

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ERICH WITTMANN

Zur Theorie vollreduzibler und halbeinfacher Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 46 (1971), p. 199-213

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__199_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ZUR THEORIE VOLLREDUZIBLER UND HALBEINFACHER GRUPPEN

ERICH WITTMANN *)

Herrn Prof. W. Specht zum 65. Geburtstag gewidmet.

Einleitung.

Eine Gruppe G heißt vollreduzibel, wenn zu jedem Normalteiler $N \triangleleft G$ ein Normalteiler $N^* \triangleleft G$ existiert, so daß $G = N \times N^*$ ist. A. Kertész [1] und B. H. Neumann (in Wiegold [1]) haben bewiesen, daß eine Gruppe genau dann vollreduzibel ist, wenn sie direktes (restringiertes) Produkt einfacher Gruppen ist.

Eine Gruppe G heißt halbeinfach, wenn in G kein abelscher von 1 verschiedener Normalteiler existiert. Wie H. Fitting [1] und P. A. Gol'berg [1] gezeigt haben, lassen sich in gewissen Fällen halbeinfache Gruppen als Automorphismengruppen vollreduzierbarer Gruppen charakterisieren.

Die Begriffe « vollreduzibel » und « halbeinfach » kann man unschwer auf Gruppen mit Operatoren ausdehnen; man gelangt hierbei zu weitgehend analogen Resultaten (Kertész [2], Wittmann [1]).

Darüber hinaus liegt aber auch eine Strukturtheorie halbeinfacher Gruppen für Liesche Transformationsgruppen vor. Fundamental ist der Satz von É. Cartan [1], nach dem jede reelle halbeinfache zusammenhängende und kompakte Transformationsgruppe direktes Produkt einfacher Transformationsgruppen ist.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, auf axiomatischem Wege zu einer allgemeinen Theorie vollreduzierbarer und halbeinfacher Gruppen zu gelangen, welche die obigen Beispiele als Spezialfälle umfaßt. Die zen-

*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Pädagogischen Hochschule Ruhr, 46 Dortmund, Germania Occ.

trale Rolle wird bei diesen Untersuchungen der Begriff « geschlossenes Untergruppensystem » spielen.

BEZEICHNUNGEN.

$J(G)$ = innere Automorphismengruppe von G

$C_G(V)$ = Zentralisator von V in G

$H \leq G$: = H ist Untergruppe von G

$H \triangleleft G$: = H ist Normalteiler von G

$\langle K \rangle$ = die vom Komplex K erzeugte Untergruppe.

§1. Geschlossene Untergruppensysteme.

1. DEFINITION. Ein System \mathfrak{S} von Untergruppen einer Gruppe G heißt *geschlossen*, wenn es folgende fünf Abschließungseigenschaften besitzt:

1.1. $G \in \mathfrak{S}$, $1 \in \mathfrak{S}$.

1.2. Wenn $U_i \in \mathfrak{S}$ für alle $i \in I$, dann auch $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathfrak{S}$.

1.3. Wenn $P = \times_{i \in I} U_i$ und $U_i \in \mathfrak{S}$ für alle $i \in I$, dann auch $P \in \mathfrak{S}$.

1.4. Wenn $U \in \mathfrak{S}$, dann auch $U^g = g^{-1}Ug \in \mathfrak{S}$ für alle $g \in G$.

1.5. Wenn $U, V \in \mathfrak{S}$, $U \triangleleft V$, so existiert genau eine Untergruppe $z_V(U) \triangleleft C_V(U)$, $z_V(U) \in \mathfrak{S}$, welche alle $T \in \mathfrak{S}$ mit $T \triangleleft C_V(U)$ umfaßt. $z_V(U)$ heißt der \mathfrak{S} -Zentralisator von U in V .

Eine Gruppe G , in der ein geschlossenes Untergruppensystem \mathfrak{S} ausgezeichnet ist, wird mit $(G; \mathfrak{S})$ bezeichnet. Eine Untergruppe (bzw. ein Normalteiler) $U \in \mathfrak{S}$ heißt auch \mathfrak{S} -Untergruppe (bzw. \mathfrak{S} -Normalteiler).

