RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROLAND SCHMIDT

Zentralisatorverbände endlicher Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 97-131

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__97_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ZENTRALISATORVERBÄNDE ENDLICHER GRUPPEN

ROLAND SCHMIDT *)

Sei G eine (nicht notwendig endliche) Gruppe und sei $\mathfrak{C}(G)$ die Menge aller Zentralisatoren von Untergruppen von G. Mit der Inklusion als Relation wird $\mathfrak{C}(G)$ ein vollständiger Verband, den wir den « Zentralisatorverband » von G nennen.

Wir wollen uns in dieser Arbeit mit Gruppen beschäftigen, deren Zentralisatorverband distributiv oder modular ist. Wir werden zeigen, daß eine Gruppe G mit Minimalbedingung für Zentralisatoren genau dann distributiven Zentralisatorverband hat, wenn G abelsch, also $\mathfrak{C}(G)$ trivial ist (Satz 3.2). Die Gruppen mit modularem Zentralisatorverband sind nicht so leicht zu übersehen, weswegen wir uns hier auf endliche Gruppen mit modularem Zentralisatorverband der Dimension 2 (kurz: $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppen) beschränken werden. Wir werden zeigen (Satz 5.9 und 5.12), daß eine endliche Gruppe G genau dann eine $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppe ist, wenn G eine der folgenden Eigenschaften hat (Bezeichnungen s. §1):

1) $G/Z(G) \simeq PSL(2, p^n)$ oder $PGL(2, p^n)$ und $G' \simeq SL(2, p^n)$, p eine Primzahl, $p^n > 3$;

2) $G/Z(G) \simeq PSL(2, 9)$ oder $PGL(2, 9)$ und G' ist isomorph zur Darstellungsgruppe (im Sinne von Schur [11]) der $PSL(2, 9)$;

3) G enthält einen abelschen Normalteiler vom Index p, p eine Primzahl, und ist selbst nicht abelsch;

4) $G/Z(G)$ ist eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern $F/Z(G)$, für die F und K abelsch sind, wenn $K/Z(G)$ ein Komplement zu $F/Z(G)$ ist;

---

*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität, 23 Kiel, Germania occidentale.

5) $G/Z(G)$ ist eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern $F/Z(G)$, es ist K abelsch, wenn $K/Z(G)$ ein Komplement zu $F/Z(G)$ ist, sowie $Z(F)=Z(G)$, $F/Z(G)$ eine p-Gruppe, p eine Primzahl, und F eine $\mathfrak{M}$-Gruppe;

6) $G/Z(G)\simeq S(4)$ und V ist nicht abelsch, wenn $V/Z(G)$ die Kleinsche Vierergruppe in $G/Z(G)$ ist; oder

7) $G=A\times P$, A abelsch, P eine p-Gruppe (p Primzahl) und eine $\mathfrak{M}$-Gruppe.

Ist G eine endliche p-Gruppe mit modularem Zentralisatorverband der Dimension 2, so ist G metabelsch. Ist $p=2$ und $c(G)>2$, so existiert ein abelscher Normalteiler N vom Index 2 in G. Ist $p\neq 2$ und $c(G)>$ $>p+1$, so existiert ein abelscher Normalteiler N von G mit elementarabelscher Faktorgruppe der Ordnung $|G:N|<p^{p-1}$ (Satz 5.15).

Bei unseren Beweisen wird hauptsächlich die Eigenschaft einer $\mathfrak{M}$-Gruppe G benutzt, daß der Durchschnitt je zweier maximaler Zentralisatoren (s. Definition 2.8) das Zentrum von G ist. Wir betrachten deshalb auch die endlichen Gruppen mit dieser Eigenschaft ($\mathfrak{D}$-Gruppen) und beweisen für sie einen ähnlichen Satz wie den oben zitierten (Satz 5.9 und 5.12). Insbesondere zeigen wir, daß sich genau dann je zwei maximale Zentralisatoren einer endlichen Gruppe G trivial schneiden (also G eine $\mathfrak{D}$-Gruppe mit $Z(G)=1$ ist), wenn G eine Frobeniusgruppe, eine Suzukigruppe $Sz(2^n)$ oder eine spezielle lineare Gruppe $SL(2, 2^n)$ ist (Satz 5.13). Dieses Ergebnis ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Ito ([8], Thm. 3), der die nicht einfachen $\mathfrak{M}$-Gruppen mit $Z(G)=1$ bestimmt hatte.

Die Anzahl der maximalen Zentralisatoren in einer $\mathfrak{M}$- oder $\mathfrak{D}$-Gruppe scheint von Bedeutung zu sein. So folgt aus unserer Charakterisierung der $\mathfrak{M}$-Gruppen leicht, daß eine $\mathfrak{M}$-Gruppe mit k maximalen Zentralisatoren auflösbar ist, wenn k gerade ist (Korollar 5.11). Außerdem zeigen wir, daß eine p-Gruppe, die eine $\mathfrak{D}$-Gruppe mit k maximalen Zentralisatoren ist, für $k\leq p^n$ höchstens die Klasse n hat (Satz 5.14).

Zum Schluß der Arbeit zeigen wir noch, daß für jede Primzahl p eine Diedergruppe der Ordnung $4(p^{2n}+p^n)$ denselben Zentralisatorverband hat wie $SL(2, p^n)$, daß somit eine metazyklische und eine (nichtabelsche) einfache ($p=2$) Gruppe isomorphe Zentralisatorverbände haben können. Die Struktur einer Gruppe wird also von ihrem Zentralisatorverband in recht geringem Maße bestimmt.

1. Bezeichnungen.

Sei G eine Gruppe, $\mathfrak{X}$ eine Menge von Untergruppen von G, U eine Untergruppe von G ($U \leq G$), K eine Menge von Elementen, x und y Elemente von G ($x, y \in G$) und n eine natürliche Zahl. Dann bezeichnen wir mit

$\lvert G \rvert$	die Ordnung von G,
$\operatorname{Exp} G$	den Exponenten von G,
G'	die Kommutatorgruppe von G,
$Z(G)$	das Zentrum von G,
$Z_n(G)$	das n-te Glied der aufsteigenden Zentralreihe von G,
$\Phi(G)$	die Frattiniuntergruppe von G (= Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von G),
G^*	die Darstellungsgruppe (im Sinne von Schur; s. [7], Def. 23.4, S. 630) von G, falls G nur eine besitzt,
$\mathfrak{V}(G)$	den Untergruppenverband von G,
$\mathfrak{C}(G)$	den Zentralisatorverband von G,
$\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} X$	die minimale alle $X \in \mathfrak{X}$ enthaltende Untergruppe von G,
$\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X$	den mengentheoretischen Durchschnitt der $X \in \mathfrak{X}$,
$G \backslash U$	die Menge der Elemente von G, die nicht in U liegen,
$C_G(U) = C(U)$	den Zentralisator von U in G,
$N_G(U)$	den Normalisator von U in G,
$\langle K \rangle$	die kleinste Untergruppe von G, die alle Elemente aus K enthält,
$o(x)$	die Ordnung von x.

Ferner sei $(x, y)=x^{-1}y^{-1}xy$ und $(x_1, \ldots, x_n)=((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$ für $n>2$ und $x_1, \ldots, x_n \in G$. Sind $U, V \in \mathfrak{C}(G)$ mit $U \leq V$, so sei $[V/U]$ der Verband aller $X \in \mathfrak{C}(G)$ mit $U \leq X \leq V$.

Ist p eine Primzahl, so bezeichnen wir mit $GL(2, p^n)$, $PGL(2, p^n)$, $SL(2, p^n)$ und $PSL(2, p^n)$ resp. die volle, projektive, spezielle bzw. projektive spezielle lineare Gruppe der Dimension 2 über dem Körper mit p^n Elementen. $S(n)$ sei die symmetrische Gruppe auf n Elementen und $Sz(2^n)$, $n \geq 3$, die von Suzuki in [13] beschriebene einfache Gruppe der Ordnung $(2^{2n}+1)2^{2n}(2^n-1)$.

2. Einfache Eigenschaften des Zentralisatorverbandes.

Sei G eine (nicht notwendig endliche) Gruppe. Wir wollen in diesem Abschnitt den Zentralisatorverband $\mathfrak{C}(G)$ definieren und die grundlegenden Eigenschaften von $\mathfrak{C}(G)$ herleiten, die wir später dauernd benutzen werden. Bekanntlich gilt:

(2.1). *Sei $\mathfrak{X}$ eine Menge von Untergruppen von G und seien $U, V \leq G$.*

a) $\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} C(X) = C(\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} X)$,

b) $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} C(X) \leq C(\bigcap_{X \in \mathfrak{X}} X)$,

c) $U \leq V \Rightarrow C(V) \leq C(U)$,

d) $U \leq C(C(U))$.

Der Untergruppenverband $\mathfrak{V}(G)$ von G ist ein vollständiger Verband. Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.2. Sei

$$\mathfrak{C}(G)=\{C(X) \mid X \in \mathfrak{V}(G)\}.$$

Für $U, V \in \mathfrak{C}(G)$ sei $U \wedge V = U \cap V$ *und*

$$U \vee V = \bigcap \{X \mid X \in \mathfrak{C}(G),\ U \leq X,\ V \leq X\}.$$

Wegen (2.1 a) ist $\mathfrak{C}(G)$ mit den Operationen $\wedge$ und $\vee$ ein vollständiger Verband, sogar ein vollständiger $\cap$-Teilbund von $\mathfrak{V}(G)$ (s. [5], Satz 6.3, S. 30). Das Nullelement von $\mathfrak{C}(G)$ ist das Zentrum $Z(G)$ von G, das Einselement ist G.

Die folgende wichtige Eigenschaft von $\mathfrak{C}(G)$ ist wohlbekannt (s. etwa [15], S. 286).

(2.3). *Die Abbildung*

$$C : \mathfrak{C}(G) \ni X \to C(X) \in \mathfrak{C}(G)$$

ist ein involutorischer Antiautomorphismus von $\mathfrak{C}(G)$, *d.h. eine eineindeutige Abbildung von* $\mathfrak{C}(G)$ *auf sich mit*

(2.3 a). $U \leq V \Leftrightarrow C(V) \leq C(U)$ *und*

(2.3 b). $C(C(U)) = U$ *für alle* U, $V \in \mathfrak{C}(G)$.

Insbesondere gilt für alle U, $V \in \mathfrak{C}(G)$

(2.3 c). $C(U \vee V) = C(U) \wedge C(V)$ *und*

(2.3 d). $C(U \wedge V) = C(U) \vee C(V)$.

Wir zeigen nun, daß — anders als beim Untergruppenverband — der Zentralisatorverband des direkten Produktes zweier beliebiger Gruppen das direkte Produkt der Zentralisatorverbände der beiden Faktoren ist.

SATZ 2.4. *Ist* $G = H \times K$, H *und* K *Gruppen, dann ist*

$$\mathfrak{C}(G) \simeq \mathfrak{C}(H) \times \mathfrak{C}(K).$$

BEWEIS. Zu $U \in \mathfrak{V}(G)$ sei $U_1 = \{x \in H \mid xy \in U \text{ für ein } y \in K\}$ und $U_2 = \{y \in K \mid xy \in U \text{ für ein } x \in H\}$. Dann ist offenbar

$$C_G(U) = C_H(U_1) \times C_K(U_2).$$

Die Abbildung

$$\pi : \mathfrak{C}(H) \times \mathfrak{C}(K) \ni (C_H(X),\ C_K(Y)) \to C_H(X) \times C_K(Y) = C_G(X \times Y) \in \mathfrak{C}(G)$$

ist daher eine (sicherlich eineindeutige) Abbildung von $\mathfrak{C}(H) \times \mathfrak{C}(K)$ auf $\mathfrak{C}(G)$. Daß sie ordnungserhaltend ist, ist klar. Damit ist π ein Isomorphismus.

