Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Jaak Peetre

Sur l'utilisation des suites inconditionellement sommables dans la théorie des espaces d'interpolation

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 173-190
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__173_0>

SUR L'UTILISATION DES SUITES INCONDITIONELLEMENT SOMMABLES DANS LA THÉORIE DES ESPACES D'INTERPOLATION

JAAK PEETRE *)

0. Introduction.

Cet article fait suite d'un article antérieur (cf. Peetre [18]). Il est aussi en partie inspiré par un travail récent de Gagliardo [7]. Essentiellement, cet auteur montre que à l'aide des espaces de suites inconditionellement sommables on peut obtenir tous les espaces d'interpolation (tandis que, par exemple, les espaces de moyennes de Lions- Peetre [14], dont on a une théorie assez bien développée, dépendent d'une utilisation des suites absolument sommables). Des idées très voisines se trouvent d'ailleur aussi dans Deutsch [6]; bien entendu, ce dernier auteur s'occupe du cas beaucoup plus technique des espaces localement convexes. Mentionnons aussi que Gagliardo (encore dans [7]) se serve des suites inconditionellement sommables pour donner une nouvelle démonstration du théoréme de Riesz-Thorin. J'ai d'ailleurs aperçu moi-même déjà en 1962 l'utilité potentielle de la sommabilité inconditionelle (cf. Peetre-Persson [24], p. 41) mais je n'avais pas, à cet époque, des motifs suffisants, et l'énergie pour essayer d'approfondir cette remarque. En redigant [18] j'avais également pensé d'y ajouter quelquechose sur la sommabilité inconditionelle. Maintenant vient enfin une version un peu elaborée de mes idées dans cette direction. Bien entendu, il ne s'agit aucunement d'une théorie complète mais seulement d'un nombre d'observations plus ou moins isolées, ayant comme dénominateur commun l'idée de la somma-

*) Indirizzo dell'A.: Tekniska Högskolan i Lund, Fack 725, 220 07 Lund 7, Sverige.

bilité inconditionelle, accompagnées par une petite liste de problèmes ouverts.

Le plan de l'article est le suivant. Au n. 1 on introduit certains espaces espaces de suites à valeurs vectorielles et des espaces d'intepolation associés à ces espaces, en particulier certains espaces notés $\langle \vec{A} \rangle_\theta$. Au n. 2 on donne des relations d'inclusion entre ces espaces d'interpolation, notamment un complément au résultat principal de [18]. Enfin, au n. 3 on donne des exemples concrets des espaces $\langle \vec{A} \rangle_\theta$. Le n. 4 contient une discussion de la possibilité d'utiliser la théorie des espaces d'interpolation dans l'étude des idéaux de Banach d'opérateurs. Le n. 5 donne une nouvelle démonstration d'un théorème de Marcinkiewicz-Zygmund [15], [16].

1. Espaces de suites à valeurs vectorielles et espaces d'interpolation associés.

Soit A un espace de Banach *complexe*. Nous allons considérer des $u=\{u_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ à valeurs dans A (c'est-à-dire des applications de $\boldsymbol{Z}$ dans A). Introduisons trois espaces de suites, comme suit (p étant un nombre tel que $1\leq p\leq\infty$, avec l'interpretation habituelle si $p=\infty$):

$l_p(A)$. C'est l'espace du suites de puissance p ème *absolument* sommable. On a $u\in l_p(A)$ si, et seulement si

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \| u_k \|_A^p\Big)^{1/p}\leq C<\infty .$$

$\lambda_p(A)$. C'est l'espace de suites de puissance p ème *inconditionellement* sommable. On a $u\in\lambda_p(A)$ si, et seulement si quelle que soit $\varepsilon= =\{\varepsilon_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ une suite numérique telle que

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} | \varepsilon_k |^{p'}\Big)^{1/p'}\leq 1 \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$$

la limite

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k u_k = \lim_{\substack{\nu_1\to\infty \\ \nu_0\to-\infty}} \sum_{k=\nu_0}^{\nu_1} \varepsilon_k u_k$$

existe et satisfait à l'inégalité (C ne dépend pas de ε)

$$\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k u_k \|_A \leq C < \infty .$$

(On notera que $\lambda_p(A)$ pour $1 < p \leq \infty$ s'identifie à $\mathfrak{L}(l'_p, A)$, $\lambda_1(A)$ seulement à un sous-espace fermé de $\mathfrak{L}(l_\infty, A)$).

$s_p(A)$. C'est l'espace de suites u qui sont les coefficients de Fourier d'une fonction à puissance p'-ème intégrable sur $\boldsymbol{T}$ (tore), à valeurs dans A, en autres mots, on a:

$$\left(\int_{\boldsymbol{T}} \| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\eta} u_k \|_A^{p'} d\eta \right)^{1/p'} \leq C < \infty .$$

Dans chaqu'un des trois cas posons

$$\| u \| = \inf C$$

où C parcourt l'ensemble des C figurant dans les inégalités respectives ci-dessus. C'est une norme dans l'espace correspondant qui en fait un espace de Banach.