2. BEISPIELE FÜR GESCHLOSSENE UNTERGRUPPENSYSTEME.

2.1. Die Menge $V(G)$ aller Untergruppen einer Gruppe G .

2.2. Die Menge $V(G; \Omega)$ der Ω -zulässigen Untergruppen einer Gruppe G mit Operatorbereich Ω , wenn $V(G; \Omega)$ abgeschlossen ist gegen $J(G)$. Einen wichtigen Spezialfall erhält man, wenn man für Ω

eine $J(G)$ umfassende Automorphismengruppe von G wählt. Ist G abelsch, so ist bei beliebigem Operatorbereich Ω über G die Menge $V(G; \Omega)$ in trivialer Weise gegen $J(G)$ abgeschlossen. Daher bilden z.B. die Mengen der Links- bzw. Rechts- bzw. zweiseitigen Ideale eines Ringes geschlossene Untergruppensysteme der zugrundeliegenden abelschen Gruppe.

2.3. Die Menge $V(G; \Omega)$ der Ω -zulässigen Untergruppen einer Multioperatorgruppe in Sinne von HIGGINS [1], wenn $V(G; \Omega)$ abgeschlossen ist gegen $J(G)$, was für abelsches G wieder trivial erfüllt ist.

2.4. Die Menge der zusammenhängenden und abgeschlossenen Lieschen Subnormalteiler einer reellen zusammenhängenden, kompakten halbeinfachen Lieschen Gruppe. (CARTAN [1]).

3. BEMERKUNGEN.

3.1. Aus 1.4. und 1.5. folgt sofort $z_V(U) \triangleleft V$.

3.2. Für $U=V$ heißt $z_V(U)$ das \mathfrak{S} -Zentrum von U .

3.3. Für eine \mathfrak{S} -Untergruppe U einer Gruppe $(G; \mathfrak{S})$ ist die Menge

$$\mathfrak{S} \upharpoonright U = \{T : T \in \mathfrak{S}, T \leq U\}$$

offensichtlich ein geschlossenes Untergruppensystem von U , welches die Restriktion von \mathfrak{S} auf U heißt.

Bei den folgenden Überlegungen wird es wesentlich darauf ankommen, nur solche Operationen anzuwenden, die per definitionem nicht aus einem geschlossenen System herausführen. Wir werden dies aber nicht immer ausdrücklich erwähnen. \mathfrak{S} bezeichnet im folgenden stets ein geschlossenes Untergruppensystem.

§2. \mathfrak{S} -vollreduzible Gruppe.

4. DEFINITION. Eine Untergruppe U einer Gruppe $(G; \mathfrak{S})$ heißt \mathfrak{S} -vollreduzibel, wenn $U \in \mathfrak{S}$ und wenn zu jedem \mathfrak{S} -Normalteiler N

von U ein \mathfrak{S} -Normalteiler N^* von U existiert mit

$$(1) \quad U = N \times N^*.$$

In diese Definition geht nur das System $\mathfrak{S} | U$ ein. Die \mathfrak{S} -Vollreduzibilität von U kann daher als innere Eigenschaft von U angesehen werden.

Die Struktur \mathfrak{S} -vollreduzierbarer Untergruppen läßt sich sofort reduzieren:

5. SATZ. *Eine \mathfrak{S} -vollreduzible Untergruppe U von $(G; \mathfrak{S})$ ist direktes Produkt*

$$(2) \quad U = z(U) \times C$$

ihres \mathfrak{S} -Zentrums und einer Gruppe C ohne \mathfrak{S} -Zentrum.

BEWEIS. Nach Bemerkung 3.1. gilt jedenfalls $z(U) \triangleleft U$, so daß eine Zerlegung (2) existiert. Wegen (2) ist

$$[z(C), z(U)] \leq z(C) \cap z(U) = 1,$$

woraus $z(C) \leq z(U)$ und $z(C) = 1$ folgt.

6. BEMERKUNG. Wenn U eine \mathfrak{S} -vollreduzible Untergruppe von $(G; \mathfrak{S})$ ohne \mathfrak{S} -Zentrum ist, so gilt in (1) $z(N) = 1$ und $N^* = z_U(N)$, d.h. N^* ist in diesem Falle eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Wegen $z(N) \leq z(U)$ gilt $z(N) = 1$. Weiter gilt auch $N^* \leq z_U(N)$. Daher folgt aus (1)

$$z_U(N) = N^* \times (N \cap z_U(N)).$$

Wegen $N \cap z_U(N) \leq z(N) = 1$ ergibt sich hieraus die Behauptung.