BEMERKUNG. Ist G das (nicht direkte) Produkt zweier sich zentralisierender Untergruppen H und K, so braucht $\mathfrak{C}(G)$ nicht isomorph zu $\mathfrak{C}(H) \times \mathfrak{C}(K)$ zu sein. Dies zeigt das folgende

BEISPIEL. Sei $Q=\langle a, b \mid a^4=1, b^2=a^2, bab^{-1}=a^{-1}\rangle$ die Quaternionengruppe der Ordnung 8, sei $G_1=H_1 \times K_1$ mit $H_1 \simeq K_1 \simeq Q$ und sei $G=G_1/D$, wobei $D=\langle (a^2, a^2)\rangle$ ist, also G direktes Produkt mit vereinigten Zentren (s. [7], S. 49) von zwei Quaternionengruppen $H=H_1D/D$ und $K=K_1D/D$. Ist M eine maximale Untergruppe von H oder K, so ist $C_G(M)=MK$ bzw. MH, und diese Zentralisatoren sind maximale Untergruppen von G. Damit hat $\mathfrak{C}(G)$ bereits 6 Antiatome. Ist T die Diagonale von G_1, also $T=\{(x, x) \mid x \in Q\}$, so ist T/D abelsch, also in einer maximalen abelschen Untergruppe und somit schließlich in einem Antiatom von $\mathfrak{C}(G)$ enthalten. Da $TH=TK=G$ ist, ist T in keinem der oben bereits gefundenen Antiatome von $\mathfrak{C}(G)$ enthalten; es gibt also mindestens 7 Antiatome in $\mathfrak{C}(G)$. Da $\mathfrak{C}(Q)$ genau 3 Antiatome hat, hat $\mathfrak{C}(H) \times \mathfrak{C}(K)$ nur 6; es ist also $\mathfrak{C}(G) \not\simeq \mathfrak{C}(H) \times \mathfrak{C}(K)$.

Es gilt aber wenigstens das folgende

LEMMA 2.5. *Ist $G=HZ$ mit $Z \leq Z(G)$, so ist $\mathfrak{C}(G) \simeq \mathfrak{C}(H)$.*

BEWEIS. Sei $U \leq G$. Dann ist $C_G(U)=C_G(UZ)$. Nach dem Dedekindschen Lemma ([7], S. 8) folgt

$$C_G(UZ)=C_G((UZ \cap H)Z)=(C_G((UZ \cap H)Z) \cap H)Z=$$

$$C_H((UZ \cap H)Z)Z=C_H(UZ \cap H)Z,$$

also

$$(*) \quad C_G(U)=C_H(UZ \cap H)Z.$$

Ist nun $X \in \mathfrak{C}(H)$, so ist nach (2.3 b) $X=C_H(C_H(X))$ und wegen $C_H(X) \geq$ $\geq H \cap Z$ und $(*)$ folgt

$$C_G(C_H(X))=C_H(C_H(X)Z \cap H)Z=C_H(C_H(X))Z=XZ,$$

also $XZ \in \mathfrak{C}(G)$. Die Abbildung

$$\pi : \mathfrak{C}(H) \ni X \to XZ \in \mathfrak{C}(G)$$

ist also wegen (*) eine Abbildung von $\mathfrak{C}(H)$ auf $\mathfrak{C}(G)$. Wegen $X = XZ \cap H$ ist π eineindeutig und ordnungserhaltend. Damit ist Lemma 2.5 bewiesen.

Über den Zentralisatorverband einer Untergruppe U von G weiß man im allgemeinen nichts, wenn man $\mathfrak{C}(G)$ kennt, außer natürlich, daß man alle $X \in \mathfrak{C}(U)$ als Durchschnitte von U mit Elementen von $\mathfrak{C}(G)$ erhält. Ist U aber selbst ein Zentralisator, so kann man mehr sagen.

LEMMA 2.6. *Ist $U \in \mathfrak{C}(G)$ und $V \in \mathfrak{C}(U)$, so ist $V \in \mathfrak{C}(G)$.*

BEWEIS. Da $V \in \mathfrak{C}(U)$ ist, existiert ein $X \leq U$ mit

$$V = C_U(X) = C_G(X) \cap U.$$

Da der Durchschnitt zweier Zentralisatoren wieder ein Zentralisator ist, liegt also V in $\mathfrak{C}(G)$.

LEMMA 2.7. *Sei $U \in \mathfrak{C}(G)$. Dann ist*

$$\mathfrak{C}(U \vee C(U)) \simeq [U \vee C(U)/U \wedge C(U)].$$

BEWEIS. Sei zur Abkürzung $H = U \vee C(U)$, $K = U \wedge C(U)$. Nach (2.3) ist

$$C(H) = C(U \vee C(U)) = C(U) \wedge C(C(U)) = C(U) \wedge U = K$$

und damit $C(K) = C(C(H)) = H$. Da $K \leq H$ ist, ist also $K = Z(H)$.

Ist nun $X \in \mathfrak{C}(H)$, dann ist $X \geq Z(H) = K$ und nach Lemma 2.6 $X \in \mathfrak{C}(G)$, also $X \in [H/K]$.

Ist umgekehrt $X \in [H/K]$, so folgt $K \leq X \leq H$, also nach (2.3) $K = C(H) \leq C(X) \leq C(K) = H$, also $C(X) \leq H$. Da $X = C(C(X)) = C_H(C(X))$ ist, ist also $X \in \mathfrak{C}(H)$.

$\mathfrak{C}(H)$ besteht also genau aus den $X \in \mathfrak{C}(G)$ mit $K \leq X \leq H$, was zu zeigen war.

DEFINITION 2.8. Ein *minimaler* (*maximaler*) *Zentralisator* von G ist ein Atom (Antiatom) des Verbandes $\mathfrak{C}(G)$.

LEMMA 2.9. *Jeder minimale Zentralisator von G ist abelsch.*

BEWEIS. Sei N ein minimaler Zentralisator von G und sei $x \in N$. Ist $x \in Z(G)$, so ist natürlich erst recht $x \in Z(N)$. Ist $x \notin Z(G)$, so ist aber $x \in C_G(\langle x \rangle) = C$, also auch $x \in C \wedge N$. Da N ein minimaler Zentralisator ist, ist $C \wedge N = Z(G)$ oder $C \wedge N = N$. Da $x \in C \wedge N$, aber $x \notin Z(G)$ gilt, ist $C \wedge N = N$, d.h. $N \leq C$, also $x \in Z(N)$. Damit liegt jedes Element von N im Zentrum von N; N ist also abelsch.

FOLGERUNG 2.10. *Sei M ein maximaler Zentralisator von G. Dann ist $C(M) \leq M$ und $\mathfrak{C}(M) \simeq' [M/C(M)]$.*

BEWEIS. Nach (2.3) ist $C(M)$ ein minimaler Zentralisator. Nach Lemma 2.9 ist $C(M)$ abelsch, also $C(M) \leq C(C(M)) = M$. Nach Lemma 2.7 folgt $\mathfrak{C}(M) \simeq' [M/C(M)]$.

Jede maximale abelsche Untergruppe A einer Gruppe G liegt in $\mathfrak{C}(G)$, da ja $A = C(A)$ ist. Es gilt aber sogar

LEMMA 2.11. (GASCHÜTZ) *Jeder abelsche Zentralisator von G ist Durchschnitt von maximalen abelschen Untergruppen von G.*

BEWEIS. Sei U ein abelscher Zentralisator von G. Sei V der Durchschnitt der maximalen abelschen Untergruppen von G, in denen U enthalten ist; dann ist $V \in \mathfrak{C}(G)$. Wir zeigen: $C(U) = C(V)$. Da $U \leq V$ ist, ist sicherlich $C(V) \leq C(U)$. Ist $a \in C(U)$, so ist $\langle U, a \rangle$ abelsch, also (nach dem Zornschen Lemma) in einer maximalen abelschen Untergruppe A enthalten. Da $U \leq A$ ist, folgt $V \leq A$, also $\langle V, a \rangle \leq A$. Damit ist $a \in C(V)$. Es ist also auch $C(U) \leq C(V)$ und damit $C(U) = C(V)$. Da $U, V \in \mathfrak{C}(G)$ sind, folgt also nach (2.3) $U = C(C(U)) = C(C(V)) = V$, was zu zeigen war.

3. Gruppen mit distributivem Zentralisatorverband.

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur Gruppen mit Minimalbedingung für Zentralisatoren — oder Maximalbedingung, was wegen (2.3) dasselbe ist. Wir wollen zeigen, daß eine solche Gruppe G nur dann distributiven Zentralisatorverband hat, wenn sie abelsch, also $\mathfrak{C}(G)$ trivial ist.

HILFSSATZ 3.1. *Ist G eine nichtabelsche Gruppe mit Minimalbedingung für Zentralisatoren, so enthält G mindestens 3 verschiedene maximale Zentralisatoren.*

BEWEIS. Sei $x \in G \backslash Z(G)$. Dann ist $x \in C_G(\langle x \rangle) \neq G$. Da $\mathfrak{C}(G)$ die Maximalbedingung erfüllt, existiert daher ein maximaler Zentralisator M von G mit $C_G(x) \leq M$, also $x \in M$. Ist $x \in Z(G)$, so existieren erst recht maximale Zentralisatoren von G, die x enthalten. Jedes Element von G liegt also in einem maximalen Zentralisator von G; da nicht alle Elemente einer Gruppe in einer oder zwei echten Untergruppen enthalten sein können, gibt es also mindestens 3 maximale Zentralisatoren in G.

SATZ 3.2. *Ist G eine Gruppe mit Minimalbedingung für Zentralisatoren, so ist $\mathfrak{C}(G)$ genau dann distributiv, wenn G abelsch ist.*

BEWEIS. Ist G abelsch, so ist $\mathfrak{C}(G)$ trivial, also sicherlich distributiv. Sei also umgekehrt $\mathfrak{C}(G)$ distributiv und G nicht abelsch. Da $\mathfrak{C}(G)$ die Minimalbedingung erfüllt, existiert ein $H \in \mathfrak{C}(G)$ minimal bezüglich der Eigenschaft, daß $\mathfrak{C}(H)$ die Minimalbedingung für Zentralisatoren erfüllt, distributiv ist und daß H nicht abelsch ist. Nach Hilfssatz 3.1 existieren mindestens 3 maximale Zentralisatoren M_1, M_2 und M_3 in H. Ist M eines der M_i, so ist nach Folgerung 2.10 $\mathfrak{C}(M) \simeq$ $\simeq [M/C_H(M)]$ (wobei das Intervall in $\mathfrak{C}(H)$ zu nehmen ist), also $\mathfrak{C}(M)$ isomorph zu einem Intervall eines distributiven Verbandes und damit selbst distributiv. Nach Lemma 2.6 ist $M \in \mathfrak{C}(G)$ und erfüllt außerdem die Minimalbedingung für Zentralisatoren. Wegen der Wahl von H ist M abelsch, also $M = C_H(M)$ auch ein minimaler Zentralisator von H. Es folgt

$$M_i \vee M_j = H, \quad M_i \wedge M_j = Z(H) \quad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

und damit wegen der Distributivität von $\mathfrak{C}(H)$:

$$M_1 = M_1 \vee (M_2 \wedge M_3) = (M_1 \vee M_2) \wedge (M_1 \vee M_3) = H,$$

ein Widerspruch. Damit ist der Satz bewiesen.

4. Partitionen endlicher Gruppen.

Wir wollen neben den distributiven Zentralisatorverbänden noch eine gewisse Klasse von modularen Zentralisatorverbänden behandeln, nämlich die der Dimension 2. Wie wir sehen werden, ist $G/Z(G)$ eine Gruppe mit einer normalen, nichttrivialen Partition, wenn $\mathfrak{C}(G)$ modular der Dimension 2 ist. Wir beschäftigen uns deshalb in diesem Abschnitt mit Gruppen, die eine nichttriviale Partition besitzen. Alle betrachteten Gruppen seien von jetzt ab endlich.

Die nicht auflösbaren Gruppen mit Partition sind von SUZUKI [14], die auflösbaren, nicht primären von BAER (s. [2], Satz 5.1, S. 353 und [3], Satz A, S. 82) behandelt worden. Wir stellen hier ihre Resultate kurz zusammen.

