \sum_{1\leq i\leq j} \binom{j}{i} \left| (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{j-m}{2}} k^i \varphi^{(i)}(ky) D_n^{j-i} u \right|_{L^p(R_+^n)}.$$

Il est immédiat que le premier terme de droite a pour limite 0, pour les autres termes, comme $\gamma u = 0$, on a

$$D_n^{j-i}u(x', y) = \int_0^y dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{j-i+1}} D_n^j u(x', t_{j-i}) dt_{j-i}.$$

Par ailleurs, par l'inégalité de Hölder, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$\left| \int_0^{t_{j-i+1}} D_n^j u(x', t_{j-i}) dt_{j-i} \right| \leq t_{j-i+1}^{1/q} \left(\int_0^{t_{j-i+1}} |D_n^j u(x', t_{j-i})|^p dt_{j-i} \right)^{1/p} \leq$$
$$\leq t_{j-i+1}^{1/q} \left(\int_0^{2/k} |D_n^j u(x', t_{j-i})|^p dt_{j-i} \right)^{1/p}$$

car $0 \leq t_{j-i+1} \leq \dfrac{2}{k}$.

On tire alors que, presque partout en (x', y)

$$| D_n^{j-i}u(x', y) |^p \leq C y^{\frac{p}{q}+(i-1)p} \int_0^{2/k} | D_n^j u(x', s) |^p ds$$

et par suite:

$$\int_{R_+^n} (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{(j-m)\frac{p}{2}} | k^i \varphi^{(i)}(ky) D_n^{j-i} u(x', y) |^p dx'dy \leq$$

$$\leq C \int_{R^{n-1}} \int_0^{2/k} (1+\rho_{n-1}^2(x'))^{(j-m)\frac{p}{2}} | D_n^j u(x', y) |^p dx'dy$$

a pour limite 0 quand k tend vers l'infini.

4. Espaces des traces pour $W_\alpha^{m,p}(R_+^n)$.

On a la résultat suivant

THÉORÈME II.3. *Il existe une application linéaire continue* $\gamma = (\gamma_0, \ldots \gamma_{m-1})$ *de* $W_\alpha^{m,p}(R_+^n)$ *dans* $\prod_{j=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})$ *avec les propriétés suivantes*:

A) *Pour* $u \in \mathfrak{D}(R_+^n)$, $\gamma u = \left(u(x', 0), \frac{\partial u}{\partial y}(x', 0), \ldots, \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}(x', 0)\right)$.

B) γ *est une application surjective.*

C) $\gamma^{-1}(0) = \overset{\circ}{W}{}_\alpha^{m,p}(R_+^n)$.

Pour $\alpha = 0$, ce résultat est une conséquence immédiate des théorème II.1 et II.2. Pour α quelconque, nous introduisons d'abord

$$X_\alpha^{m,p}(R_+^n) = \{u \in \mathfrak{D}'(R_+^n);\ \forall \lambda \in N^n,$$
$$|\lambda| \leq m,\ (1+\rho_{n-1}^2)^{\frac{\alpha+|\lambda|-m}{2}} D^\lambda u \in L^p(R_+^n)\}.$$

On vérifie que les espaces $X_\alpha^{m,p}(R_+^n)$ et $W_\alpha^{m,p}(R_+^n)$ ont mêmes espaces de traces. D'autre part, l'application $u \mapsto (1+\rho_{n-1}^2)^{\alpha/2} u$ étant un isomorphisme de $X_0^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ sur $X_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$, l'application $u \mapsto \gamma((1+\rho_{n-1}^2)^{\alpha/2}u) = (1+\rho_{n-1}^2)^{\alpha/2}\gamma u$ est linéaire continue surjective de $X_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} W_0^{m-j-\frac{1}{p},p}(R^{n-1})$, alors (définition II.3) l'application $u \mapsto \gamma u$ est linéaire continue de $X_\alpha^{m,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} W_\alpha^{m-j-\frac{1}{p},p}(\boldsymbol{R}^{n-1})$.

III. PROBLÈME DE DIRICHLET. ETUDE DE LA RÉGULARITÉ

On étudie certains problèmes de Dirichlet dans R^n, dans le complémentaire d'un compact ou dans un demi-espace.

On ne considère que des équations elliptiques d'ordre 2, l'ordre $2m$ se traiterait de façon analogue.

1. Cas de l'espace entier.

On traite d'abord le cas où l'on peut prendre $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ comme espace pivot pour la méthode variationnelle (théorème III.1), le cas général (théoreme III.2) sera ensuite une conséquence du théorème I.3.