Der folgende Satz dient zur Vorbereitung des Struktursatzes für \mathfrak{S} -vollreduzible Gruppen und des Reduktionssatzes für gewisse \mathfrak{S} -halb einfache Gruppen.

7. SATZ.

7.1. Jeder \mathfrak{S} -Normalteiler N einer \mathfrak{S} -vollreduzierbaren Untergruppe U einer Gruppe $(G; \mathfrak{S})$ ist \mathfrak{S} -vollreduzierbar. Eine \mathfrak{S} -Untergruppe R von N ist genau dann normal in U , wenn sie normal in N ist.

7.2. Das Kompositum $K=MN$ zweier \mathfrak{S} -vollreduzierbarer Normalteiler M und N von $(G; \mathfrak{S})$ ist genau dann \mathfrak{S} -vollreduzierbar, wenn die \mathfrak{S} -Zentren $z(M)$ und $z(N)$ kommutieren:

$$[z(M), z(N)] = 1.$$

7.3. Die Vereinigung $V = \bigcup_{i \in I} N_i$ einer aufsteigenden Kette \mathfrak{S} -vollreduzierbarer Normalteiler N_i von G ist \mathfrak{S} -vollreduzierbar.

BEWEIS. Den einfachen Beweis von 7.1. übergehen wir.

ad 7.2: Man sieht leicht, daß die Kommutatorbedingung notwendig ist. Die Umkehrung erledigen wir in mehreren Schritten.

a) Wir nehmen zunächst speziell $M \cap N = 1$ oder äquivalent damit $K = M \times N$ an. Jedenfalls ist dann nach 1.3. $K \in \mathfrak{S}$. Wenn $R \triangleleft K$, $R \in \mathfrak{S}$, existiert wegen $R \cap M \in \mathfrak{S}$ eine Zerlegung

$$(3) \quad M = (R \cap M) \times M' \quad (M' \in \mathfrak{S}),$$

wobei $R \cap M' = R \cap M \cap M' = 1$ ist.

Da wir $S := R \times M' \in \mathfrak{S}$ haben, existiert eine Zerlegung

$$(4) \quad N = (S \cap N) \times N' \quad (N' \in \mathfrak{S}).$$

Hierin ist wieder

$$(5) \quad S \cap N' = 1.$$

(3), (4) und (5) führen nun sofort auf

$$K = R \times M' \times N'.$$

Da $M' \times N' \in \mathfrak{S}$ ist, haben wir damit K als \mathfrak{S} -vollreduzibel nachgewiesen.

b) Sei jetzt $z(M) = z(N) = 1$.

Mit $D = M \cap N \in \mathfrak{S}$ und $D^* = z_M(D) \in \mathfrak{S}$ erhalten wir nach Bemerkung 6 die Beziehung

$$(6) \quad M = D \times D^*.$$

Wegen 1.4. und 1.5. gilt $D^* \triangleleft K$; aus (6) folgt $D^* \cap N = D \cap D^* = 1$, so daß das Produkt $K = ND^*$ direkt ist. Nun ist D^* nach 7.1. \mathfrak{S} -vollreduzibel, so daß Fall b) auf a) zurückgeführt ist. Natürlich gilt $z(K) = 1$.

Speziell folgt aus b), daß der Normalteiler C in (2) eindeutig bestimmt ist.

c) Allgemeiner Fall.

Nach Satz 5 haben wir Zerlegungen

$$M = z(M) \times \tilde{M} \quad (\tilde{M} \in \mathfrak{S})$$

$$N = z(N) \times \tilde{N} \quad (\tilde{N} \in \mathfrak{S}).$$

Wegen der Eindeutigkeit von \tilde{M} und \tilde{N} gilt $\tilde{M} \triangleleft G$, $\tilde{N} \triangleleft G$.

Aus b) schließen wir nun, daß $\tilde{K} = \langle \tilde{M}, \tilde{N} \rangle$ ein \mathfrak{S} -vollreduzierbarer Normalteiler von G ohne \mathfrak{S} -Zentrum ist.

Wegen $[z(M), z(N)] = 1$ ist $Z = \langle z(M), z(N) \rangle$ ein abelscher Normalteiler von G . Mit der Abkürzung

$$T = z(M) \cap z(N) \quad (T \in \mathfrak{S})$$

erhält man

$$z(M) = T \times T' \quad (T' \in \mathfrak{S}).$$

Wieder folgt

$$T' \cap z(N) = z(M) \cap z(N) \cap T' = 1,$$

so daß für Z

$$Z = T' \times z(N)$$

folgt, was einerseits $Z \in \mathfrak{S}$ und nach a) die \mathfrak{S} -Vollreduzibilität von Z zeigt.