(4.1). (BAER) *Besitzt die auflösbare, nicht primäre (endliche) Gruppe G eine normale, nichttriviale Partition σ, so hat G eine der folgenden Eigenschaften:*

a) Eine Komponente von σ ist normalisatorgleich, und G ist eine Frobeniusgruppe.

b) $G \simeq S(4)$, und σ besteht aus den maximalen zyklischen Untergruppen von G.

c) G besitzt einen nilpotenten Normalteiler N, der eine Komponente von σ ist, mit $|G:N|=p$, p eine Primzahl, und jedes nicht in N enthaltene Element von G hat Ordnung p.

(4.2). (SUZUKI) *Ist G eine nicht auflösbare Gruppe mit einer normalen, nichttrivialen Partition σ, so ist $G \simeq PGL(2, p^n)$, $PSL(2, p^n)$, p eine Primzahl, $p^n > 3$, oder $Sz(2^n)$, $n \geq 3$ oder eine Komponente von σ ist normalisatorgleich, und G ist eine Frobeniusgruppe.*

Über p-Gruppen mit Partition kann man verhältnismäßig wenig sagen; z.B. besitzt jede Gruppe G vom Exponenten p eine Partition (bestehend aus den minimalen Untergruppen von G). Wir wollen uns im Hinblick auf die Anwendungen im nächsten Abschnitt näher mit solchen Partitionen σ von p-Gruppen G beschäftigen, bei denen es einen G' enthaltenden σ-zulässigen, echten Normalteiler N von G gibt. (Dabei heißt eine Untergruppe U von G σ-zulässig, wenn sie jede nicht in U

enthaltene Komponente von σ in 1 schneidet.) Wir bezeichnen mit $|\sigma|$ die Anzahl der Komponenten von σ und beweisen zunächst das folgende, wohl bekannte

Lemma 4.3. *Ist σ eine (beliebige) Partition der p-Gruppe G, so ist $|\sigma| \equiv 1(p)$.*

Beweis. Jede Untergruppe der Ordnung p von G liegt in genau einer Komponente von σ. Ist U eine Komponente von σ, so ist die Anzahl der Untergruppen der Ordnung p in U kongruent 1 modulo p (s. [7], Satz 8.8, S. 314). Ist also k die Gesamtzahl der Untergruppen der Ordnung p von G, so ist $k \equiv |\sigma|\,(p)$. Andererseits ist $k \equiv 1(p)$, also $|\sigma| \equiv 1(p)$.

Wir zeigen nun, daß bei den uns interessierenden Partitionen die Klasse $c(G)$ von G durch eine Funktion von $|\sigma|$ beschränkt wird.

Satz 4.4. *Sei σ eine Partition der p-Gruppe G, zu der es einen σ-zulässigen Normalteiler $N \neq 1$ von G gibt mit $G' \leq N < G$. Ist dann $|\sigma| \leq p^n$, so ist $c(G) \leq n-1$.*

Beweis. Der Fall $n=1$ kann nicht auftreten: hier wäre nämlich $|\sigma| \leq p$, andererseits nach Lemma 4.3 $|\sigma| \equiv 1(p)$, also $|\sigma|=1$, d.h. σ trivial. Da G eine σ-zulässige Untergruppe N mit $1 \neq N \neq G$ besitzt, ist das unmöglich.

Sei also $n \geq 2$. Da $N \neq G$ ist, existiert eine Untergruppe M von G mit $|M:N|=p$. Da N ein σ-zulässiger Normalteiler ist, hat nach Lemma 3.1 aus [2] jedes nicht in N enthaltene Element von G die Ordnung p. In M gibt es also $|M|-|N|=|N|(p-1)$ Elemente der Ordnung p außerhalb N, die somit in $|N|$ verschiedenen Untergruppen der Ordnung p liegen. Jede solche Untergruppe von M ist in einer Komponente von σ enthalten. Lägen zwei solche Untergruppen, L_1 und L_2, in derselben Komponente K von σ, so wäre $1 \neq N \cap (L_1 \cup L_2) \leq N \cap K$, also $K \leq N$, da N σ-zulässig ist. Da $L \nleq N$ ist, ist das unmöglich. — Es gibt also mindestens $|N|$ verschiedene Komponenten von σ, die nicht in N enthalten sind. Da $N \neq 1$ ist, gibt es sicherlich auch eine in N enthaltene Komponente von σ. Es folgt

$$|N|+1 \leq |\sigma| \leq p^n,$$

also $|N| \leq p^n - 1$. Da $|N|$ eine p-Potenz ist, folgt

(4.4.1) $|N| \leq p^{n-1}$.

Wir wollen zeigen, daß $|G'| \leq p^{n-2}$ ist, und nehmen dazu an, es wäre $|G'| \geq p^{n-1}$. Da $G' \leq N$ und $|N| \leq p^{n-1}$ ist, folgt dann

(4.4.2) $G' = N$ und $|N| = p^{n-1}$.

Da jedes nicht in N enthaltene Element von G die Ordnung p hat, ist G/N elementarabelsch, also $\Phi(G) \leq N$. Wegen (4.4.2) folgt

(4.4.3) $N = \Phi(G)$.

Sei $|G : N| = p^r$. Dann gibt es $|G| - |N| = p^{n-1}(p^r - 1)$ nicht in N gelegene Elemente von G, die sich auf die $k \leq |\sigma| - 1 \leq p^n - 1$ nicht in N enthaltenen Komponenten von σ verteilen. Ist p^s die maximale Ordnung dieser Komponenten, dann enthalten diese k Untergruppen offenbar höchstens $k(p^s - 1) \leq (p^n - 1)(p^s - 1)$ von 1 verschiedene Elemente. Also

(4.4.4) $p^{n-1}(p^r - 1) \leq (p^n - 1)(p^s - 1)$.

Aus (4.4.4) folgt offenbar $r \leq s$. — Ist aber nun U eine nicht in N enthaltene Komponente von σ mit $|U| = p^s$, so ist $|G : N| = p^r \leq p^s = |U|$, also $G = NU$. Wegen (4.4.3) folgt $G = U$, was sicherlich unmöglich ist. — Der Widerspruch zeigt, daß die Annahme $|G'| \geq p^{n-1}$ falsch ist. Es ist also $|G'| \leq p^{n-2}$, d.h. $c(G) \leq n-1$, was zu zeigen war.

Bermerkung. Daß die Abschätzung für $c(G)$ in Satz 4.4 bestmöglich ist, zeigt das folgende

Beispiel 4.5. Sei G eine Diedergruppe der Ordnung 2^{n+1}, $n \geq 2$, und sei σ die Partition von G, die aus der zyklischen Untergruppe N vom Index 2 in G und den nicht in N enthaltenen Untergruppen der Ordnung 2 von G besteht. Da jedes nicht in N enthaltene Element von G die Ordnung 2 hat, ist σ wirklich eine Partition von G; ferner ist $1 \neq G' \leq N < G$ und N als Komponente von σ natürlich σ-zulässig. Damit ist σ eine Partition der von uns betrachteten Art, für die offenbar $|\sigma| = 2^n + 1$ und $c(G) = n$ gilt.

5. $\mathfrak{D}$- und $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppen.

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit (endlichen) Gruppen beschäftigen, deren Zentralisatorverband modular der Dimension 2 ist. Wir betrachten gleich eine etwas größere Klasse von Gruppen, da unsere Methoden hier ebenfalls Ergebnisse liefern.

DEFINITION 5.1. Die Gruppe G ist eine *$\mathfrak{D}$-Gruppe* (kurz: $G \in \mathfrak{D}$), wenn G nicht abelsch ist und der Durchschnitt je zweier verschiedener maximaler Zentralisatoren von G das Zentrum von G ist.

Die Gruppe G ist eine *$\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppe* (kurz: $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{C}$), wenn $\mathfrak{C}(G)$ modular der Dimension 2 ist, d.h. wenn jeder maximale Zentralisator zugleich minimaler Zentralisator von G ist.

BEMERKUNG. G ist genau dann eine $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppe, wenn G nicht abelsch und jeder maximale Zentralisator von G abelsch ist. Ist nämlich ein maximaler Zentralisator M zugleich ein minimaler Zentralisator, so ist er nach Lemma 2.9 abelsch; ist umgekehrt M abelsch, so folgt $M \leq C(M)$ und, da $C(M)$ ein minimaler Zentralisator ist, $M = C(M)$.

Jede $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppe ist offenbar eine $\mathfrak{D}$-Gruppe. Die $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppen sind deshalb interessant, weil jede nichtabelsche Gruppe G Untergruppen besitzt, die $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppen sind. Ist nämlich K ein maximaler Durchschnitt von maximalen abelschen Untergruppen von G, so ist $H = C_G(K)$ eine $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppe: ist M ein maximaler Zentralisator von H, so ist $C_H(M)$ nach Lemma 2.6 und 2.9 ein abelscher Zentralisator von G und damit nach Lemma 2.11 ein Durchschnitt von maximalen abelschen Untergruppen von G. Wegen der Maximalität von $K = Z(H)$ ist also $C_H(M)$ eine maximale abelsche Untergruppe von G und damit $M = C_H(M)$ abelsch.

Wie wir sehen werden ist die Anzahl der maximalen Zentralisatoren einer $\mathfrak{D}$- oder $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppe von Bedeutung. Wir geben deshalb die folgende

Definition 5.2. Die Gruppe G ist eine $\mathfrak{D}(k)$*-Gruppe* ($G \in \mathfrak{D}(k)$), wenn G eine $\mathfrak{D}$-Gruppe ist, die genau k maximale Zentralisatoren enthält; G ist eine $\mathfrak{M}(k)$*-Gruppe* ($G \in \mathfrak{M}(k)$), wenn G eine $\mathfrak{M}$-Gruppe ist, die genau k maximale Zentralisatoren enthält.

Wir bringen nun einige Beispiele für $\mathfrak{M}$- und $\mathfrak{D}$-Gruppen.

Lemma 5.3. *Sei G eine Gruppe.*

a) Ist $G/Z(G) \simeq PSL(2, p^n)$ *oder* $PGL(2, p^n)$ *und* $G' \simeq SL(2, p^n)$, *p eine Primzahl,* $p^n > 3$, *so ist* $G \in \mathfrak{M}(p^{2n}+p^n+1)$.

b) Ist $G/Z(G) \simeq PSL(2, 9)$ *oder* $PGL(2, 9)$ *und* $G' \simeq PSL(2, 9)^*$ (= *Darstellungsgruppe der* $PSL(2, 9)$), *so ist* $G \in \mathfrak{M}(121)$.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß jeder maximale Zentralisator M von G abelsch ist. Ist x ein Element von Primzahlpotenzordnung in $C_G(M)$, so ist $C_G(x) \geq M$; wäre $C_G(x) \neq M$ für alle solchen x, so wäre $C_G(M) \leq Z(G)$, was nicht der Fall ist. Jeder maximale Zentralisator einer Gruppe G ist somit von der Form $C_G(x)$ mit x von Primzahlpotenzordnung. Diese Bemerkung werden wir in Zukunft dauernd benutzen.

a) Sei nun $Z(G)=Z$ und $G/Z \simeq PSL(2, p^n)$ oder $PGL(2, p^n)$ und $G' \simeq SL(2, p^n)$. Für jede Teilmenge K von G sei $\bar{K}$ das Bild von K unter dem natürlichen Epimorphismus von G auf $\bar{G}=G/Z$.

Die Gruppen $PGL(2, p^n)$ bzw. $PSL(2, p^n)$ besitzen eine Partition bestehend aus den p^n+1 p-Sylowgruppen, $\frac{1}{2}(p^n+1)p^n$ zyklischen Untergruppen der Ordnung p^n-1 bzw. $(p^n-1)(p^n-1, 2)^{-1}$ und $\frac{1}{2}(p^n-1)p^n$ zyklischen Untergruppen der Ordnung p^n+1 bzw. $(p^n+1)(p^n-1, 2)^{-1}$ (s. [14], S. 241 oder [7], S. 185-187 und S. 193). Wir bezeichnen mit σ die hier beschriebene Partition von G/Z und wollen zeigen, daß die vollständigen Urbilder der Komponenten von σ bzgl. des natürlichen Homomorphismus von G auf G/Z genau die maximalen Zentralisatoren von G sind. Wir zeigen zunächst

(5.3.1) Ist $Z \leq U \leq G$ und U/Z eine Komponente von σ, so ist U abelsch.

