Maurizio Emaldi

Sui gruppi relativamente complementati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 46 (1971), p. 15-18

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1971__46__15_0>

SUI GRUPPI RELATIVAMENTE COMPLEMENTATI

MAURIZIO EMALDI *)

Un gruppo avente il reticolo di tutti i sottogruppi relativamente complementato si dice un *RK*-gruppo [3]. Una caratterizzazione degli *RK*-gruppi d'ordine finito è stata data da G. Zacher [8]. Il problema degli *RK*-gruppi infiniti è stato affrontato da M. Emaldi e G. Zacher [9], da I. N. Abramovskiĭ [2] e da F. Menegazzo [7]. Quest'ultimo Autore assegna una caratterizzazione degli *RK*-gruppi localmente finiti che rettifica le caratterizzazioni ottenute in [9] e in [2]. Recentemente I. N. Abramovskiĭ [3] ha date altre caratterizzazioni degli *RK*-gruppi localmente finiti, ma si può osservare che non sono tutte corrette [1]).

Questa osservazione ha fornito il motivo per la presente nota.

1. La terminologia è quella adottata in [6]. Le notazioni $H<G$ risp. $H \lhd G$ esprimono che H è un sottogruppo risp. un sottogruppo normale del gruppo G, mentre 1 denota il gruppo identico. Se G è un gruppo periodico, allora $\omega(G)$ denota l'insieme di tutti i numeri primi p tali che G possieda elementi di ordine p. Il sottogruppo normale H del gruppo periodico G si dice *di Hall in* G, se $\omega(H)$ e $\omega(G/H)$ sono insiemi disgiunti. Se G è un gruppo periodico e π è un insieme di numeri primi, allora per una π-*base completa di Sylow di* G si intende [6] una famiglia (S_i) di sottogruppi di G con le seguenti proprietà: *a*) S_0 è un π-sottogruppo di Sylow di G e S_i $(i\neq 0)$ è un p_i-sottogruppo di Sylow di

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

1) Si confrontino il Lemma 1 e le affermazioni 2), 4) e 6) del Teorema 1 in [3] e l'esempio al n. 2 in [7].

G per ogni numero primo $p_i \notin \pi$; *b*) $S_iS_j = S_jS_i$ per ogni due membri di (S_i); *c*) $\cup_i S_i = G$.

Il gruppo G si dice un *t-gruppo* se $N \lhd H \lhd G$ implica $N \lhd G$ per tutti i sottogruppi N, H di G; se nel gruppo G ogni sottogruppo è un t-gruppo, allora G si dice un *T-gruppo* [3]. Il sottogruppo C del gruppo G si dice [3] un *complemento relativo per la serie* di sottogruppi $N < M < H$ di G, se $N = M \cap C$ e $M \cup C = H$; nel caso in cui $N = 1$, C si dice un *complemento di M in H*. Un gruppo G in cui per ogni serie di sottogruppi $N < M < H$ esiste un complemento relativo risp. complemento relativo permutabile con M si dice un *RK-gruppo* [3] risp. un *RC-gruppo.*

(1.1) *Siano* $N < M < H$ *una serie di sottogruppi del gruppo* G *e* C *un complemento di* N *in* H. *Se* $NC = CN$, *allora* $M \cap C$ *è un complemento di* N *in* M.

DIMOSTRAZIONE. $N \cup (M \cap C) = M \cap (NC) = M$.

(1.2) *Se il t-gruppo* G *è un* SI^**-gruppo in cui ogni sottogruppo normale ammette un complemento, allora* G *è un T-gruppo localmente finito in cui ogni p-sottogruppo di Sylow è abeliano elementare* (*p numero primo arbitrario*) *e* G' *è abeliano e di Hall.*

DIMOSTRAZIONE. Nelle ipotesi poste ogni immagine omomorfa del gruppo G è un t-gruppo e un SI^*-gruppo in cui ogni sottogruppo normale ammette un complemento. Pertanto per (1.1) G è un gruppo che ammette una serie invariante ascendente a fattori ciclici di ordine primo. Di conseguenza [4] G' è uno ZA-gruppo. Per (1.1) G' è allora abeliano e G è un t-gruppo risolubile periodico. Ma allora [3] G è un T-gruppo localmente finito in cui [5] ogni p-sottogruppo di Sylow è abeliano elementare (p numero primo arbitrario) e G' è di Hall.