Soit a une forme intégrodifférentielle définie sur $\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n) \times \mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$ par:

$$a(u, v) = \sum_{\substack{|i|\leq 1 \\ |j|\leq 1}} \int_{\boldsymbol{R}^n} (1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}} a_{ij} D^i u \overline{D^j v}\, dx. \tag{III.1}$$

On suppose que:

$$a_{ij} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^n), \tag{III.2}$$

ce qui implique que a est continue sur $W_1^1(\boldsymbol{R}^n) \times W_1^1(\boldsymbol{R}^n)$, et on suppose d'autre part que a est $W_1^1(\boldsymbol{R}^n)$-coercitive c'est-à-dire:

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que, } \forall u \in W_1^1(\boldsymbol{R}^n),\ \operatorname{Re} a(u, u) \geq \delta\, | u |^2_{W_1^1(\boldsymbol{R}^n)}. \tag{III.3}$$

REMARQUE. Pour que (III.3) soit réalisé, il suffit que Re a_{00} soit suffisamment grand et que

$$\text{(III.4)} \qquad \begin{cases} \exists \delta' > 0 \text{ tel que, } \forall \xi \in \boldsymbol{C}^n, \ \forall x \in \boldsymbol{R}^n \\ \operatorname{Re} \sum_{|i|=|j|=1} a_{ij}(x) \xi^i \overline{\xi^j} \geq \delta' \, |\xi|^2 . \end{cases}$$

De plus, pour $n \geq 3 \left(\text{donc } \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} > 0 \right)$ le théorème I.2 montre que (III.3) est réalisé pour des formes homogènes vérifiant (III.4).

Les hypothèses (III.2), (III.3) permettent d'utiliser le lemme de LAX MILGRAMM (voir [10] par exemple); on a

PROPOSITION. *Si $f \in W_{-1}^{-1}(\boldsymbol{R}^n)$, le problème*

$$\text{(III.5)} \qquad \begin{cases} u \in W_1^1(\boldsymbol{R}^n) \\ \forall v \in W_1^1(\boldsymbol{R}^n), \ a(u, v) = (f, \bar{v})_{W_{-1}^{-1} \times W_1^1} \end{cases}$$

admet une solution unique.

Introduisons l'opérateur $A(x, D)$ associé à a:

$$A(x, D) = \sum_{\substack{|i| \leq 1 \\ |j| \leq 1}} (-1)^{|j|} D^j \left((1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}} a_{ij} D^i \right);$$

on obtient l'énoncé équivalent:

(III.6) $A(x, D)$ est un isomorphisme de $W_1^1(\boldsymbol{R}^n)$ sur $W_{-1}^{-1}(\boldsymbol{R}^n)$.

On se propose de déterminer des propriétés de u quand Au appartient à un espace plus petit que $W_1^1(\boldsymbol{R}^n)$, en particulier quand Au appartient à $\bigcap_{k \geq 0} W_k^k(\boldsymbol{R}^n)$. Nous supposons réalisées les hypothèses:

(III.7) $\forall \lambda \in \boldsymbol{N}^n$, $\exists C > 0$ tel que $|D^\lambda a_{ij}| < C(1+\rho^2)^{-\frac{|\lambda|}{2}}$.

Ces dernières hypothèses sont naturelles dans le cas d'une variable pour assurer que A est linéaire continue de $\bigcap_{k \geq 0} W_k^k(\boldsymbol{R}^n)$ dans lui-même.

Nous obtenons le résultat suivant:

THÉORÈME III.1. *Les hypothèses* (III.2), (III.3), (III.7) *étant réalisées, pour* $k \geq 1$, *l'opérateur* A *est un isomorphisme topologique de* $W_k{}^k(\boldsymbol{R}^n)$ *sur* $W_{k-2}^{k-2}(\boldsymbol{R}^n)$.

Plus précisément, si les hypothèses (III.7) son réalisées pour $|\lambda| \leq l$, le théorème reste vrai pour $k \leq l$.

Pour la commodité de l'étude, nous écrivons aussi l'opérateur $A(x, D)$ sous la forme

$$A(x, D) = \sum_{|\lambda| \leq 2} (1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}} a_\lambda(x) D^\lambda;$$

l'hypothèse (III.7) devient alors

$$\text{(III.7')} \quad \forall \mu \in \boldsymbol{N}^n, \ \exists C > 0 \ \text{tel que} \ |D^\mu a_\lambda| \leq C(1+\rho^2)^{-\frac{|\lambda|}{2}}.$$

Il est immédiat par le corollaire I.2 que A est linéaire continue de $W_k{}^k(\boldsymbol{R}^n)$ dans $W_{k-2}^{k-2}(\boldsymbol{R}^n)$. Dans les lemmes qui suivent, nous montrons d'abord que $A(W_2{}^2(\boldsymbol{R}^n)) = L^2(\boldsymbol{R}^n)$. D'après le théorème de régularité « à l'intérieur » pour les opérateurs elliptiques (théorème de Friedrichs, voir [11] par exemple) les conditions:

$$u \in W_1{}^1(\boldsymbol{R}^n), \qquad Au \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$$

impliquent $u \in H^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ [3]). Nous utilisons ce résultat en tronquant la solution du problème (III.5), puis en démontrant des inégalités à priori indépendantes de la troncature.