Voici maintenant des espaces d'interpolation associés à ces espaces de suites. Soient A_0 et A_1 des espaces de Banach comme dans [18], n. 1, autrement dit $\vec{A} = \{A_0, A_1\}$ est un *couple de Banach* (notation abreviée introduite dans Peetre [19]). On pose alors (θ, p_0, p_1 étant des nombres tels que $0 < \theta < 1$, $1 \leq p_0$, $p_1 \leq \infty$):

$(\vec{A})_{\theta, p_0, p_1} = (A_0, A_1)_{\theta, p_0, p_1}$. C'est l'espace des $a \in A_0 + A_1$ tels qu'il existe une suite u avec

$$a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \tag{1.1}$$

satisfaisant à

$$2^{-k\theta} u \in l_{p_0}(A_0), \; 2^{-k(\theta-1)} u \in l_{p_1}(A_1).$$

Cf. Lions-Peetre [13].

$\langle \vec{A} \rangle_{\theta, p_0, p_1} = \langle A_0 , A_1 \rangle_{\theta, p_0, p_1}$. Même définition, avec $\lambda_{p_0}(A_0)$, $\lambda_{p_1}(A_1)$ au lieu de $l_{p_0}(A_0)$, $l_{p_1}(A_1)$. Cf. Peetre-Persson [24], p. 42.

$[\vec{A}]_{\theta, p_0, p_1} = [A_0 , A_1]_{\theta, p_0, p_1}$. Même définition, avec $s_{p_0}(A_0)$, $s_{p_1}(A_1)$ au lieu de $l_{p_0}(A_0)$, $l_{p_1}(A_1)$. Cf. Calderón [3], [4].

Ce sont des espaces de Banach, la norme étant défini par la formule

$$\| a \| = \inf_u \max (\| 2^{-k\theta} u \|, \| 2^{-k(\theta-1)} u \|)$$

où u parcourt l'ensemble des u figurant dans la définition.

Lorsque $p_0 = p_1 = 1$ (c'est le cas le plus intéressant) on écrit simplement $(\vec{A})_\theta$, $\langle A \rangle_\theta$, $[A]_\theta$, au lieu de $(\vec{A})_{\theta,1,1}$, $\langle \vec{A} \rangle_{\theta,1,1}$, $[\vec{A}]_{\theta,1,1}$, respectivement. Puisque évidamment

$$l_1(A) \subset \lambda_1(A) \subset s_1(A),$$

on a

$$(\vec{A})_\theta \subset \langle \vec{A} \rangle_\theta \subset [\vec{A}]_\theta . \tag{1.2}$$

Au n. 2 on va examiner dans quelle mesure ces relations d'inclusion se laissent améliorer. Remarquons aussi que $[\vec{A}]_{\theta, p_0, p_1}$ en effet effectivement ne dépend que de θ (cf. [18], Lemme 1.1). De même, $(\vec{A})_{\theta, p_0, p_1}$ ne depend effectivement que de θ et de p, défini par $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ (d'après le « théorème des paramètres »; cf. Peetre [22]); pour cela on va écrire simplement $(\vec{A})_{\theta, p}$ au lieu de $(\vec{A})_{\theta, p_0, p_1}$.

Evidamment, on peut généraliser la construction ci-dessus. Etant donnés un couple de « foncteurs de suites » $\vec{\Phi} = \{\Phi_0 , \Phi_1\}$ (Ça veut dire, étant fixé $\vec{A_0} = \{A_0 , A_1\}$, on a $\vec{\Phi}(\vec{A}) = \{\Phi_0(A_0), \Phi_1(A_1)\}$, un couple d'espacesces de suites), on introduit l'espace $F_{\vec{\Phi}}(\vec{A})$ des $a \in A_0 + A_1$ tels qu'il existe une suite u avec (1.1) satisfaisant à

$$u \in \Phi_0(A_0) \cap \Phi_1(A_1).$$

On notera que le paramètre θ de tout à l'heure est absorbé dans la définition de $\Phi_0(A_0)$ et $\Phi_1(A_1)$. Les trois cas particuliers, que nous avons envisagés, sont tous de type $\Phi_0(\vec{A})=2^{k\theta}\tilde{\Phi}(A_0)$, $\Phi_1(\vec{A})=2^{k(\theta-1)}\tilde{\Phi}(A_1)$ où $\tilde{\Phi}$ est un foncteur de suite donné, invariant par translations (de $\boldsymbol{Z}$). En particulier si on prend $\Phi_\nu(A_\nu)$ de la forme $\mathfrak{L}((\Phi_\nu(R))', A_\nu)$, disons « de type de sommabilité inconditionelle », on obtient une extension considérable de $\langle \vec{A} \rangle_\theta$. Comme nous avons remarqué dans l'introduction, Gagliardo [7] a démontré qu'on peut obtenir tous les espaces d'interpolation à l'aide de ces espaces particuliers, plus précisement comme la somme d'une famille d'espaces $F_{\vec{\Phi}}(\vec{A})$, « de type de sommabilité inconditionelle ».