Da \tilde{K} keinen abelschen \mathfrak{S} -Normalteiler $\neq 1$ besitzt, gilt

$$Z \cap \tilde{K} = 1$$

und daher ergibt sich die \mathfrak{S} -Vollreduzibilität von K aus a).

ad 7.3.: Sei

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_i \leq \dots \quad (i \in I)$$

eine Kette \mathfrak{S} -vollreduzierbarer Normalteiler von G .

Da speziell auch $N_i \triangleleft N_{i+1}$ für alle $i \in I$ ist, folgen Zerlegungen

$$N_{i+1} = N_i \times N_i^*.$$

Nach 7.1. gilt $N_i^* \triangleleft N_j$ für $j \geq i$ und daher $N_i^* \triangleleft V$.

Transfinite Induktion zeigt nun, daß V direktes Produkt von \mathfrak{S} -Normalteilern von G und damit selbst \mathfrak{S} -Normalteiler ist.

Zu einem \mathfrak{S} -Normalteiler N von V läßt sich in folgender Weise ein \mathfrak{S} -Kofaktor N^* konstruieren. Wir bilden die Kette $(N \cap N_i)_{i \in I}$. Zu jedem $i \in I$ existiert nach Voraussetzung ein $\tilde{N}_i \triangleleft N_i$, so daß

$$(7) \quad N_i = (N \cap N_i) \times \tilde{N}_i$$

ist. Wieder haben wir $\tilde{N}_i \triangleleft V$ für alle $i \in I$.

Weiter gilt

$$(8) \quad \bigcup_{i \in I} (N \cap N_i) = N \cap \left(\bigcup_{i \in I} N_i \right) = N \cap V = N.$$

Nun zeigt man leicht, daß

$$(9) \quad \tilde{N} = \bigcup_{i \in I} \tilde{N}_i$$

ein direkter \mathfrak{S} -Kofaktor von N bzgl. V ist.

8. DEFINITION. Ein Automorphismus $\alpha \in \text{Aut } G$ heißt \mathfrak{S} -Automorphismus von $(G; \mathfrak{S})$, wenn \mathfrak{S} unter α invariant ist. Eine \mathfrak{S} -Untergruppe

U von $(G; \mathfrak{S})$ heißt \mathfrak{S} -charakteristisch, wenn sie bei allen \mathfrak{S} -Automorphismen von G invariant ist.

Wegen 1.4. ist jede \mathfrak{S} -charakteristische Untergruppe von G jedenfalls ein Normalteiler von G .

Unmittelbare Folge von Satz 7 ist

7*. SATZ. In jeder Gruppe $(G; \mathfrak{S})$ existiert genau ein maximaler \mathfrak{S} -vollreduzierbarer Normalteiler V ohne \mathfrak{S} -Zentrum, der \mathfrak{S} -charakteristisch ist.

Das Kompositum einer Menge \mathfrak{S} -vollreduzierbarer Normalteiler ist genau dann \mathfrak{S} -vollreduzierbar, wenn deren \mathfrak{S} -Zentren paarweise kommutieren.

§3. Charakterisierung \mathfrak{S} -vollreduzierbarer Gruppen.

9. DEFINITION. Eine \mathfrak{S} -Untergruppe U von $(G; \mathfrak{S})$ heißt \mathfrak{S} -einfach, wenn sie keine nichttriviale \mathfrak{S} -Untergruppe $N \triangleleft U$ enthält.

Satz 7* zeigt zunächst, daß eine \mathfrak{S} -Untergruppe U von G , welche direktes Produkt \mathfrak{S} -einfacher Untergruppen ist, \mathfrak{S} -vollreduzierbar ist, da hierbei die Kommutatorbedingung der \mathfrak{S} -Zentren trivial erfüllt ist. Von dieser Aussage gilt aber auch die Umkehrung.

10. SATZ. Eine Untergruppe U von $(G; \mathfrak{S})$ ist genau dann \mathfrak{S} -vollreduzierbar, wenn sie direktes Produkt

$$(10) \quad U = \times_{i \in I} E_i$$

\mathfrak{S} -einfacher Gruppen E_i ist.