Remarquons cependant que, par la méthode des quotients différentiels on obtiendrait directement:

Si $u \in W_1{}^1(\boldsymbol{R}^n)$ *et* $Au \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ *alors, pour tout* $\lambda \in \boldsymbol{N}^n$ *vérifiant* $|\lambda| = 2$ *on a* $(1+\rho^2)^{1/2} D^\lambda u \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$.

Cette méthode ne semble pas pouvoir fournir le théorème III.1 introduisons donc:

---

3) $H^s(\boldsymbol{R}^n)$ désigne l'espace de Sobolev usuel d'ordre s, voir [11] par exemple.

Le problème tronqué.

Soit $\Psi\in\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$, $0\leq\Psi\leq 1$, satisfaisant à

$$\Psi(x)\equiv 1 \text{ pour } \rho(x)\leq 1,\ \Psi(x)\equiv 0 \text{ pour } \rho(x)\geq 2.$$

Posons, pour $k\in\boldsymbol{N}$, $\Psi_k(x)=\Psi\left(\frac{x}{k}\right)$ et $u_k=\Psi_k u$.

Alors si u (dans $W_1{}^1\in(\boldsymbol{R}^n)$ est solution de $Au=f$, u_k (dans $W_1{}^1(\boldsymbol{R}^n)$) est solution du problème tronqué d'ordre k

$$(P_k)\ Au_k=g_k=\Psi_k Au+[A,\ \Psi_k]u$$

où $[A,\ \Psi_k]$ désigne le commutateur de A et Ψ_k :

$$[A,\ \Psi_k]u=A(\Psi_k u)-\Psi_k Au.$$

Le deuxième membre g_k du problème (P_k) possède la propriété suivante:

Lemme III.1. *Si $u\in W_1{}^1(\boldsymbol{R}^n)$ et $Au=f\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ alors il existe une constante $C>0$ telle que*:

$$\forall k\in\boldsymbol{N},\ |\, g_k\,|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}\leq C(|\, u\,|_{W_1{}^1(\boldsymbol{R}^n)}+|\, Au\,|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}).$$

Il est immédiat que $|\,\Psi_k Au\,|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}\leq|\, Au\,|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}$.

Etudions

$$[A,\ \Psi_k]u=\sum_{|\lambda|\leq 2}(1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}}a_\lambda D^\lambda(\Psi_k u)-\Psi_k(1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}}a_\lambda D^\lambda.$$

Nous avons des termes de trois types:

$$(1+\rho^2)^{1/2}(D_j\Psi_k)u;\qquad (1+\rho^2)(D_i\Psi_k)(D_ju);\qquad (1+\rho^2)(D_iD_j\Psi_k)u.$$

1)

$$|\,(1+\rho^2)^{1/2}(D_j\Psi_k)u\,|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}=\int\limits_{k\leq\rho(x)\leq 2k}(1+\rho^2)\frac{1}{k^2}\left|(D_j\Psi_k)\left(\frac{x}{k}\right)\right|^2|\,u\,|^2\,dx\leq$$

$$\leq C\int\limits_{k\leq\rho(x)\leq 2k}\frac{1+4k^2}{k^2}\,|\,u\,|^2\,dx\leq C\int\limits_{\boldsymbol{R}^n}|\,u\,|^2\,dx.$$

2)

$$(1+\rho^2)(D_i\Psi_k)D_ju\,|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}=\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+\rho^2)^2\frac{1}{k^2}\left|(D_i\Psi)\left(\frac{x}{k}\right)\right|^2|\,D_ju\,|^2\,dx\leq$$

$$\leq C\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k}\frac{1+4k^2}{k^2}(1+\rho^2(x))\,|\,D_ju\,|^2\,dx\leq C\,|\,(1+\rho^2)^{1/2}D_ju\,|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}\,.$$

3)

$$|\,(1+\rho^2)(D_iD_j\Psi_k)u\,|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}=\int_{\boldsymbol{R}^n}(1+\rho^2)^2\frac{1}{k^4}\left|(D_iD_j\Psi)\left(\frac{x}{k}\right)\right|^2|\,u\,|^2\,dx\leq$$

$$\leq\int_{k\leq\rho(x)\leq 2k}\frac{(1+4k^2)^2}{k^4}\,|\,u\,|^2\,dx\leq C\,|\,u\,|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}\,.$$

Ces trois majorations montrent que

$$|\,[A,\ \Psi_k]u\,|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}\leq C\,|\,u\,|_{W_1^1(\boldsymbol{R}^n)}$$

où C est une constante qui dépend de Ψ mais est indépendante de k.
Démontrons une nouvelle inégalité a priori:

LEMME III.2. *Si $u\in W_1^1(\boldsymbol{R}^n)$ et $Au\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, il existe une constante $C>0$ telle que*:

$$\forall k\in\boldsymbol{N},\ \ |(1+\rho^2)^{1/2}Du_k\,|_{W_1^1(\boldsymbol{R}^n)}\leq C(|\,Au\,|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}+\,|\,u\,|_{W_1^1(\boldsymbol{R}^n)})$$

(D désigne une dérivée quelconque).