PROBLÈME 1.1. Faire une étude systématique des espaces $F_{\vec{\Phi}}(\vec{A})$, notamment dans le cas « invariant par translations », indiqué tout à l'heure.

On notera enfin qu'on peut refaire tout ce que nous avons dit en utilisant une variable « continue » $t(0<t<\infty)$, au lieu d'une variable « discrete » k (k entier, $-\infty<k<\infty$).

PROBLÈME 1.2. Dans quelles conditions, peut on affirmer que la définition « continue » conduit au même espaces que la définition discrète.

Il est bien connu que c'est le cas pour les espaces $(\vec{A})_{\theta, p_0, p_1}$ (donc le cas de sommabilité absolue); cf. Lions-Peetre [14], chap. II. Dans les autres cas je ne connais pas la réponse. En particulier je ne sais pas si la définition de $[\vec{A}]_\theta$ de tout à l'heure est équivalente à la habituelle (Calderón [3], [4], Lions [13]).

2. Relations d'inclusion entre les espaces d'interpolation.

Soit encore A un espace de Banach. Soit p un numbre tel que $1\leq p\leq 2$. Nous disons que A est de *λ-type p* lorsqu'on a l'inclusion

$$\lambda_1(A)\subset l_p(A)$$

et *de s-type p* lorsqu'on a:

$$l_p(A) \subset s_p(A).$$

D'après le théorème de Dvoretsky-Rogers (cf. par exemple Day [5], p. 61) pour que A soit de λ-type p il faut que $p \geq 2$, sauf dans le cas $\dim A < \infty$. De même d'après un résultat bien-connu (cf. par exemple Zygmund [32] t. 2, p. 101) pour que A soit de s-type p il faut que $p \leq 2$.

EXEMPLE 2.1. L_p est de λ-type q pour $q = \min(p, p')$ (d'après [18], ex. 2.3) et de s-type q pour $q = \max(p, 2)$ (d'après un résultat classique d'Orlicz; cf. Day [5], p. 63).

Résumons maintenant le résultat principal de [18] (cf. notamment th. 2.1 et th. 3.1).

THÉORÈME 2.1. Soit $\vec{A} = \{A_0, A_1\}$ un couple tel que A_0 est de s-type p_0 et A_1 de s-type p_1. Alors on a:

$$(\vec{A})_{\theta,p} \subset [\vec{A}]_\theta \text{ avec } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

De plus, $(\vec{A})_{\theta,p}$ est de s-type p.

DÉMONSTRATION. Cf. [18]. #

On va maintenant étendre ce rèsultat au cas « λ ».

THHÉORÈME 2.2. Soit $\vec{A} = \{A_0, A_1\}$ un couple tel que A_0 est de s-type p_0 et A_1 de s-type p_1. Alors on a:

$$\langle \vec{A} \rangle_\theta \subset (\vec{A})_{\theta,p} \text{ avec } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

En particulier, si A_0 et A_1 sont tous les deux de s-type 2 (c'est le cas optimal d'après ce qu'on vient de dire (ex. 2.1)), on a:

$$\langle \vec{A} \rangle_\theta \subset (\vec{A})_{\theta,2}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $a \in \langle \vec{A} \rangle_\theta$. Alors il existe u tel que (1.1) a lieu et tel que

$$2^{-k\theta} u \in \lambda_1(A_0),\ 2^{-k(\theta-1)} u \in \lambda_1(A_1).$$

Mais d'aprés le définition de s-type il résulte alors

$$2^{-k\theta} u \in l_{p_0}(A_0),\ 2^{-k(\theta-1)} u \in l_{p_1}(A_1).$$

Donc on a $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p_0, p_1}$, et $(A_0, A_1)_{\theta, p_0, p_1} = (A_0, A_1)_{\theta, p}$ d'après le « théorème des paramètres ». #

COROLLAIRE 3.1. Soient A_0 et A_1 tous les deux de s-type p et de λ-type 2 et admettons aussi que

$$\langle \vec{A} \rangle_\theta = [\vec{A}]_\theta . \tag{2.1}$$

Alors vient:

$$(\vec{A})_{\theta, p} \subset [\vec{A}]_\theta \subset (\vec{A})_{\theta, 2} .$$

DÉMONSTRATION. Conséquence immédiate du th. 2.1 et du th. 2.2. #

PROBLÈME 2.1. Dans quelles hypothèses, est satisfaite la condition (2.1)? (Je ne connais aucun exemple où (2.1) n'a pas lieu).

3. Exemples concrets des espace $\langle \vec{A} \rangle_\theta$.

Donnons d'abord l'application au théorème de Riesz-Thorin, due à Gagliardo [7] (déjà mentionnée dans l'Introduction).

THÉORÈME 3.1 (Gagliardo). $\langle L_{p_0}, L_{p_1} \rangle_\theta = L_p$ si $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.