Ist nämlich U/Z zyklisch, so ist U als zyklische Erweiterung eines zentralen Normalteilers sicherlich abelsch; ist U/Z eine p-Sylowgruppe von G/Z, so ist U wegen $|G:G'Z|=2$ (bzw. 1, falls $p=2$) in $G'Z$ enthalten und daher $U=PZ$, wobei P eine p-Sylowgruppe von G' ist. Da $G' \simeq SL(2, p^n)$ ist, ist P abelsch (s. [7], Satz 8.10, S. 196), also auch U.

Sei nun $\bar U$ eine Komponente von σ und $u \neq 1$ ein Element von $\bar U$. Dann ist $C_{\bar G}(u) \leq N_{\bar G}(\bar U)$, da ja für jedes $v \in C_{\bar G}(u)$ gilt $1 \neq u = u^v \in \bar U \cap \bar U^v$, also $\bar U = \bar U^v$. Ist $\bar U$ eine p-Sylowgruppe von $\bar G$, so rechnet man leicht nach, daß $C_{\bar G}(u) \leq \bar U$, also $C_{\bar G}(u) = \bar U$ gilt. Ist U zyklisch, so ist (s. [7], S. 186 und 192) $N_{\bar G}(\bar U)$ eine Diedergruppe der Ordnung $2\,|\bar U|$. Ist also $o(u) \neq 2$, so wird u von $N_{\bar G}(\bar U)$ nicht zentralisiert, und es folgt $C_{\bar G}(u) = \bar U$; ist $o(u) = 2$, so ist $C_{\bar G}(u) = N_{\bar G}(\bar U)$, ferner natürlich $|\bar U|$ gerade, also $p \neq 2$. Wir haben also gezeigt:

(5.3.2) Ist $\bar U$ eine Komponente von σ und ist $u \in \bar U$, $u \neq 1$, so ist $C_{\bar G}(u) = \bar U$, außer wenn $o(u) = 2$ ist. In diesem Fall ist $p \neq 2$, $\bar U$ zyklisch und $C_{\bar G}(u) = N_{\bar G}(\bar U)$ eine Diedergruppe der Ordnung $2\,|\bar U|$.

Sei nun x ein beliebiges Element aus G, das nicht in Z liegt. Da $x \notin Z$ ist, ist $\bar x \neq 1$. Da σ eine Partition von $\bar G$ ist, liegt $\bar x$ also in genau einer Komponente $\bar U = U/Z$ von σ. Wir wollen zeigen, daß $C_G(x) = U$ ist. Nach (5.3.1) ist U abelsch; wegen $x \in U$ folgt $U \leq C_G(x)$. Offenbar ist ganz allgemein $\overline{C_G(x)} \leq C_{\bar G}(\bar x)$. Ist also $o(\bar x) \neq 2$, so ist nach (5.3.2) $C_{\bar G}(\bar x) = \bar U$, also $\overline{C_G(x)} \leq \bar U$ und wegen $U \leq C_G(x)$ somit schließlich $C_G(x) = U$. — Sei daher $o(\bar x) = 2$ und sei $N \leq G$ mit $N/Z = N_{\bar G}(\bar U)$. Nach (5.3.2) ist $\overline{C_G(x)} \leq C_{\bar G}(\bar x) = \bar N$, also $U \leq C_G(x) \leq N$. Da nach (5.3.2) $|N:U| = 2$ ist, brauchen wir somit nur zu zeigen, daß $C_G(x) \neq N$ ist. Sei zunächst $x \in G'Z$. Dann ist $x = x_1 z$ mit $x_1 \in G'$, $z \in Z$ und natürlich $C_G(x) = C_G(x_1)$; wir können also $x \in G'$ annehmen. Ist $\bar G \simeq PGL(2, p^n)$, so ist $|\bar G : \bar G'| = 2$, also $|\bar N : \bar N \cap \bar G'| \leq 2$. Da $\bar G' \simeq PSL(2, p^n)$ für $p \neq 2$ keine zyklische Untergruppe der Ordnung $|\bar U| = p^n \pm 1$ enthält, folgt $\bar U \nleq \bar N \cap \bar G'$. Da jede von $\bar U$ verschiedene maximale Untergruppe der Diedergruppe $\bar N$ der Ordnung $2(p^n \pm 1) \geq 8$ (da $p^n \geq 5$) wieder eine Diedergruppe ist, ist $\bar N \cap \bar G' = N \cap G'Z/Z$ eine Diedergruppe. Falls $\bar G \simeq PSL(2, p^n)$ ist, ist das wegen $G'Z = G$ sicherlich richtig; es ist also immer $G' \cap N/G' \cap Z \simeq N \cap G'Z/Z$ eine Diedergruppe, die $x(G' \cap Z)$ in ihrem Zentrum enthält. Sei $V/G' \cap Z$ eine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 4 von $G' \cap N/G' \cap Z$. Da $G' \simeq SL(2, p^n)$ ist, ist $G' \cap Z = Z(G')$ von der Ordnung 2, also $|V| = 8$. Da V nur eine Involution besitzt, ist V eine Quaternionengruppe und x ein Element der Ordnung 4 in V. Damit wird x von V nicht zentralisiert; da $V \leq N$ ist, folgt also $C_G(x) \neq N$. Das war zu zeigen. — Sei nun $x \notin G'Z$, also insbesondere $\overline{G} \simeq PGL(2, p^n)$. Die Diedergruppe $\overline{N}$ enthält eine elementarabelsche Untergruppe $\overline{V}$ der Ordnung 4. Da $|\overline{G} : \overline{G}'| = 2$ ist, ist $\overline{G}' \cap \overline{V} \neq 1$. Es gibt also ein $\overline{y} \in \overline{G}' \cap \overline{V} \leq \overline{G}' \cap \overline{N}$ mit $o(\overline{y}) = 2$. Ist $y \in G$ mit $_K yZ = \overline{y}$, so ist $y \in G'Z$ und nach dem eben bewiesenen $C_G(y)/Z$ eine Komponente von σ, also zyklisch. Insbesondere kann die elementarabelsche Gruppe $\overline{V}$ nicht in $\overline{C_G(y)}$ enthalten sein; da y sicherlich in $C_G(y)$ liegt, muß also $x \notin C_G(y)$ gelten. Das bedeutet $y \notin C_G(x)$, und da $y \in N$ ist, folgt $N \neq C_G(x)$, was zu zeigen war. — Wir haben also

(5.3.3) Ist $x \in G \setminus Z$, so ist $C_G(x)/Z$ die Komponente von σ, in der x liegt.

Ist nun M ein maximaler Zentralisator von G, so ist $M = C_G(x)$ für ein $x \in G \setminus Z$, also M/Z eine Komponente von σ. Umgekehrt ist jede Untergruppe U von G, für die U/Z eine Komponente von σ ist, nach (5.3.3) auch wirklich ein (maximaler) Zentralisator. Diese Untergruppen sind also genau die maximalen Zentralisatoren von G. Da sie nach (5.3.1) abelsch sind, ist G eine $\mathfrak{M}$-Gruppe. Die Anzahl der Komponenten von σ ist

$$p^n + 1 + \tfrac{1}{2}(p^n + 1)p^n + \tfrac{1}{2}(p^n - 1)p^n = p^{2n} + p^n + 1;$$

damit ist $G \in \mathfrak{M}(p^{2n} + p^n + 1)$, was zu zeigen war.

b) Sei nun $G/Z \simeq PGL(2, 9)$ oder $PSL(2, 9)$ und $G' \simeq PSL(2, 9)^*$. Sei hier τ die Partition von G/Z, die aus den maximalen zykliscen Untergruppen von G/Z besteht.

Es ist $PSL(2, 9)$ isomorph zur alternierenden Gruppe auf 6 Ziffern (s. [7], Satz 6.14, S. 183); nach [12], S. 242 ist daher

$$G' = \langle c_1, c_2, c_3, c_4, k \mid c_1^3 = c_2^2 = c_3^2 = c_4^2 = (c_1c_2)^3 = (c_1c_3)^2 = (c_2c_3)^3 = (c_3c_4)^3 = k^3, (c_1c_4)^2 = k, c_2c_4 = k^3c_4c_2, kc_i = c_ik (i = 1, \dots, 4), k^6 = 1 \rangle.$$

Sei $H=\langle k^2\rangle$ der Normalteiler der Ordnung 3 von G'. Dann ist $G'/H\simeq SL(2, 9)$; da außerdem G/Z keinen auflösbaren Normalteiler besitzt, ist $Z(G/H)=Z/H$. Damit erfüllt G/H die Voraussetzungen des Teiles *a*) des Lemmas; insbesondere gilt (5.3.3) für G/H und die Partition σ von G/Z.

Ist nun $x\in G\backslash Z$, so ist wegen (5.3.3) $C_G(x)/H\leq C_{G/H}(xH)/H=U/H$, falls U/Z die Komponente von σ ist, in der xZ liegt. Damit ist $C_G(x)\leq U$. *Ist* U/Z zyklisch, so ist U abelsch, also $C_G(x)=U$, und außerdem U/Z eine Komponente von τ. Das wollen wir zeigen. — Sei also U/Z nicht zyklisch, d.h. eine 3-Sylowgruppe von G/Z. Dann kann wegen $|U:Z|=9$ nur entweder $C_G(x)/Z$ zyklisch, also eine Komponente von τ, oder $C_G(x)=U$ sein. Im letzteren Fall besäße U eine zentrale Untergruppe $\langle x, Z\rangle$ vom Index 3, wäre also abelsch. Insbesondere wären die 3-Sylowgruppen von G abelsch. Ist aber $a=c_1$ und $b=c_3c_4$, so ist

$$a^{-1}b^{-1}ab=c_1^{-1}c_4^{-1}c_3^{-1}c_1c_3c_4=c_1^{-1}c_4^{-1}c_3^{-1}c_3^{-1}c_1^{-1}c_4k^3=$$
$$=c_1^{-1}c_4^{-1}c_1^{-1}c_4=c_4^2k^{-1}=k^2\,;$$

$\langle a, b\rangle/\langle k\rangle$ ist also elementarabelsch von der Ordnung 9 und damit $\langle a, b\rangle=P\langle k\rangle$ mit einer 3-Sylowgruppe P von $\langle a, b\rangle$. Wären also die 3-Sylowgruppen von G abelsch, so wäre P, also auch $\langle a, b\rangle$ abelsch; das ist aber nicht der Fall. Damit ist gezeigt, daß $C_G(x)/Z$ eine Komponente von τ ist, daß also (5.3.3) auch hier für τ statt σ gilt. Wie in *a*) folgt, daß die Untergruppen U von G, für die U/Z eine Komponente von τ ist, die maximalen Zentralisatoren sind und daß $G\in\mathfrak{M}$ ist. Da jede 3-Sylowgruppe von G/Z vier Untergruppen der Ordnung 3 enthält und die 3-Sylowgruppen sich trivial schneiden, gibt es $4(p^n+1)=40$ Untergruppen der Ordnung 3 in τ, ferner (wie in *a*)) $p^{2n}=81$ weitere Komponenten, insgesamt also 121. Damit ist auch Teil *b*) des Lemmas bewiesen.

KOROLLAR 5.4. *Ist* $G\simeq GL(2, p^n)$, *p Primzahl,* $p^n>3$, *so ist* $G\in\mathfrak{M}(p^{2n}+p^n+1)$.

LEMMA 5.5. *Sei G eine Gruppe.*

a) *Sei $G/Z(G)$ eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern $F/Z(G)$ und sei $Z(K)\neq Z(G)$, wenn $K/Z(G)$ ein Komplement zu $F/Z(G)$ ist. Ist*

$Z(F) \neq Z(G)$, so ist $G \in \mathfrak{D}(|F : Z(G)|+1)$. Ist $Z(F)=Z(G)$ und $F \in \mathfrak{D}(k)$, so ist $G \in \mathfrak{D}(|F : Z(G)|+k)$.

b) Ist G eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern F, so ist $G \in \mathfrak{D}(|F|+1)$.