$(1+\rho^2)^{1/2}Du_k$ est solution de

$$A((1+\rho^2)^{1/2}Du_k)=(1+\rho^2)^{1/2}Dg_k+[A,\ (1+\rho^2)^{1/2}D]u_k\,.$$

u appartient à $H^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ *donc* $(1+\rho^2)^{1/2}Du_k$ appartient à $W_1^1(\boldsymbol{R}^n)$, et par (III.6) on obtient:

$$\text{(III.8)}\qquad |\,(1+\rho^2)^{1/2}Du_k\,|_{W_1^1(\boldsymbol{R}^n)}\leq$$

$$\leq C\,|\,(1+\rho^2)^{1/2}Dg_k+[A,\ (1+\rho^2)^{1/2}]Du_k\,|_{W_{-1}^{-1}(\boldsymbol{R}^n)}\,.$$

Il suffit de majorer le deuxième membre de cette inégalité indépendamment de k. Par le lemme III.2, on

$$\text{(III.9)} \qquad |(1+\rho^2)^{1/2}Dg_k|_{W_{-1}^{-1}(\boldsymbol{R}^n)} \leq C(|u|_{W_1^1(\boldsymbol{R}^n)} + |Au|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}).$$

Reste è étudier

$$[A,\ (1+\rho^2)^{1/2}D]u_k = \sum_{|\lambda|\leq 2}(1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}} a_\lambda [D^\lambda,\ (1+\rho^2)^{1/2}]Du_k +$$
$$+\sum_{|\lambda|\leq 2}(1+\rho^2)^{1/2}[(1+\rho^2)^{\frac{|\lambda|}{2}}a_\lambda,\ D]D^\lambda u_k\,.$$

En utilisant (II.7′) et le corollaire I.2, on obtient

$$\text{(III.10)} \qquad |[A,\ (1+\rho^2)^{1/2}D]u_k|_{W_{-1}^{-1}(\boldsymbol{R}^n)} \leq C\,|u_k|_{W_1^1(\boldsymbol{R}^n)} \leq C\,|u|_{W_1^1(\boldsymbol{R}^n)}\,.$$

(Pour la dernière inégalité, il suffit de se reporter à la démonstration du théorème I.1).

(III.9) et (III.10) montrent (III.8) donc le lemme III.2.

Ce dernier lemme montre le théorème III.1 pour $k=2$. En effet, par argument de compacité faible de la boule unité de $W_1^1(\boldsymbol{R}^n)$ on prouve que, si $u\in W_1^1(\boldsymbol{R}^n)$ et $Au\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$, alors $(1+\rho^2)^{1/2}Du$ appartient à $W_1^1(\boldsymbol{R}^n)$ donc u appartient à $W_2^2(\boldsymbol{R}^n)$. Le fait que A est un isomorphisme de $W_2^2(\boldsymbol{R}^n)$ sur L^2 $(\boldsymbol{R}^n)$ résulte ensuite du théorème de Banach. La démonstration du théorème III.1 se termine ensuite par récurrence. Supposons démontré que, jusqu'à l'ordre k $(k\geq 1)$ les conditions $u\in W_k^k(\boldsymbol{R}^n)$ et $Au\in W_{k-1}^{k-1}(\boldsymbol{R}^n)$ impliquent $u\in W_{k+1}^{k+1}(\boldsymbol{R}^n)$. Supposons $Au\in W_k^k(\boldsymbol{R}^n)$; alors $(1+\rho^2)^{1/2}Du$ appartient à $W_k^k(\boldsymbol{R}^n)$ et est solution de

$$A((1+\rho^2)^{1/2}Du) = (1+\rho^2)^{1/2}D(Au) + [A,\ (1+\rho^2)^{1/2}D]u.$$

On vérifie que:

$$|(1+\rho^2)^{1/2}D(Au)|_{W_{k-1}^{k-1}(\boldsymbol{R}^n)} \leq C\,|Au|_{W_k^k(\boldsymbol{R}^n)}\,,$$

$$|[A,\ (1+\rho^2)^{1/2}D]u|_{W_{k-1}^{k-1}(\boldsymbol{R}^n)} \leq C\,|u|_{W_{k+1}^{k+1}(\boldsymbol{R}^n)}\,.$$

Alors, par l'hypothèse de récurrence, on a

$$(1+\rho^2)^{1/2}Du \in W_{k+1}^{k+1}(\boldsymbol{R}^n) \text{ donc } u \in W_{k+2}^{k+2}(\boldsymbol{R}^n),$$

ce qui termine la démonstration.