DÉMONSTRATION. a) Soit $a \in L_p$. Posons

$$u_k(x) = \begin{cases} a(x) & \text{si } x \in E_k \\ 0 & \text{si } x \notin E_k \end{cases}$$

où

$$E_k = \{x \mid c^k \leq |a(x)| < c^{k+1}\},$$

c étant une constante qu'il faut encore déterminer. Alors il vient, $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$ étant une suite quelconque avec $|\varepsilon_k| \leq 1$,

$$\| \Sigma\, \varepsilon_k 2^{-k\theta} u_k \|_{L_{p_0}}^{p_0} \leq \Sigma\, 2^{-k\theta p_0} \int_{E_k} |a(x)|^{p_0}\, dx \leq$$

$$\leq C\, \Sigma\, 2^{-k\theta p_0} c^{k(p_0-p)} \int_{E_k} |a(x)|^p\, dx \leq$$

$$\leq C\, \Sigma \int_{E_k} |a(x)|^p\, dx = C\, \| a \|_{L_p}^p ,$$

si on détermine c par $c^{p_0-p} = 2^{\theta p_0}$. De même, il vient

$$\| \Sigma\, u_k 2^{-k(\theta-1)} u_k \|_{L_{p_1}}^{p_1} \leq C\, \| a \|_{L_p}^p ,$$

si on determine c par $c^{p_1-p} = 2^{(\theta-1)p_1}$. Or, vue la relation $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. ces deux determinations de c sont consistantes. Donc, avec ce choix de c, on a

$$2^{-k\theta} u \in \lambda_1(L_{p_0}),\ 2^{-k(\theta-1)} u_k \in \lambda_1(L_{p_1}).$$

Parce que évidamment

$$a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k$$

il en résulte que $a \in \langle L_{p_0}, L_{p_1} \rangle_\theta$.

ii) Inversement, soit $a \in \langle L_{p_0}, L_{p_1} \rangle_\theta$. D'après (1.2), on $a \in [L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta$. Or, d'après Caldéron [4], $[L_{p_0}, L_{p_1}] = L_p$. D'où $a \in L_p$. #

Remarque 3.1. A-vrai-dire le th. 3.1 ne redonne pas enterièrement le théorème de Riesz-Thorin parcequ'on n'obtient par la bonne constante 1 dans l'inégalité (de convexité) correspondente. Mais c'est facile de refaire tout ce que nous avons dite, avec le « nombre de base » 2 remplacé par un nombre quelquonque $k>1$, et puis faire k tendre vers 1. Alors on va obtenir la constante 1 qu'il faut.

PROBLÈME 3.1. La démonstration du th. 3.1 fait intervenir les espace $[\vec{A}]_\theta$. Donc l'hypothèse que les scalaires sont complexes intervient manifestetment. Mais le th. 3.1, est-il vrai encore dans le cas réel? (Il paraît que pour cela il faut introduire des espaces de suites sommables *presque sûrment*, de sorte qu'au lieu de $\| \Sigma\, \varepsilon_k u_k \|_A \leq C$ vient une relation de type $(\mathcal{E}(\| \Sigma\, \varepsilon_k u_k \|_A^p))^{1/p} \leq C$, $\mathcal{E}$ désignant *l'ésperience* de $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ considerée comme *variable aléatoire*).

PROBLÈME 3.2. Le th. 3.1, peut-on l'étendre au *cas vectoriel* (c'est-à-dire des couples de type $\{L_{p_0}(A_0),\ L_{p_1}(A_1)\}$). Ceci est un cas particulier d'un problème général, à savoir de déterminer tous les foncteurs d'interpolation F qui *commutent avec L_p* au sens suivant:

$$F(\{L_{p_0}(A_1),\ L_{p_1}(A_0)\}) = L_p(\{F(A_0),\ F(A_1)\}).$$

où encore, plus brièvement,

$$F(L_{\vec{p}}(\vec{A})) = L_p(F(\vec{A})) \text{ avec } \vec{p} = (p_0\,,\ p_1).$$

Des exemples de tels functeurs sont:

i) $F(\vec{A}) = [A]_\theta$ (d'après Calderón [4]),

ii) $F(\vec{A}) = [\vec{A}]_{\theta, p}$ (d'après Lions-Peetre [14]).

avec θ donné par $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.