BEWEIS. Die Beweisidee von B. H. Neumann (Wiegold [1]) für den Fall $\mathfrak{S} = V(G)$ (Beispiel 2.1.) läßt sich für den allgemeinen Fall modifizieren.

Das Kompositum S aller minimalen \mathfrak{S} -Normalteiler von U (der \mathfrak{S} -Sockel von U) ist aufgrund des Zornschen Lemmas direktes Produkt $S = \times_{i \in I} E_i$ ($E_i \in \mathfrak{S}$) minimaler \mathfrak{S} -Normalteiler E_i von U . Insbesondere gilt

also $S \in \mathfrak{S}$. Die \mathfrak{S} -vollreduzierbare Gruppe U gestattet nun eine Zerlegung

$$U = S \times S^* \quad (S^* \in \mathfrak{S}).$$

Dabei hat S^* folgende Eigenschaft: In jedem \mathfrak{S} -Normalteiler $V \triangleleft U$, $1 < V \leq S^*$, existiert ein \mathfrak{S} -Normalteiler $W \triangleleft U$ mit $1 < W \leq V$. Daher läßt jeder von 1 verschiedene \mathfrak{S} -Normalteiler X von U , der in S^* enthalten ist, eine Darstellung

$$(11) \quad X = \bigtimes_{n=1}^{\infty} X_n$$

zu, wobei $1 < X_n \triangleleft U$, $X_n \in \mathfrak{S}$ für $n=1, 2, \dots$. Wäre nun $S^* \neq 1$, so würde ein $a \in S^* \setminus 1$ existieren. Wegen 1.2. existiert dann ein minimaler \mathfrak{S} -Normalteiler $A \triangleleft U$, $a \in A$. In einer Darstellung (11) von A dürfte aber das Element a wegen der Minimalität von A keine nichttriviale Komponente besitzen. Dies widerspricht der Direktheit von (11). Daher ist $S^* = 1$ und $U = S$. Nun sieht man, daß die E_i als minimale \mathfrak{S} -Normalteiler von U \mathfrak{S} -einfach sind, womit der Satz bewiesen ist.

Die zuletzt bewiesene Tatsache legt dem geschlossenen Normalteilersystem

$$\mathfrak{S}^* | U = \{N : N \triangleleft U, N \in \mathfrak{S}\}$$

von U eine Endlichkeitsbedingung auf, die später eine Rolle spielen wird. Wir erinnern dazu an folgenden Begriff (W. Specht [1], S. 111): Eine bezüglich der Relation « \leq » teilweise geordnete Menge L erfüllt die *schwache Minimalbedingung*, wenn jedes halboffene Intervall $(a, b] = \{x \in L : a < x \leq b\}$ ein minimales Element besitzt.

Dieser Begriff kann auf jede Teilmenge von Untergruppen einer Gruppe angewendet werden, wenn wir als Ordnungsrelation die Inklusion benutzen, insbesondere also auf geschlossene Untergruppensysteme.

Es gilt

11. SATZ. *In einer \mathfrak{S} -vollreduzierbaren Untergruppe U einer Gruppe $(G; \mathfrak{S})$ erfüllt $\mathfrak{S}^* | U$ die schwache Minimalbedingung.*

BEWEIS. Sei $(N, M]$ ein (halboffenes) Intervall aus $\mathfrak{S}^* | U$. Man hat eine Zerlegung $M = N \times N'$, in der $N' \neq 1$ und nach Satz 7.1. eben-

falls \mathfrak{S} -vollreduzibel ist. Nach Satz 10 existiert ein minimaler \mathfrak{S} -Normalteiler $E \triangleleft U$, $E \leq N'$. $\tilde{N} = N \times E$ ist dann offenbar ein minimales Element von $(N, M]$.

12. BEMERKUNGEN.

12.1. Wenn $\mathfrak{S}^* \mid U$ die Minimalbedingung erfüllt, ist das Produkt (10) endlich und umgekehrt.

12.2. Bei den Überlegungen von § 3 sind die Eigenschaften 1.4. und 1.5., welche eine Verträglichkeit von \mathfrak{S} mit der Konjugation in G sicherstellen, nicht benötigt worden. Die Resultate dieses Paragraphen gelten daher sinngemäß auch für Gruppen mit Untergruppensystemen, die nur den schwachen Forderungen 1.1., 1.2. und 1.3. genügen.