Le théorème III.1 nous donne un résultat de régularité par des opérateurs dans $\boldsymbol{R}^n$ tels que les coefficients de la partie principale tendent vers l'infini quand $\rho(x)$ tend vers l'infini. Le théorème I.3 nous permet d'utiliser ces résultats pour des problèmes dégénérés à l'infini.

Soit $b(u, v)$ une forme intégro-différentielle définie sur $\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n) \times \times \mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$ par

$$b(u, v) = \sum_{\substack{|j|\leq 1\\ |i|\leq 1}} \int_{\boldsymbol{R}^n} (1+\rho^2)^{\alpha+\frac{|i|+|j|}{2}} b_{ij}(x) D^i u \overline{D^j v}\, dx$$

où α est un réel quelconque.

On suppose que

(III.11) $$b_{ij} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$$

(III.12) $$b \text{ est } W_{\alpha+1}^1(\boldsymbol{R}^n)\text{-coercitive.}$$

Alors l'opérateur

$$B(x, D) = \sum_{\substack{|i|=1\\ |j|=1}} (-1)^{|j|} D^j((1+\rho^2)^{\alpha+\frac{|i|+|j|}{2}} b_{ij} D^i)$$

est un isomorphisme de $W_{\alpha+1}^1(\boldsymbol{R}^n)$ sur $W_{-(\alpha+1)}^{-1}(\boldsymbol{R}^n)$.

On a le résultat de régularité suivant

Théorème III.2. *Sous les hypothèses* (III.11), (III.12), (III.7), *pour* $k \geq 1$, *l'opérateur* B *est un isomorphisme topologique de* $W_{k+\alpha}^k(\boldsymbol{R}^n)$ *sur* $W_{k-2-\alpha}^{k-2}(\boldsymbol{R}^n)$.

Pour $u \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$, $\beta \in \boldsymbol{R}$, introduisons $T_\beta u = (1+\rho^2)^{\beta/2} u$.

La forme intégro-différentielle a définie par

$$a(u, v) = b(T_{-\alpha} u, T_{-\alpha} v)$$

vérifie les hypothèses (III.2), (III.3), (III.7), pour $k \geq 1$, l'opérateur A associé à a est donc un isomorphisme de $W_k^k(\boldsymbol{R}^n)$ sur $W_{k-2}^{k-2}(\boldsymbol{R}^n)$.

Mais

$$a(u, v) = \langle Au, \bar{v} \rangle_{\mathfrak{D}'(\boldsymbol{R}^n) \times \mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)}$$

et

$$b(T_{-\alpha}u, T_{-\alpha}v) = \langle T_{-\alpha}BT_{-\alpha}u, \bar{v} \rangle_{\mathfrak{D}'(\boldsymbol{R}^n) \times \mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)}$$

donc $B = T_\alpha A T_\alpha$ et le théorème III.2 découle du théorème I.3.

Remarque. Pour $\alpha = -1$, $n \geq 3$, la classe des opérateurs B contient ceux étudiés par J. Barros Neto [1].

Donnons quelques applications du théorème III.2.

Application 1. Soit $B(x, D)$ un opérateur d'ordre 2

$$B(x, D) = \sum_{\substack{|i| \leq 1 \\ |j| \leq 1}} (-1)^{|j|} D^j ((1+\rho^2)^{\alpha + \frac{|i|+|j|}{2}} b_{ij} D^i)$$

dont les coefficients b_{ij} vérifient (III.2), (III.4), (III.7).

Soit $\beta \in \boldsymbol{R}$, il existe une constante a_0 telle que, pour $a \geq a_0$ et pour tout $k \geq 1$, l'opérateur $B + (1+\rho^2)^\alpha aI$ soit un isomorphisme de $W_{k+\alpha+\beta}^k(\boldsymbol{R}^n)$ sur $W_{k-2-\alpha+\beta}^{k-2}(\boldsymbol{R}^n)$.

Nous introduisons l'opérateur $C(x, D) = T_\beta B(x, D) T_{-\beta} + (1+\rho^2)^\alpha aI$. Les opérateurs B et C ont même partie principale; on a

$$C(x, D) = \sum_{|i|=|j|=1} (-1)^{|j|} D^j ((1+\rho^2)^{\alpha + \frac{|i|+|j|}{2}} b_{ij} D^i) +$$
$$+ \sum_{|i|+|j| \leq 1} (-1)^{|j|} D^j ((1+\rho^2)^{\alpha + \frac{|i|+|j|}{2}} c_{ij} D^i) + (1+\rho^2)^\alpha aI.$$

Pour a assez grand l'opérateur C vérifie (III.11), (III.12), (III.7) donc, par le théorème III.2, C est un isomorphisme de $W_{k+\alpha}^k(\boldsymbol{R}^n)$ sur $W_{k-2-\alpha}^{k-2}(\boldsymbol{R}^n)$. Mais comme $B + (1+\rho^2)^\alpha aI = T_{-\beta} C T_\beta$, par le théorème I.3, $B + (1+\rho^2)^\alpha aI$ est un isomorphisme de $W_{k+\alpha+\beta}^k(\boldsymbol{R}^n)$ sur $W_{k-2-\alpha+\beta}^{k-2}(\boldsymbol{R}^n)$.