Donnons ensuite une application liée aux espaces de Besov B_p^{sq} et les espaces de Sobolev « fractionnaires » H_p^s (cf. [18], n. 4). Il s'agit de la relation bien connue (cf. Besov [1], Taibleson [29]; cf. également Zygmund [32], t. 2, chap. 15)

$$B_p^{sp} \subset H_p^s \subset B_p^{s2} \text{ pour } 1 < p \leq 2 \tag{3.1}$$
$$(B_p^{s2} \subset H_p^s \subset B_p^{sp} \text{ pour } 2 \leq p < \infty).$$

Les cas $p \leq 2$ et $p \geq 2$ étant duaux l'un à l'autre il suffit d'envisager le premier cas, donc $p \leq 2$, seulement. L'inclusion $B_p^{sp} \subset H_p^s$ résulte alors par application du th. 2.1 (cf. [18], n. 4 pour les détails). Nous allons maintenant déduire d'une façon analogue l'inclusion $H_p^s \subset B_p^{s2}$, en utilisant cette fois le th. 2.2. *Donc, en somme, nous aurons une démonstration complète de* (3.1) *fondée sur la théorie des espaces d'interpolation.* Mais, bien entendu, au fond cette démonstration ne diffère aucunement des démonstrations usuelles, tous les difficultés essentielles étant seulement cachées dans un langage peut être plus suggestif. Voici le raisonnement qu'il faut. L'espace H_p^s étant isomorphe à L_p, il résulte d'après l'exemple 2.1 que H_p^s est de s-type 2 (pour $1 < p \leq 2$). Donc on peut utiliser le th. 2.2. Il vient:

$$\langle H_p^{s_0}, H_p^{s_1} \rangle_\theta \subset (H_p^{s_0}, H_p^{s_1})_{\theta 2} = B_p^{s2},$$

avec

$$s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1 ,$$

Donc tout ce qu'il faut, est de démontrer le

THÉORÈME 3.2. $\langle H_p^{s_0}, H_p^{s_1} \rangle_\theta = H_p^s$ avec $s=(1-\theta)s_0+\theta s_1$ $(0<\theta<1, 1<p<\infty)$.

DÉMONSTRATION. a) Soit $a \in H_p^s$. Soit $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ une suite de functions dans $\mathcal{S}(R^n)$ telle que le support de $\widehat{\varphi_k}$ est contenu dans $I_k = \{2^{k-1} \leq \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ le support de $\widehat{\varphi_0}$ dans $I_0 = \{|\xi| \leq 2\}$, avec

$$\sum_{k=0}^\infty \widehat{\varphi_k}(\xi) = 1, \quad \widehat{\varphi_k}(\xi) = \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

(Cf. Peetre [21]). Alors on a, d'après une forme du théorème de Paley-Littlewood,

$$\|(\sum_{k=0}^\infty (2^{ks} | \varphi_k * a |)^2)^{1/2}\|_{L_p} \leq C \| a \|_{H_p^s} .$$

Posons

$$u_k = \varphi_k * a (k=0, 1, \ldots), \; u_k = 0 (k=-1, -2, \ldots).$$

Alors on a également, $\varepsilon=\{\varepsilon_k\}$ étant une suite quelconque avec $|\varepsilon_k|\leq 1$,

$$\|(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(2^{ks}|\varepsilon_k u_k|)^2)^{1/2}\|_{L_p}\leq C\|a\|_{H_p^s}.$$

D'où, encore d'après Paley-Littlewood,

$$\|\Sigma\,\varepsilon_k 2^{k(s-s_0)}u_k\|_{H_p^{s_0}}\leq C\|a\|_{H_p^s}$$

$$\|\Sigma\,\varepsilon_k 2^{k(s-s_1)}u_k\|_{H_p^{s_1}}\leq C\|a\|_{H_p^s}$$

Comme évidamment

$$a=\Sigma\,u_k$$

il en résulte sans peine $a\in\langle H_p^{s_0}, H_p^{s_1}\rangle_\theta$.

b) Inversement, soit $a\in\langle H_p^{s_0}, H_p^{s_1}\rangle_\theta$. D'après (1i2), on a $a\in[H_p^{s_0}, H_p^{s_1}]_\theta$. Or, d'après Calderón [4] (Cf. Peetre [21]), $[H_p^{s_0}, H_p^{s_1}]=H_p^s$. D'où $a\in H_p^s$. #

Remarque 3.2. Si on pouvait résoudre le problème 3.2, on pourrait peut-être déduire le th. 3.2 directement du th. 3.1 (cf. Grisvard [8], Peetre [21] pour une situation analogue (les cas i) et ii) mentionnés tout à l'heure).

Problème 3.3. En ce qui concerne l'interpolation des espaces H_p^s, le cas $p=1$ semble être tout à fait ouvert. (Tous les traitement jusqu'ici utilise de façon essentielle Paley-Littlewood).

4. Application de la théorie des espaces d'interpolation aux idéaux de Banach d'opérateurs.

C'est surtout Pietsch (cf. surtout [24], [25]; cf. également Pietsch-Triebel [27], Triebel [31], [30], Kwapién [11]) qui a insité sur l'utilisation des espaces d'interpolation dans l'étude des idéaux de Banach d'opérateurs. Par un idéal de Banach d'opérateurs on entend, selon Pietsch, la donnée, pour tous deux espaces de Banach A et B, un sous-espace vectoriel $\mathfrak{J}(A, B)$ de $\mathfrak{L}(A, B)$, stable par multiplication, c'est-à-dire que, quels soient A_1 et B_1 des espaces de Banach, on a $R \in \mathfrak{L}(A_1, A)$ $T \in \mathfrak{J}(A, B)$, $S \in \mathfrak{L}(B, B_1) \Rightarrow STR \in \mathfrak{J}(A_1, B_1)$ muni d'une norme ι, jouissant de la propriété sous-multiplicative.

$$\iota(STR) \leq \| S \|_{\mathfrak{L}(B, B_1)} \iota(T) \| T \|_{\mathfrak{L}(A_1, A)}$$

et qui en fait un espace de Banach.