Beweis. *a*) Sei wieder $Z(G)=Z$. Ist $x \in G \backslash Z$, so ist xZ in einer Komponente U/Z der Frobenieuspartition von $G \backslash Z$ enthalten. Es folgt $C_{G/Z}(xZ) \leq U/Z$, also $C_G(x) \leq U$. Da $Z(K) \neq Z$ ist, existiert ein $x \in Z(K) \backslash Z$, und es folgt $C_G(x)=K$; K ist also ein maximaler Zentralisator von G. Ist $Z(F) \neq Z$, so ist auch $F \in \mathfrak{C}(G)$, und die maximalen Zentralisatoren von G sind genau die vollständigen Urbilder der Komponenten der Frobeniuspartition von G/Z bzgl. des natürlichen Homomorphismus von G auf G/Z. Das sind F und die Urbilder der $|G : K|=|F : Z|$ Komplemente; es ist also $G \in \mathfrak{D}(|F : Z|+1)$. Ist $Z(F)=Z$, so ist $C_G(x)=C_F(x)$ für alle $x \in F \backslash Z$. Die maximalen Zentralisatoren von G sind also hier die maximalen Zentralisatoren von F sowie die Urbilder der Frobeniuskomplemente. Ist daher $F \in \mathfrak{D}(k)$, so ist $G \in \mathfrak{D}(k+|F : Z|)$.

b) ist ein Spezialfall von *a*), da in einer Frobeniusgruppe G mit Frobeniuskern F und Komplement K immer $Z(G)=1$, aber $Z(F) \neq 1 \neq$ $\neq Z(K)$ ist (s. etwa [7], Hauptsatz 8.7 und Satz 8.18, S. 499 und 506).

Lemma 5.6. *Ist $G \simeq Sz(q)$, $q=2^n$, $n \geq 3$, so ist $G \in \mathfrak{D}(q^4+q^2+1)$.*

Beweis. Nach einem Satz von Suzuki (s. [9], Satz 4.9 und 4.12, S. 31 und 37) bilden die Zentralisatoren der Elemente ungerader Ordnung und die 2-Sylowgruppen von G eine (normale) Partition σ, die aus $\frac{1}{2}q^2(q^2+1)$ zyklischen Untergruppen der Ordnung $q-1$, $\frac{1}{4}(q-\sqrt{2q}+1)$ $q^2(q-1)$ zyklischen Untergruppen der Ordnung $q+\sqrt{2q}+1$, $\frac{1}{4}(q+\sqrt{2q}+1)q^2(q-1)$ zyklischen Untergruppen der Ordnung $q-\sqrt{2q}+1$ und den q^2+1 2-Sylowgruppen von G besteht. Ist $x \in G$ von Primzahlpotenzordnung, so ist entweder $o(x)$ ungerade und damit $C_G(x)$ eine Komponente von σ oder $o(x)$ eine 2-Potenz und damit $C_G(x)$ eine 2-Gruppe ([9], (4.2), S.27), also in einer 2-Sylowgruppe S von G enthalten. Damit ist auch $S=C_G(Z(S))$ ein Zentralisator. Die Komponenten der Partition σ sind also genau die maximalen Zentralisatoren von G, womit $G \in \mathfrak{D}$ gezeigt ist. Die Anzahl der Komponenten von σ ist offenbar

$$\tfrac{1}{2}q^2(q^2+1)+\tfrac{1}{4}q^2(q-1)(q-\sqrt{2q}+1)+\tfrac{1}{4}q^2(q-1)(q+\sqrt{2q}+1)+q^2+1$$

$$=\tfrac{1}{2}q^2(q^2+1)+\tfrac{1}{2}q^2(q^2-1)+q^2+1$$
$$=q^4+q^2+1,$$

womit das Lemma bewiesen ist.

Wir wollen nun zeigen, daß die in Lemma 5.3 bis 5.6 angegebenen Gruppen im wesentlichen alle nicht auflösbaren $\mathfrak{D}$- und $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppen sind. Dazu zunächst

LEMMA 5.7. *Sei G eine $\mathfrak{D}$-Gruppe und seien $C_1, \ldots, C_k$ die maximalen Zentralisatoren von G.*

a) Ist $x \in C_i \setminus Z(G)$, so ist $C_G(x) \leq C_i$.

b) Die $C_i/Z(G)$ $(i=1, \ldots, k)$ bilden eine normale Partition von $G/Z(G)$.

BEWEIS. *a)* Ist $x \in C_i \setminus Z(G)$, so ist $x \in C_G(\langle x \rangle) \neq G$, also $x \in C_i \cap M$, wenn M ein maximaler Zentralisator von G mit $C_G(\langle x \rangle) \leq M$ ist. Da G eine $\mathfrak{D}$-Gruppe ist, folgt $M=C_i$, also $C_G(x) \leq C_i$.

b) Ist $xZ(G)$ ein beliebiges von $Z(G)$ verschiedenes Element von $G/Z(G)$, so ist $x \in C_G(\langle x \rangle) \neq G$, also $x \in M$, wo M ein $C_G(x)$ enthaltender maximaler Zentralisator von G ist. Damit ist jedes $xZ(G)$ in einem der $C_i/Z(G)$ enthalten. Da $C_i \cap C_j = Z(G)$ für alle $i \neq j$ ist, bilden also die $C_i/Z(G)$ eine Partition von $G/Z(G)$. Da mit jedem Zentralisator auch alle Konjugierten Zentralisatoren sind, ist die Partition normal.

LEMMA 5.8. *Ist U eine Untergruppe der $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppe G, so ist U abelsch oder eine $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppe.*

BEWEIS. Ist U nicht abelsch und M ein maximaler Zentralisator von U, so ist $M=U \cap N$, wo $N \neq G$ ein Zentralisator von G ist. Da alle maximalen Zentralisatoren von G abelsch sind, ist N, also auch M abelsch. Damit ist jeder maximale Zentralisator von U abelsch, also U eine $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$-Gruppe.

BEMERKUNG. Für $\mathfrak{D}$-Gruppen gilt keine entsprechende Aussage, wie man mit Hilfe von Lemma 5.5 leicht sieht.

SATZ 5.9. *Die (endliche) Gruppe G ist genau dann eine nicht auflösbare $\mathfrak{M}$-Gruppe, wenn G eine der folgenden Eigenschaften hat:*

1) $G/Z(G) \simeq PSL(2, p^n)$ *oder* $PGL(2, p^n)$ *und* $G' \simeq SL(2, p^n)$, *p eine Primzahl,* $p^n > 3$; *oder*

2) $G/Z(G) \simeq PSL(2, 9)$ *oder* $PGL(2, 9)$ *und* $G' \simeq PSL(2, 9)^*$.

Die (endliche) Gruppe G ist genau dann eine nicht auflösbare $\mathfrak{D}$-Gruppe, wenn G entweder eine nicht auflösbare $\mathfrak{M}$-Gruppe (also vom Typ 1) oder 2)) ist oder eine der folgenden Eigenschaften hat:

3) *$G/Z(G)$ ist eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern $F/Z(G)$, und es ist $F \in \mathfrak{D}$, falls $Z(F) = Z(G)$ ist. Ist $K/Z(G)$ ein Komplement zu $F/Z(G)$, so ist K nicht auflösbar und $Z(K) \neq Z(G)$.*

4) $G = G_1 \times A$ *mit* $G_1 \simeq Sz(2^n)$, $n \geq 3$, *und A abelsch.*

BEWEIS. Hat G Eigenschaft 1) oder 2), so ist G natürlich nicht auflösbar und nach Lemma 5.3 eine $\mathfrak{M}$-Gruppe. Hat G Eigenschaft 3) oder 4), so ist G nach Lemma 5.5 bzw. Lemma 2.5 und 5.6 eine $\mathfrak{D}$-Gruppe. Zu zeigen sind also nur noch die Umkehrungen dieser Aussagen.

Sei dazu zunächst G eine nicht auflösbare $\mathfrak{D}$-Gruppe und sei zur Abkürzung $Z(G) = Z$. Nach Lemma 5.7 besitzt G/Z eine normale Partition σ. Da G/Z nicht auflösbar ist, folgt nach (4.2)

(5.9.1) $G/Z \simeq Sz(2^n)$, $n \geq 3$, $PGL(2, p^n)$ oder $PSL(2, p^n)$, p eine Primzahl, $p^n > 3$, oder eine Komponente von σ ist normalisatorgleich, und G/Z ist eine Frobeniusgruppe.

Wir behandeln zunächst den letzten Fall. Sei K/Z eine normalisatorgleiche Komponente von σ. Dann ist K ein maximaler Zentralisator von G, also nach Folgerung 2.10 $C_G(K) = Z(K) \neq Z$. Sei F/Z der Frobeniuskern von G/Z. Da F nilpotent ist ([7], Hauptsatz 8.7, S. 499), ist K nicht auflösbar. Ist $Z(F) = Z(G)$, so sind wie im Beweis zu Lemma 5.5 die maximalen Zentralisatoren von F maximale Zentralisatoren von G; es folgt also $F \in \mathfrak{D}$. Damit ist G vom Typ 3). Wir haben also gezeigt:

(5.9.2) Ist G/Z eine Frobeniusgruppe, so ist G vom Typ 3) des Satzes.

Wir behandeln nun die anderen Fälle. Sei hier $H=G'Z$. Da H/Z einfach ist, ist $H'Z=H$, also H/H' zentral in G/H' vom Index ≤ 2. Damit ist G/H' abelsch, also $H'=G'$. Da $H=H'Z$ ist, ist $H''=H'$, also $G''=G'$. Damit ist $G' \cap Z \leq (G')' \cap Z(G')$, und nach einem Satz von Schur ([11], S. 99) folgt:

(5.9.3) G' ist ein epimorphes Bild einer Darstellungsgruppe von $G'/G' \cap Z \simeq H/Z$.

Sei zunächst $G/Z \simeq Sz(2^n)$. Wir wollen zeigen, daß die 2-Sylowgruppen von G/Z Komponenten der durch die maximalen Zentralisatoren induzierten Partition σ sein müssen. Ist nämlich P eine 2-Sylowgruppe von G/Z, so ist der Exponent von P gleich 4 ([9], (4.1), S. 26). Ist also x eine Involution in $Z(P)$ und U die Komponente von σ, die x enthält, so ist $y \in U$ für jedes Element $y \in P$ mit $o(y)=4$, da ja $xy=yx$ und $o(x) \neq o(y)$ ist ([2], Lemma 2.1, S. 337). Ist z ein beliebiges Element der Ordnung 2 von P, so ist $z \in Z(P)$ ([9], (4.1), S. 26), also mit y auch $z \in U$. Damit gilt $P \leq U$. Wäre $U > P$, so wäre $U=V/Z$ mit einem maximalen Zentralisator V von G. Ist $V=C_G(v)$, so folgt also $U \leq C_{G/Z}(vZ)$; da P ein maximaler Zentralisator von G/Z ist (s. etwa den Beweis zu Lemma 5.6), ist das unmöglich. Es ist also $U=P$, was wir zeigen wollten. Wir haben also

(5.9.4) Ist $G/Z \simeq Sz(2^n)$ und ist P eine 2-Sylowgruppe von G/Z, so ist $P=M/Z$ mit einem maximalen Zentralisator M von G.

Der Schursche Multiplikator von $Sz(2^n)$ ist für $n>3$ trivial ([1], Thm. 1, S. 515). Ist also $G/Z \simeq Sz(2^n)$ mit $n>3$, so ist $G' \cap Z=1$, und somit $G=G' \times Z$ mit $G' \simeq Sz(2^n)$.