Cette propriété permet de résoudre en particulier l'équation

$$Bu+(1+\rho^2)^\alpha au=f$$

où f est un polynôme.

Il existe alors $\beta\in\boldsymbol{R}$ tel que $f\in\bigcap_{k\geq 0} W^k_{k-\alpha+\beta}(\boldsymbol{R}^n)$, il suffit pour cela de déterminer β tel que $f\in W^0_{\beta-\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$. Pour a assez grand, l'équation a donc une solution unique dont la croissante est aussi de type polynomiale:

$$u\in\bigcap_{k\geq 0} W^k_{k+\alpha+\beta}(\boldsymbol{R}^n).$$

APPLICATION 2. *Résolution du problème de Dirichlet dans un ouvert Ω non borné, complémentaire de l'adhérence d'un ouvert borné très régulier.*

Soit ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$, dont la frontière Γ est une variété indéfiniment différentiable de dimension $n-1$, ω étant localement d'un seul côté de Γ (voir [11]).

On pose $\Omega=\complement\bar{\omega}$; Ω a pour frontiere Γ et possède des propriétés analogues à celles de ω.

L'espace $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$ peut se caractériser comme suit

Soit φ et Ψ deux fonctions C^∞ sur $\boldsymbol{R}^n$ possèdant les propriétés suivantes

$$\varphi+\Psi=1,\ 0\leq\varphi\leq 1,\ \varphi(x)=1 \text{ pour } |x|\leq R,$$

$$\operatorname{supp}\varphi\subset B(0,\ R+1)=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid |x|<R+1\}.$$

Choisissons $R>0$ tel que $\bar{\omega}\subset B(0,\ R)=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid |x|<R\}$ et posons $\Omega_1=\complement_{B(0,R+1)}\bar{\omega}$. Alors, pour que u appartienne à $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$, il faut et il suffit que φu appartienne à $W^{m,p}(\Omega_1)$ et $\widetilde{\Psi u}\in W^{m,p}_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ ($\widetilde{\Psi u}$ désigne le prolongement par 0 de Ψu sur $B(0,\ R)$). L'étude des traces de u sur Γ se ramène au cas classique (voir [10]); on obtient le résultat suivant:

L'application $u\to\gamma u=(\gamma_0 u,\ \ldots,\ \gamma_{m-1}u)$ est linéaire surjective de $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$; le noyau de l'application γ coïncide avec l'adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}_\alpha(\Omega)$, espace que nous notons $\overset{\circ}{W}{}^{m,p}_\alpha(\Omega)$.

On définit comme précédemment

$$b(u, v)=\sum_{\substack{|i|\leq 1\\ |j|\leq 1}}\int_{\Omega}(1+\rho^2)^{\alpha+\frac{|i|+|j|}{2}} b_{ij}D^i u\overline{D^j v}dx$$

et on suppose que b vérifie (III.11), (III.12), (III.7).

En particulier, on a:

$$b_{ij}\in C^\infty(\overline{\Omega})\cap L^\infty(\Omega)$$

$$b \text{ est } \overset{\circ}{W}{}^1_{\alpha+1}(\Omega)\text{-coercitive.}$$

On obtient le résultat suivant:

Théorème III.3. *Pour $k\geq 1$, l'operateur (B, γ_0) est un isomorphisme de $W^k_{k+\alpha}(\Omega)$ sur $W^{k-2}_{k-2-\alpha}(\Omega)\times H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Par la méthode habituelle on se ramène au problème de Dirichlet homogène; il suffit donc de démontrer que, pour $k\geq 1$, l'operatéur B est un isomorphisme de $W^k_{k+\alpha}(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_{1+\alpha}(\Omega)$ sur $W^{k-2}_{k-2-\alpha}(\Omega)$.

Le résultat est évident pour $k=1$. Suppons que la propriété soit vraie pour $1\leq l\leq k$ et soit:

$$u\in W^k_{k+\alpha}(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_{1+\alpha}(\Omega) \text{ tel que } Bu\in W^{k-1}_{k-1-\alpha}(\Omega).$$

On choisit deux fonctions φ et Ψ comme ci-dessus.