EXEMPLE 4.1. $\mathfrak{J}(A, B) = \mathfrak{A}_{(p,q)}(A, B) =$ l'ideal de Banach d'opérateurs *absolument* (p, q)*-sommants* (c'est-à-dire que $T \in \mathfrak{A}_{(p,q)}(A, B)$ si, et seulement si $\{x_n\} \in \lambda_p(A) \Rightarrow \{Tx_n\} \in l_q(B)$).

EXEMPLE 4.2. $\mathfrak{J}(X, Y) = \mathfrak{S}_p(A, B) =$ l'idéal de Banach d'opérateurs *à trace p-ème fini* (c'est-à-dire que $T \in \mathfrak{S}_p(A, B)$ si, et seulement si $\{s_n(T)\} \in l_p$, où $s_n(T)$ sont les *nombres d'approximation* de T, définis par

$$s_n(T) = \inf_{\text{rang } F < n} \| T - F \|_{\mathfrak{L}(A, B)} .$$

Indiquons brièvement quelquesunes des applications des espaces d'interpolation qu'on connait jusqu'ici.

THÉORÈME 4.1 (Kwapien). On a: $\mathfrak{A}_{(1,q)}(l_1, l_p) = \mathfrak{L}(l_1, l_p)$, avec $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}$.

DEMONSTRATION. Le résultat est vrai pour $p = 1$ et $p = \infty$ (d'après Orlicz, v. ex. 1.1), avec $q = 2$, et pour $p = 2$ (d'après le « théorème fondamental » de Grothendieck [9]; cfr. Lindenstrauss-Pelczynski [12]), avec $q = 1$. L'espace $\mathfrak{L}(l_1, l_p)$ peut s'identifier à l'espace $l_\infty(l_p)$. Etant donné $\{x_n\} \in \lambda_1(l_1)$ on va considérer l'application

$$L : T \rightarrow \{Tx_n\}.$$

On a alors évidamment (d'après Orlicz et Grothendieck):

$$L : \{l_\infty(l_1), l_\infty(l_2)\} \rightarrow \{l_2(l_1), l_1(l_2)\}. \tag{4.1}$$

D'où par interpolation

$$L : [l_\infty(l_1), l_\infty(l_2)]_\theta \rightarrow [l_2(l_1), l_1(l_2)]_\theta .$$

Or d'après Calderón [4]

$$[l_2(l_1),\ l_1(l_2)]_\theta = l_q(l_p)$$

$$[l_\infty(l_1),\ l_\infty(l_2)]_\theta = l_\infty(l_p)$$

pour

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2},\quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{1}$$

ou, en faisant l'elimination

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} = 1 - \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|.$$

Autrement dit, si $T \in \mathfrak{L}(l_1, l_2)$, $\{x_n\} \in \lambda_1(l_p)$ entraîne $\{Tx_n\} \in l_q(l_p)$ donc $T \in \mathfrak{A}_{(1,q)}(l_1, l_2)$. Ceci achève la preuve si, $1<p<2$. La cas $2<p<\infty$ se traite d'une façon analogue si on commence par

(4.2) $$L : \{l_\infty(l_\infty),\ l_\infty(l_2)\} \to \{l_2(l_\infty),\ l_\infty(l_2)\} \to \{l_2(l_\infty),\ l_1(l_2)\}.$$

au lieu de (4.1).

La technique de la démonstration du th. 4.1 est très générale. Voir Spanne [28]; voir également Krée [10]. Voir aussi par exemple Peetre [20] où on en donne une autre application, liée aux suites inconditionellement sommables. Ici nous nous bornons d'énoncer le

THÉORÈME 4.2. Soit $\vec{A} = \{A_0, A_1\}$ un couple tel que $\mathfrak{A}_{(1,q_i)}(l_1, A_i) = \mathfrak{L}(l_1, A_i)$ $(i=0,\ 1)$. Alors on a:

$$\mathfrak{A}_{(1,q)}(l_1, A) = \mathfrak{L}(l_1, A) \text{ avec } A = [A_0, A_1], \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

PROBLÈME 4.1. Peut-on, dans une telle situation, s'en servir d'autres foncteurs d'interpolations. Cf. problème 3.2.

Voici maintenant une autre application d'une nature un peu différente.