§4. \mathfrak{S} -halbeinfache Gruppen.

13. DEFINITION. Eine Gruppe $(G; \mathfrak{S})$ heißt \mathfrak{S} -halbeinfach, wenn in G kein von 1 verschiedener abelscher \mathfrak{S} -Normalteiler existiert.

Eine triviale Folge dieser Definition ist, daß jede \mathfrak{S} -vollreduzible Gruppe $(G; \mathfrak{S})$ ohne \mathfrak{S} -Zentrum \mathfrak{S} -halbeinfach ist. Andererseits hat auch jeder \mathfrak{S} -vollreduzible Normalteiler N einer \mathfrak{S} -halbeinfachen Gruppe $(G; \mathfrak{S})$ ein triviales \mathfrak{S} -Zentrum. $z(N)$ ist nämlich nach 1.5. ein $\mathfrak{S} \mid N$ -charakteristischer Normalteiler von N und daher wegen 1.4. normal in G , woraus $z(N) = 1$ folgt.

Satz 7* sichert somit in einer \mathfrak{S} -halbeinfachen Gruppe G die Existenz eines eindeutig bestimmten maximalen \mathfrak{S} -vollreduziblen Normalteilers V , der in G \mathfrak{S} -charakteristisch ist und ein triviales \mathfrak{S} -Zentrum besitzt.

Die Reduktion der Struktur von G auf die von V hängt entscheidend vom Zentralisator $C_G(V)$ ab. Man kommt aber dabei nur zu geeigneten Aussagen, wenn man G Nebenbedingungen unterwirft. In der folgenden Verschärfung und Verallgemeinerung eines Satzes von GOL'BERG ([1], Theorem 5) wird dies dadurch erreicht, daß man die schwache Minimalbedingung für \mathfrak{S} -Normalteiler, die nach Satz 11 in V ohnehin erfüllt ist, für jeden \mathfrak{S} -charakteristischen Normalteiler von G fordert.

14. SATZ. In einer \mathfrak{S} -halbeinfachen Gruppe $(G; \mathfrak{S})$ erfülle für jeden \mathfrak{S} -charakteristischen Normalteiler $N \triangleleft G$ die Menge

$$\mathfrak{S}^* | N = \{T : T \triangleleft N, T \in \mathfrak{S}\}$$

die schwache Minimalbedingung.

Dann gilt

14.1. Der maximale \mathfrak{S} -vollreduzible Normalteiler V von G ist der Sockel von G .

14.2. Der \mathfrak{S} -Zentralisator $z_G(V)$ ist trivial.

BEWEIS. Wir schicken zunächst eine allgemeine Betrachtung voraus.

Wegen der \mathfrak{S} -Halbeinfachheit von G gilt für den Durchschnitt einer \mathfrak{S} -charakteristischen Untergruppe C von G mit ihrem (ebenfalls \mathfrak{S} -charakteristischen) \mathfrak{S} -Zentralisator $C^* = z_G(C)$

$$(12) \quad C \cap C^* = 1.$$

Falls $C^* \neq 1$ ist, besitzt C^* nach Voraussetzung minimale \mathfrak{S} -Normalteiler und somit auch einen nichttrivialen \mathfrak{S} -Sockel $S(C^*)$, welcher direktes Produkt

$$(13) \quad S(C^*) = \times_{i \in I} M_i$$

einer Menge minimaler \mathfrak{S} -Normalteiler $M_i \triangleleft C^*$ ist.

$S(C^*)$ ist $\mathfrak{S} | C^*$ -charakteristisch in der \mathfrak{S} -charakteristischen Untergruppe C^* von G , also ebenfalls \mathfrak{S} -charakteristisch in G und erfüllt daher die schwache Minimalbedingung für \mathfrak{S} -Normalteiler. Diese Bedingung überträgt sich auf jedes M_i , da jeder \mathfrak{S} -Normalteiler von M_i auch normal in $S(C^*)$ ist. Jedes M_i besitzt somit einen nichttrivialen \mathfrak{S} -Sockel $S_i \triangleleft C^*$, $S_i \in \mathfrak{S}$. Aus der Minimalität von M_i folgt $M_i = S_i$ und eine Zerlegung

$$(14) \quad M_i = \times_{j \in J_i} M_{ij},$$

wobei jedes M_{ij} ein \mathfrak{S} -einfacher Normalteiler von M_i ist. (13) und (14)