φu est solution du problème de Dirichlet homogène dans l'ouvert borné Ω_1

$$\begin{cases}\varphi u\in H^k(\Omega_1)\cap H_0^1(\Omega_1)\\ B(\varphi u)=\varphi Bu+[B, \varphi]u\in H^{k-1}(\Omega_1)\end{cases}$$

par conséquent $\varphi u\in H^{k+1}(\Omega_1)$, ce qui implique que $\varphi u\in W^{k+1}_{k+1+\alpha}(\Omega)\cap \cap \overset{\circ}{W}{}^1_{\alpha+1}(\Omega)$. $\widetilde{\Psi u}$ est solution du problème

$$\begin{cases}\widetilde{\Psi u}\in W^k_{k+\alpha}(\boldsymbol{R}^n)\\ B(\widetilde{\Psi u})=\widetilde{\Psi Bu}+\widetilde{[B, \Psi]}u\in W^{k-1}_{k-1-\alpha}(\boldsymbol{R}^n)\end{cases}$$

par le théorème III.2, on a donc

$$\Psi u \in W^{k+1}_{k+1+\alpha}(\boldsymbol{R}^n) \text{ et } \Psi u \in W^{k+1}_{k+1+\alpha}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_{1+\alpha}(\Omega).$$

2. Problème de Dirichlet inhomogène dans un demi espace.

On définit une forme intégro-différentielle a sur $\mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}^n_+}) \times \mathfrak{D}(\overline{\boldsymbol{R}^n_+})$ par

$$a(u, v) = \int_{\boldsymbol{R}^n_+} \sum_{\substack{|i| \leq 1 \\ |j| \leq 1}} (1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}} a_{ij} D^i u \overline{D^j v} dx$$

et on suppose que

(III.13) $$a_{ij} \in C^\infty(\overline{\boldsymbol{R}^n_+}) \cap L^\infty(R^n_+)$$

(III.14) $$a \text{ est } \overset{\circ}{W}{}_1{}^1(\boldsymbol{R}^n_+)\text{-coercitive.}$$

Alors l'opérateur

$$A(x, D) = \sum_{\substack{|i| \leq 1 \\ |j| \leq 1}} (-1)^{|j|} D^j (1+\rho^2)^{\frac{|i|+|j|}{2}} a_{ij} D^i)$$

associé à a est un isomorphisme de $\overset{\circ}{W}{}_1{}^1(\boldsymbol{R}^n_+)$ sur $W^{-1}_{-1}(\boldsymbol{R}^n_+)$.

On suppose de plus que

(III.15) $$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } \forall x \in \overline{\boldsymbol{R}^n_+},\ |a_{ij}(x)| \geq \gamma$$

$$\text{pour } i = j = (0, \ldots, 0, 1)$$

(III.16) $$\forall \lambda \in \boldsymbol{N}^n,\ \exists C > 0 \text{ tel que } |D^\lambda a_{ij}| \leq C(1+\rho^2)^{-\frac{|\lambda|}{2}}.$$

On obtient le résultat de régularité suivant:

Théorème III.4. *Sous les hypothèses* (III.13), (III.14), (III.15), (III.16), *pour* $k \geq 1$, *l'opérateur* $(A(x, D), \gamma_0)$ *est un isomorphisme topologique de* $W^k_k(\boldsymbol{R}^n_+)$ *sur* $W^{k-2}_{k-2}(\boldsymbol{R}^n) \times W^{k-\frac{1}{2}}_k(\boldsymbol{R}^{n-1})$.

Par le théorème II.3, on se ramène au problème de Dirichlet homogène, il suffit donc de démontrer que:

Pour $k \geq 1$, *l'opérateur* $A(x, D)$ *est un isomorphisme de* $W_k^k(\boldsymbol{R}_+^n) \cap \cap \mathring{W}_1^1(\boldsymbol{R}^n)$ *sur* $W_{k-2}^{k-2}(\boldsymbol{R}^n)$.

La démonstration de cette dernière propriété est analogue à celle du théorème III.1. Nous devons cependant distinguer ici les variables tangentielles de la variable normale.

Nous étudions d'abord le cas $k=2$ en introduisant le problème tronqué (P_k). $A(x, D)$ est linéaire continu de $W_2^2(\boldsymbol{R}_+^n) \cap \mathring{W}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n)$ dans$L^2(\boldsymbol{R}_+^n$(Réciproquement, nous supposons que $u \in \mathring{W}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n)$ et $Au \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n)$, l'analogue du lemme III.1 est immédiat. On montre ensuite:

LEMME III.3. *Si* $u \in \mathring{W}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n)$ *et* $Au \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n)$, *il existe une constante* $C>0$ *telle que, quelle que soit la dérivée tangentielle D on ait*

$$\forall k \in \boldsymbol{N}, \, |(1+\rho^2)^{1/2} Du_k|_{\mathring{W}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n)} \leq C\{|Au|_{L^2(\boldsymbol{R}_+^n)} + |u|_{\mathring{W}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n)}\}.$$

Notons d'abord que u_k, à support compact dans $\overline{R_+^n}$, est solution du problème:

$$\begin{cases} u_k \in \mathring{W}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n) \text{ (donc } u_k \in H_0^1(\boldsymbol{R}_+^n)) \\ Au_k = g_k \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n). \end{cases}$$