Sei nun $G/Z \simeq Sz(8)$. Wir wollen auch hier zeigen, daß $G' \cap Z=1$ sein muß, nehmen also an, es wäre $G' \cap Z \neq 1$. Da G/Z einfach ist, ist $G=G'Z$, also nach Lemma 2.5 $\mathfrak{C}(G') \simeq \mathfrak{C}(G)$ und damit G' eine $\mathfrak{D}$-Gruppe mit $G'/Z(G') \simeq Sz(8)$. Da der Schursche Multiplikator von $Sz(8)$ die Ordnung 4 hat ([1], Thm. 2, S. 515), ist $G' \cap Z$ eine 2-Gruppe. Ist also S eine 2-Sylowgruppe von G', so ist S nach (5.9.4) ein maximaler Zentralisator von G'. Nach Folgerung 2.10 ist $S = C_{G'}(Z(S))$, also $Z(S) \neq G' \cap Z$. Da sicherlich $Z(S)/G' \cap Z \leq Z(S/G' \cap Z)$ ist und außerdem $N_{G'/G' \cap Z}(S/G' \cap Z)$ transitiv auf den von 1 verschiedenen Elementen von $Z(S/G' \cap Z)$ ist ([9], (4.1), S. 26), folgt $Z(S)/G' \cap Z = Z(S/G' \cap Z)$. Da $N_{G'}(S)/G' \cap Z$ eine Frobeniusgruppe ist ([9], (4.1), S. 26), ist $G' \cap Z = Z(N_{G'}(S))$. Damit haben wir

$$Z(S)/Z(N_{G'}(S)) = Z(S/Z(N_{G'}(S))).$$

Wir wollen zeigen, daß das für die 2-Sylowgruppe eines epimorphen Bildes von $Sz(8)^*$, das nicht zu $Sz(8)$ isomorph ist, unmöglich ist. Sei also $K = Sz(8)^*$, T eine 2-Sylowgruppe von K und $N = N_K(T)$. Nach einem bekannten Verlagerungsschluß (s. etwa [7], S. 642) ist $Z(K) \leq T'$, also erst recht $Z(K) \leq N'$. Nach [1], S. 518 ist $Z(K)$ isomorph zur 2-Komponente des Schurschen Multiplikators von $N/Z(K)$; da $|N : T| = 7$ ist ([9], (4.1), S. 26), ist der Multiplikator von $N/Z(K)$ eine 2-Gruppe, also $Z(K)$. Da $Z(K) \leq N' \cap Z(N)$ ist, ist N eine Darstellungsgruppe von $N/Z(K)$. Da $Z(K) \leq N'$ und $N/Z(K)$ eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern $T/Z(K)$ ist, ist $T = N'$. Die Kommutatorgruppen je zweier Darstellungsgruppen von $N/Z(K)$ sind isomorph ([7], Satz 23.6, S. 634); T ist also zur Kommutatorgruppe einer beliebigen Darstellungsgruppe von N isomorph. Damit ist (s. [1], S. 518)

$$\begin{aligned} T = \langle x_1, x_2, x_3 \mid\ & x_1^2 = x_{23}x_{122},\ x_2^2 = x_{13}x_{23}x_{121}x_{122}, \\ & x_3^2 = x_{12}x_{13}x_{23},\ x_{131} = x_{122},\ x_{133} = x_{121}x_{122},\ x_{232} = x_{121}, \\ & x_{233} = x_{122},\ x_{123} = x_{121},\ x_{231} = 1 \text{ (wobei } x_{ij} = (x_i, x_j) \\ & \text{und } x_{ijk} = (x_{ij}, x_k) \text{ ist)},\ x_{ij}^2 = x_{ijk}^2 = 1 \text{ und} \\ & x_{ijk} \in Z(T) \text{ für alle } i, j, k = 1, \ldots, 3 \rangle. \end{aligned}$$

Dabei ist $Z(N) = \langle x_{121}, x_{122} \rangle$ und $Z(T/Z(N)) = \langle x_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, 3 \rangle / Z(N)$, jedoch $(x_{12}, x_1) = x_{121} \neq 1$, also $Z(T)/Z(N) \neq Z(T/Z(N))$. Sei schließlich L eine Untergruppe der Ordnung 2 in $Z(N)$. Ist $L = \langle x_{121} \rangle$, so ist $(x_{12}L, x_2L) = x_{122}L \neq L$, und ist $L \neq \langle x_{121} \rangle$, so ist $(x_{12}L, x_1L) = x_{121}L \neq L$, also auch hier immer $Z(T/L)/Z(N/L) \neq Z((T/L)/(Z(N)/L))$. Das war zu zeigen. Es ist also $G' \cap Z=1$ und damit auch für $n=3$ gezeigt, daß $G' \simeq Sz(2^n)$ und $G=G' \times Z$ ist. Wir haben also

(5.9.5) Ist $G/Z \simeq Sz(2^n)$, $n \geq 3$, so ist $G=G' \times Z$ und $G' \simeq Sz(2^n)$.

Sei nun $G/Z \simeq PSL(2, p^n)$ oder $PGL(2, p^n)$, p eine Primzahl. Sei zunächst $G' \simeq PSL(2, p^n)$, p ungerade. Dann ist $G' \cap Z=1$. Sei x eine Involution in G'. Dann ist $C_{G'}(x)$ eine Diedergruppe (s. etwa (5.3.2)); es gibt also eine Involution $y \in C_{G'}(x)$ mit $y \neq x$. Dann ist offenbar $\langle x, y \rangle \leq C_{G'}(x) \cap C_{G'}(y) \leq C_G(x) \cap C_G(y)$; insbesondere ist $C_G(x) \cap C_G(y) \neq Z$. Da G eine $\mathfrak{D}$-Gruppe ist, müssen also $C_G(x)$ und $C_G(y)$ im selben maximalen Zentralisator M enthalten sein. Ist $z \in G$ mit $M=C_G(z)$, so ist $M/Z \leq C_{G/Z}(zZ)$, also $\langle C_G(x)/Z, C_G(y)/Z \rangle \leq C_{G/Z}(zZ)$. Nach (5.3.2) folgt $C_G(x)=C_G(y)$, also $G' \simeq G/Z \simeq PSL(2, 5)$. Wegen $PSL(2, 5) \approx PSL(2, p^n)^* = SL(2, p^n)$ ist G hier vom Typ 1) des Satzes. Damit ist der Fall $G' \simeq PSL(2, p^n)$, p ungerade, erledigt; sei also im folgenden G' nicht zu $PSL(2, p^n)$, p ungerade, isomorph. Nach (5.9.3) ist aber G' zu einem epimorphen Bild von $PSL(2, p^n)^*$ isomorph. Ist $p^n \neq 4$ und 9, so ist $PSL(2, p^n)^* = SL(2, p^n)$ ([7], Satz 25.7, S. 646). Ist also p ungerade und $p^n \neq 9$, so ist $G' \simeq SL(2, p^n)$, da ja $G'/G' \cap Z \simeq PSL(2, p^n) \not\simeq G'$ ist. Ist $p=2$ und $p^n \neq 4$, so ist $PSL(2, p^n) = SL(2, p^n)$, also gewiß $G' \simeq SL(2, p^n)$. Ist. schließlich $p^n=4$, so ist wegen $PSL(2, 4) \simeq PSL(2, 5)$ auch $G/Z \simeq$ $\simeq PSL(2, 5)$ und $G' \simeq SL(2, 4)$ oder $SL(2, 5) = PSL(2, 4)^*$, also G von der gewünschten Form. Es bleibt der Fall $p^n=9$ zu behandeln. Es ist $G' \simeq PSL(2, 9)^*/N$ mit $N \leq Z(PSL(2, 9)^*)$ und $|Z(PSL(2, 9)^*)|=6$ ([7], Satz 25.7, S. 646). Wir wollen zeigen, daß $G' \simeq SL(2, 9)$ oder $PSL(2, 9)^*$ ist, d.h. daß $|N|=3$ oder 1 ist. Da $G' \not\simeq PSL(2, 9)$ gilt, muß $|N| \neq 6$ sein; es bleibt also der Fall $|N|=2$ zu betrachten. Hier ist $|G' \cap Z|=3$. Ist S eine 2-Sylowgruppe von G', so ist S eine Diedergruppe der Ordnung 8. Ist also x die Involution in $Z(S)$, so ist $C_G(x) \geq S$; ist $y \neq x$ ein weiteres Element der Ordnung 2 in S, so ist y zu x konjugiert, ferner $S \not\leq C_G(y)$, und damit enthält $C_G(y)$ eine von S verschiedene 2-Sylowgruppe T von G'. Erneut ist $C_G(x) \cap C_G(y) \neq Z(G)$, also $C_G(x)$ und $C_G(y)$ in einem maximalen Zentralisator M von G enthalten. Wie eben müßte wegen (5.3.2) M/Z eine Komponente oder ein Normalisator einer Komponente der im Beweis zu Lemma 5.3 beschriebenen Partition σ sein. Damit müßte $|M/Z|$ entweder $2(p^n-1)=16$ oder $2(p^n+1)=20$

teilen; M/Z kann also nicht 2 verschiedene 2-Sylowgruppen SZ/Z und TZ/Z der Ordnung 8 von $G'Z/Z$ enthalten. Damit ist gezeigt, daß $|G' \cap Z|=3$ unmöglich ist, daß also $G' \simeq SL(2, 9)$ oder $PSL(2, 9)^*$ sein muß. Insgesamt haben wir

(5.9.6) Ist $G/Z \simeq PSL(2, p^n)$ oder $PGL(2, p^n)$, so ist $G' \simeq SL(2, p^n)$ oder $PSL(2, 9)^*$.

Damit ist die zweite Aussage des Satzes bereits bewiesen: die Gruppen in (5.9.6) sind nach Lemma 5.3 $\mathfrak{M}$-Gruppen; ist also G keine $\mathfrak{M}$-Gruppe, so ist nach (5.9.1), (5.9.2) und (5.9.5) G vom Typ 3) oder 4) des Satzes.

Da jede $\mathfrak{M}$-Gruppe eine $\mathfrak{D}$-Gruppe ist, haben wir zum Beweis der ersten Aussage des Satzes nur noch zu zeigen, daß G keine $\mathfrak{M}$-Gruppe ist, wenn G vom Typ 3) oder 4) des Satzes ist. Ist G aber vom Typ 3) des Satzes, so ist K wegen $Z(K) \neq Z(G)$ ein maximaler Zentralisator von G, der nicht auflösbar, also gewiß nicht abelsch ist. G ist somit keine $\mathfrak{M}$-Gruppe. Ist G vom Typ 4), so ist nach (5.9.4) T ein maximaler Zentralisator von G, wenn T/Z eine 2-Sylowgruppe von G/Z ist. Da die 2-Sylowgruppen in $Sz(2^n)$ nicht abelsch sind, ist also T ein nicht abelscher maximaler Zentralisator von G. Damit ist G keine $\mathfrak{M}$-Gruppe und Satz 5.9 bewiesen.

Wir erwähnen zwei Folgerungen aus Satz 5.9, von denen die zweite vielleicht etwas überraschend ist.

Korollar 5 .10. *Ist G eine einfache $\mathfrak{M}$-Gruppe, so ist $G \simeq SL(2, 2^n)$, $n \geq 2$. Ist G eine einfache $\mathfrak{D}$-Gruppe, so ist $G \simeq SL(2, 2^n)$, $n \geq 2$, oder $G \simeq Sz(2^n)$, $n \geq 3$.*

Korollar 5.11. *Ist $G \in \mathfrak{M}(k)$ und k gerade, so ist G auflösbar.*

Beweis. Nach Satz 5.9 und Lemma 5.3 ist $k=121$ oder $k=p^{2n}+ +p^n+1$ mit einer Primzahl p, wenn G eine nicht auflösbare $\mathfrak{M}(k)$-Gruppe ist. Da $p^{2n}+p^n$ offenbar gerade ist, ist also k für nicht auflösbare $\mathfrak{M}(k)$-Gruppen immer ungerade.

Wir behandeln nun die auflösbaren $\mathfrak{M}$- und $\mathfrak{D}$-Gruppen.

SATZ 5.12. *Ist G eine auflösbare $\mathfrak{M}$-Gruppe, so hat G eine der folgenden Eigenschaften*:

1) *G enthält einen abelschen Normalteiler N vom Index p, p eine Primzahl, ist aber selbst nicht abelsch.*

2) *$G/Z(G)$ ist eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern $F/Z(G)$, für die F und K abelsch sind, wenn $K/Z(G)$ ein Komplement zu $F/Z(G)$ ist.*

3) *$G/Z(G)$ ist eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern $F/Z(G)$. Es ist K abelsch, wenn $K/Z(G)$ ein Komplement zu $F/Z(G)$ ist, sowie $Z(F)=Z(G)$, $F/Z(G)$ eine p-Gruppe, p Primzahl, und $F\in\mathfrak{M}$.*

4) *$G/Z(G)\simeq S(4)$ und V ist nicht abelsch, wenn $V/Z(G)$ die Kleinsche Vierergruppe in $G/Z(G)$ ist.*

5) *$G=A\times P$, A abelsch, P eine p-Gruppe in $\mathfrak{M}$, p Primzahl.*

Umgekehrt sind die Gruppen in 1) *bis* 5) *auflösbare $\mathfrak{M}(k)$-Gruppen, wobei für k in dem einzelnen Fällen gilt*:

1): $k=|N:Z(G)|+1$;

2): $k=|F:Z(G)|+1$;

3): $k=|F:Z(G)|+m$, *wenn $F\in\mathfrak{M}(m)$ ist;*

4): $k=13$.