ergeben zusammen

$$(15) \quad S(C^*) = \times_{i \in I} (\times_{j \in J_i} M_{ij}).$$

Satz 11 zeigt nun die \mathfrak{S} -Vollreduzibilität von $S(C^*)$ und daher gilt

$$(16) \quad S(C^*) \leq V.$$

Zum Beweis der ersten Behauptung des Satzes wählen wir nun speziell $C=1$. Dann ist $C^*=G \in \mathfrak{S}$ (wegen 1.1.). (16) liefert in diesem Fall $S(G) \leq V$. Wäre nun $S(G) \neq V$, so würde eine Zerlegung

$$V = S(G) \times T \quad (T \in \mathfrak{S})$$

existieren mit $T \neq 1$. Das Intervall $(1, T]$ enthielte dann nach Voraussetzung einen minimalen \mathfrak{S} -Normalteiler von G , was unmöglich ist, da alle minimalen \mathfrak{S} -Normalteiler von G in $S(G)$ enthalten sind.

Für die zweite Behauptung setzen wir $C=V$. Wäre $V^* = z_G(V) \neq 1$, so auch $S(V^*) \neq 1$. Aus (16) ergibt sich nun einerseits

$$S(V^*) \cap V = S(V^*) \neq 1,$$

aus (12) andererseits

$$S(V^*) \cap V = V^* \cap V = 1,$$

was einander widersprechende Aussagen sind. Mithin ist $V^*=1$.

Die Aussage 14.2. läßt nun in zwei wichtigen Spezialfällen weitergehende Folgerungen zu.

14*. KOROLLAR. *Eine reelle zusammenhängende und kompakte halbeinfache Liesche Transformationsgruppe ist direktes Produkt endlich vieler einfacher Liegruppen.*

BEWEIS. Wir wählen \mathfrak{S} gemäß Beispiel 2.4. G ist dann \mathfrak{S} -halbeinfach im Sinne von Definition 13. Da \mathfrak{S} die Minimalbedingung erfüllt, sind die Voraussetzungen von Satz 14 gegeben. In G existiert genau ein maximaler abgeschlossener und zusammenhängender Normalteiler V , der

nach Bemerkung 12 endliches direktes Produkt einfacher Liegruppen ist. Eine solche Gruppe besitzt aber keine äußeren Lie-Automorphismen (HERMANN [1], S. 17), so daß G Produkt von V mit $C_G(V)$ ist. Da $z_G(V)$ nach Satz 14 trivial ist, ist $C_G(V)$ diskret. Das homomorphe Bild G/V ist nun wegen $G/V \cong C/C \cap V$ einerseits diskret, da aber G zusammenhängend ist, auch zusammenhängend, woraus $G/V=1$ und $G=V$ folgt.

Man sieht also, daß in diesem Fall die Begriffe « halbeinfach » und « vollreduzierbar » zusammenfallen.

Zur zweiten Folgerung aus Satz 14 spezialisieren wir nun \mathfrak{S} nach einer anderen Richtung.

15. DEFINITION. Eine geschlossenes Untergruppensystem \mathfrak{S} einer Gruppe G heißt *zentral geschlossen*, wenn an Stelle von 1.5. die stärkere Eigenschaft gilt

1.5.* Ist $U \in \mathfrak{S}$, so auch $C_G(U) \in \mathfrak{S}$.

14**. KOROLLAR. Sei $(G; \mathfrak{S})$ eine \mathfrak{S} -halbeinfache Gruppe, \mathfrak{S} ein zentral geschlossenes Untergruppensystem. Wenn dann für jede \mathfrak{S} -charakteristische Untergruppe N von G $\mathfrak{S}^* | N$ die schwache Minimalbedingung erfüllt, so ist G isomorph zu einer \mathfrak{S} -Automorphismengruppe des maximalen \mathfrak{S} -vollreduzierbaren Normalteilers V von G , welche $J(V)$ umfaßt.

BEWEIS. Satz 14 zeigt sofort, daß für zentral geschlossene Systeme $C_G(V)=1$ ist. Die Behauptung ergibt sich nun daraus, daß die von G in V induzierte Automorphismengruppe, die wegen 1.4. eine \mathfrak{S} -Automorphismengruppe ist, isomorph zu $G/C_G(V)$ ist.