D'après les théorèmes de régularité au bord pour les opérateurs elliptiques (voir [11]), on obtient

$$u_k \in H^2(\boldsymbol{R}_+^n) \cap H_0^1(\boldsymbol{R}_+^n)$$

et par suite, pour D dérivée tangentielle,

$$(1+\rho^2)^{1/2} Du_k \in \mathring{W}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n).$$

On a d'autre part

$$A((1+\rho^2)^{1/2} Du_k) = (1+\rho^2)^{1/2} Dg_k + [A, (1+\rho^2)^{1/2} D] u_k$$

et la démonstration du lemme III.3 est ensuite identique à celle du lemme III.2. On obtient donc, que, pour D dérivée tangentielle

$$(1+\rho^2)^{1/2}Du \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n),$$

ce qui implique que, pour $i=1, \dots, n-1$, $j=1, \dots, n$

$$(1+\rho^2)D_iD_ju \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n).$$

En reportant ce résultat dans l'équation Au $=f \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n)$, par (III.15), on obtient

$$(1+\rho^2)D_n{}^2u \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n),$$

ce qui termine la démonstration du théorème pour $k=2$.

On fait ensuite une récurrence sur k. Supposons que, pour $l \leq k-1$, les conditions

$$u \in W_{k-1}^{k-1}(\boldsymbol{R}_+^n) \cap \overset{\circ}{W}{}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n) \text{ et } Au \in W_{k-2}^{k-2}(\boldsymbol{R}_+^n)$$

impliquent

$$u \in W_k^k(\boldsymbol{R}_+^n) \cap \overset{\circ}{W}{}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n).$$

Soit maintenant u vérifiant

$$u \in W_k^k(\boldsymbol{R}_+^n) \cap \overset{\circ}{W}{}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n); \quad Au \in W_{k-1}^{k-1}(\boldsymbol{R}_+^n).$$

Alors, pour D dérivée tangentielle, on a

$$(1+\rho^2)^{1/2}Du \in W_{k-1}^{k-1}(\boldsymbol{R}_+^n) \cap \overset{\circ}{W}{}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n); \quad A((1+\rho^2)^{1/2}Du) \in W_{k-2}^{k-2}(\boldsymbol{R}_+^n)$$

donc

$$(1+\rho^2)^{1/2}Du \in W_k^k(\boldsymbol{R}_+^n) \cap \overset{\circ}{W}{}_1^1(\boldsymbol{R}_+^n).$$

Pour $|\lambda|=k+1$, $\lambda \neq (0, \dots, 0, k+1)$, on obtient donc

$$(1+\rho^2)^{\frac{k+1}{2}} D^\lambda u \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n)$$

et par $Au \in W_{k-1}^{k-1}(\boldsymbol{R}_+^n)$, (III.15), (III.16) on a ensuite

$$(1+\rho^2)^{\frac{k+1}{2}} D_n^{k+1}u \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n).$$

Le théorème III.4 se généralise comme le théorème III.1. On pourrait mettre en évidence des opérateurs $B(x, D)$ tels que:

$(B(x, D), \gamma_0)$ réalise un isomorphisme topologique de $W^k_{k+\alpha+\beta}(\boldsymbol{R}^n_+)$ sur $W^{k-2}_{k-2-\alpha+\beta}(\boldsymbol{R}^{n-1}) \times W^{k-1/2}_{k+\alpha+\beta}(\boldsymbol{R}^n_+)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Barros Neto, J.: *Inhomogeneous boundary value problems in a half space*, Ann. Sc. Sup. Pisa, 19 (1965), 331-365.

[2] Babich, V. M.: *Sur le problème du prolongement des fonctions*, Uspehi Mat. Nauk 8, 2 (1953), 111-113.

[3] Deny, J., Lions, J. L.: *Les espaces du type de Beppo Levi*, Ann. Inst. Fourier, 5 (1953-54), 305-370.

[4] Hanouzet, B.: *Espaces de Sobolev avec poids et interpolation*, C.R. Acad. Sc. Paris, 271 (1970), 26-29.

[5] Hardy, G. G., Littlewood, D. E., Polya, G.: *Inequalities*, Cambridge (1952).

[6] Hormander, L., Lions, J. L.: *Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet*, Math. Scand., 4 (1956), 259-270.

[7] Kudrjavcev, L. D.: *Imbedding theorems for functions defined on unbounded regions*, Soviet Math. Dokl., 4 (1963), 1715-1717.

[8] Lions, J. L.: *Théorèmes de traces et d'interpolation (I)*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 13 (1959), 349-403.

[9] Lions, J. L.: *Théorèmes de traces et d'interpolation (IV)*, Math. Annalen, 151 (1963), 42-56.

[10] Lions J. L.: *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Montréal 1962.

[11] Lions, J. L., Magenes, E.: *Problèmes aux limites non homogènes*, Paris (1968).

[12] Necas, J.: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Paris (1967).

[13] Schwartz, L.: *Théorie des distributions*, Paris (1966).

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 luglio 1971.