(1.3) *Siano* G *un T-gruppo localmente finito,* $H < G$, $N < G'$ *e* $\pi = \omega(G/G')$. *Se in* G *ogni p-sottogruppo di Sylow è abeliano elementare* (*p numero primo arbitrario*) *e ogni* π*-sottogruppo di Sylow può essere incluso in una* π*-base completa di Sylow di* G (π *insieme di numeri primi arbitrario*), *allora ogni* π*-sottogruppo di Sylow di* H *risp. di* G/N *è un complemento in* H *risp. in* G/N *di* $H \cap G'$ *risp. di* G'/N.

DIMOSTRAZIONE. Il gruppo G è risolubile [1] e, per i t-gruppi risolubili periodici l'affermazione è vera [7].

2. (2.1) TEOREMA. *Per il gruppo $G(\neq 1)$ sono fra loro equivalenti le seguenti condizioni*:

a) *G è un RK-gruppo localmente finito,*

b) G è un SI^*-gruppo in cui per ogni serie di sottogruppi $M < H \triangleleft G$ esiste un complemento relativo,

c) *G è un T-gruppo localmente finito, in cui ogni p-sottogruppo di Sylow (p numero primo arbitrario) è abeliano elementare e ogni π-sottogruppo di Sylow (π insieme di numeri primi arbitrario) si può includere in una π-base completa di Sylow di G,*

d) *G è un RC-gruppo.*

DIMOSTRAZIONE. a) implica b). È sufficiente dimostrare che se H è un qualunque sottogruppo finitamente generato di G, allora H è metabeliano. Ora H è un RK-gruppo e, quindi, anche un t-gruppo, poichè se C è un complemento relativo per la serie di sottogruppi $N \triangleleft M \triangleleft H$ di H, allora $M \triangleleft H$ implica $N = M \cap C \triangleleft C$ e, di conseguenza, $N \triangleleft H$. Poichè H è allora un T-gruppo finito, H è metabeliano [1].

b) implica c). Per (1.2) G è un T-gruppo finito, in cui ogni p-sottogruppo di Sylow (p numero primo arbitrario) è abeliano elementare e G' è abeliano e di Hall. Sia S un qualsiasi π-sottogruppo di Sylow di G (π insieme di numeri primi arbitrario). Allora esiste $C < G$ tale che $S = (SG') \cap C$ e $(SG')C = G$. Ma $C \cap G' < S \cap G'$, per cui $S \cap G' = C \cap G'$. Esiste $R \triangleleft G$ tale che $G' = (S \cap G') \times R$. Allora risulta$R \cap C = 1$ e $RC = R(C \cap G')C = G'C = G$.

c) implica d). Per (1.3) non è restrittivo limitarsi a dimostrare che ogni serie di sottogruppi $M < H < G$ del gruppo G, dove $M \cap G' = 1$, ammette un complemento relativo permutable con H. Poniamo $\pi = \omega(G/G')$ e $A = H \cap G'$. Si ha $A \triangleleft G$. Siano S un π-sottogruppo di Sylow di H che contiene M, T un π-sottogruppo di Sylow di G che contiene S. Per (1.3) risulta $H = AS$, $G = G'T$. Esistono poi $N < S$, $R < T$ e $B \triangleleft G$ tali che $S = M \times N$, $T = S \times R = M \times N \times R$ e $G' = A \times B$. Allora $B(M \times R)$ è un complemento relativo per la serie di sottogruppi $M < H < G$ che risulta permutabile con H.

d) implica a). È evidente.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABRAMOVSKII, I. N.: *Local'no obobščenno gamil'tonovy gruppy.*, Sib. matem. Ž., VII, 3 (1966), 481-485.

[2] ABRAMOVSKII, I. N.: *O gruppah, u kotoryh structura podgrupp est' structura s otnosite'nymi dopolneniyami,* Algebra i Logika Seminar, VI, 1 (1967), 5-8.

[3] ABRAMOVSKII, I. N.: *Otnositel'nye dopolneniya v gruppah,* Sib. matem. Ž., XI, 1 (1970), 3-11.

[4] BAER, R.: *Supersoluble groups,* Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 16-32.

[5] EMALDI, M.: *Una nota sui gruppi risolubili complementati,* Boll. U.M.I., 5 (1970), 858-862.

[6] KUROSH, A. G.: *The theory of groups,* Chelsea, New York 1960.

[7] MENEGAZZO, F.: *Sui gruppi relativamente complementati,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XLIII (1970), 209-214.

[8] ZACHER, G.: *Determinazione dei gruppi d'ordine finito relativamente complementati,* Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, (4) 19 (1952), 200-206.

[9] EMALDI, M., ZACHER, G.: *I gruppi risolubili relativamente complementati,* Ricerche di matematica, XIV (1965), 1-8.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 gennaio 1971.