Im folgenden beschränken wir uns auf zentral geschlossene Untergruppensysteme. Eine \mathfrak{S} -vollreduzierbare Gruppe $(V; \mathfrak{S})$ ohne \mathfrak{S} -Zentrum ist in diesem Falle eine Gruppe ohne Zentrum. Wenn wir daher jedem $x \in V$ den von x in V induzierten inneren Automorphismus $\tau(x)$ zuordnen, erhalten wir einen Isomorphismus von V auf $J(V)$. Dem zentral geschlossenen System \mathfrak{S} wird dabei ein zentral geschlossenes System \mathfrak{S}^J zugeordnet.

Korollar 14** läßt sich nun in folgender Weise interpretieren: Im Falle $C_G(V)=1$ sind diejenigen \mathfrak{S} -halbeinfachen Gruppen $(G; \mathfrak{S})$, die

$(V; \mathfrak{S})$ (bis auf \mathfrak{S} -Isimorphie) als maximalen \mathfrak{S} -vollreduziblen Normalteiler besitzen, (bis auf Isomorphie) \mathfrak{S} -Automorphismengruppen von V mit zentral geschlossenen Untergruppensystemen \mathfrak{S} . Die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Gol'berg ([1], Theorem 7) zeigt, daß die Umkehrung gilt.

16. SATZ. $(V; \mathfrak{S})$ sei eine \mathfrak{S} -vollreduzible Gruppe ohne Zentrum, A eine $J(V)$ umfassende \mathfrak{S} -Automorphismengruppe von V und $\mathfrak{S} \mid J(V) = \mathfrak{S}^J$. Dann ist jede \mathfrak{S} -Untergruppe H mit $J(V) \leq H \leq A$ eine $\mathfrak{S} \mid H$ -halbeinfache Gruppe, die $J(V)$ als maximalen $\mathfrak{S} \mid H$ -vollreduziblen Normalteiler besitzt.

BEWEIS. Die entscheidende Rolle spielt folgendes Lemma (W. Specht [1]. S. 97): Bei einer Gruppe V ohne Zentrum ist der Zentralisator von $J(V)$ in $\text{Aut } V$ trivial.

Sei nun H eine \mathfrak{S} -Untergruppe mit $J(V) \leq H \leq A$ und $N \in \mathfrak{S}$ ein abelscher Normalteiler von H . Da $J(V)$ keinen abelschen \mathfrak{S} -Normalteiler $\neq 1$ besitzt, gilt $[N, J(V)] \leq N \cap J(V) = 1$. Somit gehört N zum Zentralisator von $J(V)$ in A . Das Lemma zeigt $N = 1$, was H als $\mathfrak{S} \mid H$ -halbeinfach charakterisiert. Wäre nun $J(V)$ im $\mathfrak{S} \mid H$ -vollreduziblen Normalteiler K von H echt enthalten, so würde eine Zerlegung $K = J(V) \times J'$ mit $J' \neq 1$, $J' \in \mathfrak{S}$ existieren, was wiederum wegen des Lemmas unmöglich ist.

LITERATUR

- [1] CARTAN, É.: *Sur la structure des groupes des transformations finis et continus*, Librairie Vuibert, Paris 1933.
- [1] FITTING, H.: *Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung*, Jahresber. DMV 48 (1938), 77-141.
- [1] GOL'BERG, P.: *Unendliche halbeinfache Gruppen*, Mat. Sbornik, N.S. 17 (1945), 131-142 (russ.).
- [1] HERMANN, R.: *Lie Groups*, Benjamin, New York 1966.
- [1] HIGGINS, J. P.: *Groups with multiple operators*, Proc. London Math. Soc. 6 (1956), 366-416.

- [1] KERTÉSZ, A.: *On groups every subgroup of which is a direct summand*, Publ. Math. Debrecen 2 (1951), 74-75.
- [2] KERTÉSZ, A.: *Zur Theorie der kompakt erzeugten modularen Verbände*, Publ. Math. Debrecen 15 (1968), 1-11.
- [1] SPECHT, W.: *Gruppentheorie*, Springer 1956.
- [1] WIEGOLD, J.: *On direct factors in groups*, J. London Math. Soc. 35 (1960), 310-319.
- [1] WITTMANN, E.: *Zur Übertragung der Fittingschen Strukturanalyse auf unendliche Gruppen*, Dissertation, Erlangen (1967).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 maggio 1971.