Théorème 4.3 (Pietsch-Triebel). On a:

$$[\mathfrak{A}_{(p,q_0)}(A, B), \mathfrak{A}_{(p,q_1)}(A, B)]_\theta \subset \mathfrak{A}_{(p,q)}(A, B)$$

avec

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Démonstration. Etant donné $\{x_n\} \in \lambda_p(A)$ on considère de nouveau l'application:

$$L : T \to \{Tx_n\}.$$

On a:

$$L : \{\mathfrak{A}_{(p,q_0)}(A, B), \mathfrak{A}_{(p,q_1)}(A, B)\} \to \{l_{q_0}(B), l_{q_1}(B)\}.$$

D'où:

$$L : [\mathfrak{A}_{(p,q_0)}(A, B), \mathfrak{A}_{(p,q_1)}(A, B]_\theta \to [l_{q_0}(B), l_{q_1}(B)]_\theta .$$

Or encore d'après Calderón [4]

$$[l_{q_0}(B), l_{q_1}(B)]_\theta = l_q(B).$$

D'où l'énoncé. #

Corollaire 4.1 (Mitiagin, Kwapién). Soit $A=B=$ un espace de Hilbert. Alors on a:

$$\mathfrak{A}_{(p,q)}(A, A) = \mathfrak{S}_r(A, A) \text{ pour } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \ 2 \leq r \leq \infty, \ 1 \leq p \leq 2.$$

Démonstration. D'après Pietsch et Pelczyński (cf. Kwapién [11] ou Pietsch-Triebel [27]) le résultat est vrai pour $r=\infty$, et d'après Mazur (cf. Day [5], p. 63) pour $r=2$. D'où d'après le th. 4.3.

$$[\mathfrak{S}_2(A, A), \mathfrak{S}_\infty(A, A)]_\theta \subset \mathfrak{A}_{(p,q)}(A, A) \text{ pour } \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{\infty}.$$

Or d'après Pietsch-Triebel [27]

$$[\mathfrak{S}_{r_0}(A, A), \mathfrak{S}_{r_1}(A, A))]_\theta = \mathfrak{S}_r(A, A) \text{ pour } \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}.$$

D'où la partie non-triviale de l'enoncé. Pour le reste nous renvoyons à Pietsch-Triebel [26]. #

Le th. 4.3 évidamment admet l'extension suivante (ce que montre de nouveaux l'intêret du problème 3.2).

THÉORÈME 4.4. Soit F n'importe quel foncteur d'interpolation qui commute avec L_q (au sens du problème 3.2). Soit $\vec{B}$ un espace quelconque et soit B un couple quelconque. Alors on a:

$$F(\mathfrak{A}_{(p,q_0)}(A, B_0), \mathfrak{A}_{(p,q_1)}(A, B_1)) \subset \mathfrak{A}_{(p,q)}(A, B)$$

avec $B=F(\vec{B})$.

Ce qu'on vient de dire n'a visiblement aucun rapport direct avec le contenu des numéros précedants. Mais je crois que ce soient justement les espaces $\langle \vec{A} \rangle_\theta$ qui auriont une place importante dans l'étude, de point de vue de l'interpolation, des idéaux de Banach d'opérateurs, notamment les idéaux $\mathfrak{A}_{(pq)}(A, B)$.

PROBLÈME 4.2. Utiliser les espaces $\langle A \rangle_\theta$ pour l'interpolation des $\mathfrak{A}_{(p,q)}(A, B)$.

5. Le théorème de Marcinkiewicz-Zygmund.

Nous concluons par donner une nouvelle démonstration (d'une partie) du résultat suivant, ce que encore une fois montre l'intêret du problème 3.2.

THÉORÈME 5.1 (Marcinkiewicz-Zygmund). Soit $T: L_p \to L_p$ un opérateur quelconque. Définissions l'operateur $\tilde{T}$ pour les suites $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ par

$$\tilde{T}: \{x_n\}_{n=1}^\infty \to \{Tx_n\}_{n=1}^\infty .$$

Alors on a, avec la constante 1 dans l'inégalité correspondante:

i) $\tilde{T}: L_p(l_2) \to L_p(l_2)$ pour $1 \leq p < \infty$

ii) $\tilde{T}: L_p(l_q) \to L_p(l_q)$ pour $p \leq q \leq 2$.

DÉMONSTRATION. i) La démonstration de Marcinkiewicz-Zygmund [16] (= Marcinkiewicz [15]) dépend essentiellement de la possibilité de plonger l_2 dans L_p. Ici nous n'avons rien à contribuer. (Remarquons que sans la bonne constante le résultat est du à Paley [17]).

ii) La démonstration de [14], [15] utilise maintenant la possibilité de plonger l_q dans L_p ($p \leq q \leq 2$). (Sur ce point on pouvrait se rapporter à Bretagnolle-Dacunha - Castelle-Krivine [2]). Nous allons suivre un autre chemin. D'après i) le résultat est vrai pour $q=2$. Il est manifestement aussi vrai pour $q=p$. Autrement dit, il vient

$$\tilde{T} : \{L_p(l_2),\ L_p(l_p)\} \to \{L_p(l_2),\ L_p(l_p)\}.$$

D'où par interpolation

$$\tilde{T} : [L_p(l_2),\ L_p(l_p)]_\theta \to [L_p(l_2),\ L_p(l_p)].$$

D'où, encore une fois d'après Calderón [4]

$$\tilde{T} : L_p(l_q) \to L_p(l_q) \text{ pour } \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{p}. \quad \#$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BESOV, O. B.: *Etude d'une classe d'espaces de fonctions liées aux théorèmes de plongement*, Trudy Mat. Inst. Steklov., 60 (1961), 42-81. (En russe).