Ist G eine auflösbare $\mathfrak{D}$-Gruppe, so hat G die Eigenschaft 4) *oder eine der folgenden*:

1′) *G ist nicht nilpotent; es ist aber $G=QP$ mit einem nilpotenten p'-Normalteiler Q, einer p-Gruppe P, p eine Primzahl, und es existiert eine Untergruppe P_1 von P mit $Z(P)\leq P_1$, $|P:P_1|=p$, $P_1\leq C_P(x)$ für alle $x\in Z(Q)$, $P_1=C_P(x)$ für alle $x\in Q\setminus Z(Q)$, $P_1\geq C_P(x)$ für alle $x\in P_1\setminus Z(P)$, und es ist $Z(P_1)\neq Z(P)$ oder $Z(Q)\neq C_Q(P)$.*

2′) *$G/Z(G)$ ist eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern $F/Z(G)$, und es ist $Z(F)\neq Z(G)\neq Z(K)$ sowie K auflösbar, wenn $K/Z(G)$ ein Komplement zu $F/Z(G)$ ist.*

3′) *$G/Z(G)$ ist eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern $F/Z(G)$.*

Es ist K auflösbar, wenn $K/Z(G)$ ein Komplement zu $F/Z(G)$ ist, sowie $Z(K) \neq Z(G) = Z(F)$, $F/Z(G)$ eine p-Gruppe, p Primzahl, und $F \in \mathfrak{D}$.

5′) $G = A \times P$, A abelsch, P eine p-Gruppe in $\mathfrak{D}$, p Primzahl.

Umgekehrt sind die Gruppen in 1′) bis 5′) auflösbare $\mathfrak{D}(k)$-Gruppen, wobei für k in den einzelnen Fällen gilt:

1′): $k = |QP_1 : C_Q(P)Z(P)| + 1$;

2′): $k = |F : Z(G)| + 1$;

3′): $k = |F : Z(G)| + m$, *wenn* $F \in \mathfrak{D}(m)$ *ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß eine auflösbare $\mathfrak{D}$-Gruppe G eine der angegebenen Eigenschaften haben muß. Nach Lemma 5.7 bilden die C_i/Z eine normale Partition σ von G/Z, wenn die C_i die maximalen Zentralisatoren von G sind (sei wieder $Z(G) = Z$). Nach dem Satz von Baer (4.1) hat G eine der folgenden Eigenschaften:

a) G/Z ist eine p-Gruppe, p Primzahl.

b) Eine Komponente von σ ist normalisatorgleich, und G/Z ist eine Frobeniusgruppe.

c) $G/Z \simeq S(4)$ und σ besteht aus den maximalen zyklischen Untergruppen von G/Z.

d) Es gibt einen nilpotenten Normalteiler N/Z von G/Z, der eine Komponente von σ ist, mit $|G : N| = p$, p eine Primzahl, und jedes nicht in N/Z gelegene Element von G/Z hat Ordnung p.

Im Fall *a*) ist offenbar $G = A \times P$, $A \leq Z$, P eine p-Sylowgruppe von G. Nach Lemma 2.5 ist $\mathfrak{C}(G) \simeq \mathfrak{C}(P)$, also $P \in \mathfrak{D}$ und damit G vom Typ 5′).

Im Fall *b*) sei K/Z eine normalisatorgleiche Komponente von σ und F/Z der Frobeniuskern zu G/Z. Damit ist K ein maximaler Zentralisator, also $K = C_G(Z(K))$, d.h. $Z(K) \neq Z$. Ist $Z(F) \neq Z(G)$, so ist also G vom Typ 2′); ist $Z(F) = Z(G)$, so ist wie immer jeder maximale Zentralisator von F ein maximaler Zentralisator von G, also $F \in \mathfrak{D}$. F/Z ist eine nilpotente Gruppe mit nichttrivialer Partition, also eine Primärgruppe ([2], (2.4), S. 338). Damit ist G vom Typ 3′).

Ist im Fall *c*) V/Z die Kleinsche Vierergruppe von G/Z, so ist

V/Z in keiner zyklischen Untergruppe von G/Z, also in keiner Komponente von σ enthalten. Da jede abelsche Untergruppe von G in einem maximalen Zentralisator enthalten sein muß, kann also V nicht abelsch sein. Damit ist G von Typ 4).

Sei schließlich G vom Typ d). Ist G/Z nilpotent, so ist G/Z nach dem bereits zitierten Lemma von Baer eine Primärgruppe, also G vom Typ 5'). Sei also G nicht nilpotent. Da N nilpotent ist, ist $N=Q \times P_1$ mit einer p'-Untergruppe Q und einer p-Sylowgruppe P_1. Da $|G:N|=p$ ist, ist $G=QP$ und $|P:P_1|=p$, wenn P eine p-Sylowgruppe von G ist. Da N nilpotent ist, ist $P_1 \leq C_P(x)$ für alle $x \in Q$. Ist $x \in Q \backslash Z(Q)$, so ist offenbar $x \notin Z(G)$, also nach Lemma 5.7 $C_G(x) \leq N$. Insbesondere ist $C_P(x)=P \cap C_G(x)=P_1$. Ist $x \in Z(P)$, so ist $C_G(x) \nleq N$, also entweder $x \in Z$ oder $C_G(x) \cap N=Z$. Im letzteren Fall folgte $P_1 \leq C_G(x) \cap N=Z$ und somit $(|N:Z|, p)=1$. Da jedes Element in $G/Z \backslash N/Z$ die Ordnung p hat, wäre also G/Z eine Frobeniusgruppe und G wie bereits gezeigt vom Typ 2') oder 3'). Ist also G nicht vom Typ 2') oder 3'), so muß $Z(P) \leq Z$, also $Z(P) \leq N \cap P=P_1$ sein. Ist schließlich $x \in P_1 \backslash Z(P)$, so ist $x \in N \backslash Z$, also $C_G(x) \leq N$, i.e. $C_P(x) \leq P_1$. Da N ein maximaler Zentralisator ist, ist $Z(Q) \times Z(P_1)=Z(N) \neq Z$, andererseits $Z=C_Q(P) \times Z(P)$ (wegen $C_Q(P) \leq Z(Q)$ und $Z(P) \leq P_1 \leq C_P(Q)$) und damit entweder $Z(P_1) \neq$ $\neq Z(P)$ oder $Z(Q) \neq C_Q(P)$. Damit ist G vom Typ 1') und die zweite Aussage des Satzes bewiesen.

Sei nun G eine auflösbare $\mathfrak{M}$-Gruppe. Auch hier bilden die C_i/Z, wo C_i die maximalen Zentralisatoren von G durchläuft, eine normale Partition σ von G/Z, wobei zusätzlich die C_i abelsch sind. G hat also wieder eine der Eigenschaften a) bis d) bezüglich dieser Partition σ.

Im Fall a) ist wie eben $G=A \times P$, $A \leq Z$ und P eine p-Gruppe in $\mathfrak{M}$, also G vom Typ 5).

Im Fall b) sei wieder K/Z eine normalisatorgleiche Komponente von σ. Dann ist K als maximaler Zentralisator abelsch. Ist F/Z der Frobeniuskern von G/Z, so ist F/Z ein σ-zulässiger Normalteiler von G/Z. Ist F/Z eine Komponente, so ist F abelsch und G vom Typ 2); ist F/Z keine Komponente, so ist wie immer $Z(F)=Z$ und jeder maximale Zentralisator von F ein maximaler Zentralisator von G, also $F \in \mathfrak{M}$ und F/Z eine p-Gruppe, d.h. G vom Typ 3).

Fall c) ist erledigt, da gezeigt wurde, daß schon eine $\mathfrak{D}$-Gruppe hier vom Typ 4) ist.

Im Fall d) ist N abelsch, also G vom Typ 1).

Wir haben nun umgekehrt zu zeigen, daß jede Gruppe vom Typ 1) bis 5) eine $\mathfrak{M}$-Gruppe und jede Gruppe vom Typ 1') bis 5') eine $\mathfrak{D}$-Gruppe ist.

Sei zunächst G vom Typ 1), sei M ein von N verschiedener maximaler Zentralisator von G und sei A eine maximale abelsche Untergruppe von M. Dann ist $Z(G) < Z(M) \leq A \leq M$. Da $|G:N| = p$ ist, ist $NA = G$, also $N \cap A \leq Z(G)$ und damit $|A:Z(G)| = p$. Es folgt $A = Z(M)$ und damit $M = A$. Es ist also $G \in \mathfrak{M}$, und die maximalen Zentralisatoren von G sind N und die $|N:Z(G)|$ maximalen abelschen Untergruppen M mit $|M:Z(G)| = p$. Es ist also $G \in \mathfrak{M}(k)$ mit $k = |N:Z(G)| + 1$.

Ist G vom Typ 2'), so ist G nach Lemma 5.5 in $\mathfrak{D}(k)$ mit $k = |F:Z(G)| + 1$, wobei F und die Urbilder der Komplemente von $F/Z(G)$ die maximalen Zentralisatoren von G sind. Sind die abelsch, d.h. ist G vom Typ 2), so ist daher $G \in \mathfrak{M}(|F:Z(G)| + 1)$.

Ist G vom Typ 3'), so ist G nach Lemma 5.5 in $\mathfrak{D}(k)$ mit $k = |F:Z(G)| + m$, wenn $F \in \mathfrak{D}(m)$ ist, und die maximalen Zentralisatoren von G sind die von F sowie die Urbilder der Komplemente. Ist also $F \in \mathfrak{M}(m)$ und sind diese Urbilder abelsch, d.h. ist G vom Typ 3), so ist also $G \in \mathfrak{M}(|F:Z(G)| + m)$.

Sei nun G vom Typ 4) und sei σ die Partition von G/Z, die aus den maximalen zyklischen Untergruppen von G/Z besteht. Ist U/Z eine Komponente von σ, so ist also U abelsch. Ist nun M ein maximaler Zentralisator von G, so ist $M = C_G(x)$ mit einem $x \in G \backslash Z$. Ist U/Z die Komponente von σ, die xZ enthält, so ist $x \in U$, also $U \leq C_G(x) = M$. Da V nicht abelsch und $|V:Z| = 4$ ist, ist $Z(V) = Z$. Ist also S/Z eine 2-Sylowgruppe von G/Z, so ist $Z(S)/Z \leq Z(S/Z)$, also $Z(S) \leq V$ und damit auch $Z(S) = Z$. Da $Z(M) \neq Z$ ist, muß also $|M:Z| \leq 6$ sein. Da $M/Z(M)$ nicht zyklisch sein kann, ist also M abelsch. Wäre $M \neq U$, so müßte M/Z elementarabelsch der Ordnung 4 sein. Wäre also S/Z eine M enthaltende 2-Sylowgruppe von G/Z und D/Z die zyklische Untergruppe der Ordnung 4 in S/Z, so wäre D abelsch, also $Z \neq D \cap M \leq Z(S)$, was nicht geht. Es ist also $M = U$; d.h. die maximalen Zentralisatoren von G sind die U, für die U/Z eine Komponente von σ ist. Da σ dreizehn Komponenten besitzt, ist also $G \in \mathfrak{M}(13)$.

Ist G vom Typ 5) bzw. 5'), so ist wegen Lemma 2.5 G eine

$\mathfrak{M}\mathfrak{L}$- bzw. eine $\mathfrak{D}$-Gruppe.