[2] BRAETAGNOLLE, J., DACUNHA-CASTELLE, D., KRIVINE, J. L.: *Lois stables et espaces L^p*, Lecture notes in mathematics n. 31, Springer, Berlin, 1967.

[3] CALDÉRON, A. P.: *Intermediate spaces and interpolation*, Studia Math. (Série spéciale) 1 (1963), 31-34.

[4] CALDÉRON, A. P.: *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24 (1964), 113-190.

[5] DAY, M.: *Normed linear spaces*, Ergebnisse n. 21, Springer, Berlin, 1962.

[6] DEUTSCH, N.: *Interpolation dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes*, Bull. Soc. Math. France, Suppl., *13* (1968), 3-187.

[7] GAGLIARDO, E.: *Caratterizzazione costruttiva di tutti gli spazi di interpolazione tra spazi di Banach*, Symposia Mathematica 2 (1968), 95-106.

[8] GRISVARD, P.: *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications*, J. Math. Pures Appl. 45 (1966), 143-206 et 207-290.

[9] GROTHENDIECK, A.: *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956), 1-79.

[10] KRÉE, P.: *Interpolation d'espaces que ne sont ni normés ni complets. Applications*, Ann. Inst. Fourier 17 (1968), 137-174.

[11] KWAPIÉN, S.: *Some remarks on* $(p, 1)$*-absolutely summing operators in* l_p*-spaces*, Studia Math. 29 (1968), 327-337.

[12] LINDENSTRAUSS, J., PELCZYNSKI, A.: *Absolutely summing operators in* $\mathfrak{L}_p$*-spaces and their applications*, Studia Math. 29 (1968), 275-326.

[13] LIONS, J. L.: *Une construction d'espaces d'interpolation*, C. R. Acad. Sci. Paris 251 (1960), 1853-1855.

[14] LIONS, J. L., PEETRE, J.: *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci, 19 (1964), 6-58.

[15] MARCINKIEWICZ, J.: *Collected Papers*, Varsovie, 1964, 541-546.

[16] MARCINKIEWICZ, J., ZYGMUND, A.: *Quelques inégalité pour les opérations linéaires*, Fund. Math. 32 (1939), 115-121.

[17] PALEY, R. E. A. C.: *A remarkable series of orthogonal fuctions, I*, Proc. London Math. Soc. 34 (1932), 241-264.

[18] PEETRE, J.: *Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles*, Rend. Sem. Mat. Padova 42 (1969), 15-26.

[19] PEETRE, J.: *A new approach in interpolation spaces*, Studia Math. 34 (1970), 23-42.

[20] PEETRE, J.: *Zur Interpolation von Operatorenräumen*, Arch. Math. (Basel) 21 (1970), 601-608.

[21] PEETRE, J.: *Sur les espaces de Besov*, C. R. Acad. Sci. Paris 264 (1967), 281-283.

[22] PEETRE, J.: *Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation*, Ricerche Mat. 12 (1963), 248-261.

[23] PEETRE, J.: *Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation*, C. R. Acad. Sci. Paris 256 (1963), 1424-1426.

[24] PEETRE, J., PERSSON, A.: *Interpolation av Banach-rum*, Cours, Lund, 1962.

[25] PIETSCH, A.: *Ideale von Operatoren in Banachräumen*, Mitt. Math. Gesellsch. D.D.R. 1 (1968), 1-14.

[26] PIETSCH, A.: *Ideale von* S_p*-Operatoren in Banachräumen*, Conf. à Varsovie, juin 1969.

[27] PIETSCH, A., TRIEBEL, H.: *Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren*, Studia Math. 31 (1968), 95-109.

[28] SPANNE, S.: *Sur l'interpolation entres les espaces* $\mathfrak{L}_k^{p\Phi}$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 20 (1966), 625-648.

[29] TAIBLESON, M. H.: *On the theory of Lipschitz spaces of distributions in Eucliden n-space, I. Principal properties*, J. Math. Mech. 13 (1964), 407-419.

[30] TRIEBEL, H.: *Zur Interpolation von Normidealen in Hilberträumen*, Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena-Thüringen 18 (1969), 263-267.

[31] TRIEBEL, H.: *Über die Verteilung der Approximationszahlen in Sobolev-Besov-Raümen*, Inventiones Math. 4 (1967), 275-293.

[32] ZYGMUND, A.: *Trigonometrical series*, Cambridge, 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 aprile 1971.