Es bleibt der Fall zu betrachten, daß G vom Typ 1') ist. Hier ist $Z=C_Q(P)\times Z(P)$, da $C_Q(P)\leq Z(Q)$ (wegen $P_1=C_P(x)$ für alle $x\in Q\backslash Z(Q)$) und $Z(P)\leq P_1\leq C_P(Q)$ ist. Da G ein nilpotentes p'-Komplement Q besitzt, ist $N_{G/Z}(PZ/Z)=N_G(PZ)/Z$ nilpotent.

Damit ist auch $N_G(PZ)$ nilpotent, also $Q\cap N_G(PZ)=C_Q(P)\leq Z$. Damit ist $N_G(PZ)/Z$ eine p-Gruppe, also $N_G(PZ)=PZ$ und somit G/P_1Z eine Frobeniusgruppe mit Kern N/P_1Z, wenn $N=QP_1$ gesetzt ist. Wir wollen zeigen, daß $C_G(x)\leq N$ für alle $x\in N\backslash Z$ ist. Ist $x\notin P_1Z$, so ist $1\neq xP_1Z\in N/P_1Z$, also $C_G(x)\leq N$, da N/P_1Z Frobeniuskern in G/P_1Z ist. Sei also $x\in P_1Z\backslash Z$. Dann ist $x=x_1z_1$ mit $x_1\in P_1$, $z_1\in Z$ und $C_G(x)=$ $=C_G(x_1)$; wir können also $x\in P_1$ annehmen. Wäre $C_G(x)\nleq N$, so existierte ein $y\in G\backslash N$ mit $y\in C_G(x)$. Da G/P_1Z eine Frobeniusgruppe ist, wäre also yP_1Z in einem Komplement zu N/P_1Z enthalten, d.h. $y\in P_0Z$, mit einer p-Sylowgruppe P_0 von G. Es ist $y=y_1z_2$ mit $y_1\in P_0$, $z_2\in Z$. Da $z_2\in N$ und $y\notin N$ gilt, ist $y_1\notin N$, also $y_1\in P_0\backslash P_1$. Ist $g\in G$ mit $y_1^g\in P$, so ist $y_1^g\in P\backslash P_1$ und $y_1^g\in C_G(x^g)$, also $C_P(x^g)\nleq P_1$. Da aber $C_P(h)\leq P_1$ für alle $h\in P_1\backslash Z(P)$ gilt und $x^g\in P_1$ ist, ist also $x^g\in Z(P)$, d.h. schließlich $x=x^g\in Z$, was nicht der Fall ist. Es ist also $C_G(x)\leq N$ für alle $x\in N\backslash Z$. Da

$$Z(N)=Z(Q)\times Z(P_1)\neq C_Q(P)\times Z(P)=Z$$

ist, ist N ein maximaler Zentralisator von G. Ist M ein von N verschiedener maximaler Zentralisator von G, so ist $M=C_G(x)$ mit einem $x\in G$. Da $C_G(y)\leq N$ für alle $y\in N$ ist, ist $x\notin N$. Ist $y\in M\cap N$, so ist $x\in C_G(y)$, also $C_G(y)\nleq N$, d.h. $y\in Z$. Damit ist $M\cap N=Z$ und folglich $|M:Z|=p$. Es ist also $G\in\mathfrak{D}$. Da jedes nicht in N gelegene Element von G in einem von N verschiedenen maximalen Zentralisator von G liegt, haben alle Elemente in $G/Z\backslash N/Z$ die Ordnung p, und es folgt $G\in\mathfrak{D}(|N:Z|+1)$. Damit ist Satz 5.12 vollständig bewiesen.

Wir sind nun in der Lage, die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Ito über $\mathfrak{M}\mathfrak{L}$-Gruppen (s. [8], Thm. 3, S. 27) zu beweisen.

Satz 5.13. *Genau dann ist G eine $\mathfrak{D}$-Gruppe mit $Z(G)=1$, wenn G entweder eine Frobeniusgruppe ist oder wenn gilt $G\simeq SL(2, 2^n)$, $n\geq 2$, oder $G\simeq Sz(2^n)$, $n\geq 3$.*

Beweis. Ist G eine Frobeniusgruppe oder $G\simeq SL(2, 2^n)$ oder

$G \simeq Sz(2^n)$, so ist G nach Lemma 5.5, 5.3 bzw. 5.6 eine $\mathfrak{D}$-Gruppe und außerdem natürlich $Z(G)=1$.

Sei also umgekehrt G eine $\mathfrak{D}$-Gruppe mit $Z(G)=1$. Ist G nicht auflösbar, so ist G nach Satz 5.9 von der gewünschten Form. Ist G auflösbar, so ist G nach Satz 5.12 von einem der Typen 1′) bis 5′). Wegen $Z(G)=1$ ist G nicht vom Typ 1′), 5′) oder 4). Ist G vom Typ 2′) oder 3′), so ist G eine Frobeniusgruppe, was wir zeigen wollen. Damit ist Satz 5.13 bewiesen.

Über p-Gruppen in $\mathfrak{D}$ läßt sich verhältnismäßig wenig sagen. Mit Hilfe von Satz 4.4 erhalten wir aber

SATZ 5.14. *Sei G eine p-Gruppe und* $G \in \mathfrak{D}(k)$ mit $k \leq p^n$. *Dann ist* $c(G) \leq n$, *wenn* $c(G)$ *die Klasse von G ist.*

BEWEIS. Nach Lemma 5.7 bilden die $C_i/Z(G)$ eine normale Partition σ von $G/Z(G)$, wenn die C_i die maximalen Zentralisatoren von G sind. Nach einem Satz von *P.* Hall (s. [7], Hauptsatz 2.11, S. 265) ist $G' \leq C_G(Z_2(G))$. Da G nicht abelsch ist, ist $Z_2(G) \neq Z(G)$, also $C_G(Z_2(G))$ in einem maximalen Zentralisator N von G enthalten. Damit ist $N/Z(G) \lhd G/Z(G)$, σ-zulässig und $(G/Z(G))' \leq N/Z(G)$, ferner natürlich $Z(G) \neq N \neq G$. Satz 4.4 ergibt wegen $k = |\sigma| \leq p^n$ also

$$c(G/Z(G)) \leq n-1,$$

d.h. $c(G) \leq n$.

BEMERKUNG. Daß sich die Abschätzung für $c(G)$ selbst für $\mathfrak{M}$-Gruppen nicht verbessern läßt, zeigt Beispiel 4.5. Ist nämlich G eine Diedergruppe der Ordnung 2^{n+2}, $n \geq 1$, so ist $G \in \mathfrak{M}$ (da G einen abelschen Normalteiler vom Index 2 besitzt), ferner $G/Z(G)$ eine Diedergruppe der Ordnung 2^{n+1}, und die von den maximalen Zentralisatoren von G in $G/Z(G)$ induzierte Partition ist genau die in Beispiel 4.5 beschriebene. Es ist also $G \in \mathfrak{M}(2^n+1)$ und $c(G)=n+1$.

Ist $G \in \mathfrak{M}$, so läßt sich etwas mehr sagen.

SATZ 5.15. *Ist G eine p-Gruppe und* $G \in \mathfrak{M}$, *so ist G metabelsch. Ist* $p=2$ *und* $c(G)>2$, *so existiert ein abelscher Normalteiler N vom*

Index 2 in G. Ist $p \neq 2$ und $c(G) > p+1$, so existiert ein abelscher Normalteiler N von G mit elementarabelscher Faktorgruppe der Ordnung $|G:N| < p^{p-1}$.

BEWEIS. Sei G eine p-Gruppe und $G \in \mathfrak{M}$. Ist $c(G)=2$, so ist nichts zu zeigen; sei also $c(G)>2$. Nach Lemma 5.7 bilden die $C_i/Z(G)$ eine normale Partition σ von $G/Z(G)$, C_i die maximalen Zentralisatoren von G. Sei $N=C_G(Z_2(G))$. Dann ist $G' \leq N$, und wegen $c(G)>2$ ist $N \neq Z(G)$; da G eine $\mathfrak{M}$-Gruppe ist, ist N ein maximaler Zentralisator von G. Insbesondere ist N abelsch; da $G' \leq N$ ist, ist also G metabelsch.

Wir betrachten nun $\overline{G}=G/Z(G)$ und bezeichnen wieder $UZ(G)/Z(G)$ mit $\overline{U}$ für jede Untergruppe U von G. Da $Z(G) < G' \leq N$ ist, ist $N \leq C_G(G') \neq G$, also $N=C_G(G')$ da ja N ein maximaler Zentralisator von G ist. Da $Z_2(G) \leq C_G(G')$ ist, ist also $Z(\overline{G}) \leq \overline{N}$. Ist somit $x \in \overline{G}$ ein Element der Ordnung $\neq p$, so ist x nach Lemma 2.1 aus [2] in $\overline{N}$ enthalten. Damit enthält $\overline{N}$ die von den Elementen der Ordnung $\neq p$ erzeugte Untergruppe $H_p(\overline{G})$. Ist $p=2$ und $c(G)>2$, so ist $\operatorname{Exp}(\overline{G}) \neq 2$, also $H_2(\overline{G}) \neq 1$ und damit bekanntlich $|\overline{G}:H_2(\overline{G})| \leq 2$ ([6], Lemma 4, S. 664). Da $H_2(\overline{G}) \leq \overline{N} \neq \overline{G}$ ist, ist also $|G:N|=2$, was zu zeigen war.

Sei nun $p \neq 2$ und $c(G)>p+1$. Wäre $\operatorname{Exp}(\overline{N})=p$, so wäre $\operatorname{Exp}(\overline{G})=p$, also ([10], Satz 3, S. 10) $c(\overline{G}) \leq p$ und damit $c(G) \leq p+1$, was nicht der Fall ist. Es ist also $\operatorname{Exp}(\overline{N}) \neq p$ und damit, wieder wegen Lemma 2.1 aus [2], $C_{\overline{G}}(\overline{N})=\overline{N}$. Das folgende Lemma, dessen Beweis aus einer Modifikation von Argumenten in [4] besteht, ergibt nun $|\overline{G}:\overline{N}| < p^{p-1}$.

LEMMA 5.16. *Sei H eine p-Gruppe, $p>2$, N ein (abelscher) Normalteiler von H mit $C_H(N)=N$, H/N abelsch der Ordnung $\geq p^{p-1}$ und $x^p=1$ für alle $x \in H \backslash N$. Dann ist $c(H) \leq p$.*

BEWEIS. Sei A die (multiplikative) Untergruppe des Endomorphismenringes E von N, die aus den Automorphismen von N besteht, die durch Konjugation von Elementen von G induziert werden. Sei R der Unterring von E, der von A erzeugt wird. Da $H/C_H(N)=H/N$ abelsch ist, ist R ein kommutativer Ring mit 1. Wir zeigen zunächst

$$(5.16.1)\quad \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i = 0 \text{ für alle } \sigma \in A \text{ mit } \sigma \neq 1.$$

Ist nämlich $1 \neq \sigma \in A$, so existiert ein $s \in H \backslash N$ mit $x^\sigma = s^{-1}xs$ für alle $x \in N$. Dann ist $x^{\sigma^i} = s^{-i}xs^i$ und somit

$$x^{\sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i} = \prod_{i=0}^{p-1} s^{-i}xs^i = (xs^{-1})^p s^p = 1,$$

da xs^{-1} und s in $H \backslash N$ enthalten sind. Damit ist (5.16.1) gezeigt.

Wir beweisen nun für $r=0, \ldots, p-1$ die folgende Aussage

(A_r): Für alle $\sigma_{p-r}, \ldots, \sigma_{p-1} \in A$ und für alle $\sigma \in A$ mit $\sigma \prod_{j \in M} \sigma_j \neq 1$ für alle Teilmengen M von $\{p-r, \ldots, p-1\}$ gilt:

$$\sum_{i=r}^{p-1} \sigma^{i-r} \prod_{j=p-r}^{p-1} (\sigma_j^{j+i+1-p} - 1) = 0.$$

(A_0) ist genau (5.16.1). Sei also (A_r) für ein r mit $0 \leq r < p-1$ richtig, seien $\sigma_{p-r-1}, \ldots, \sigma_{p-1} \in A$ und sei $\sigma \in A$ mit $\sigma \prod_{j \in M} \sigma_j \neq 1$ für alle Teilmengen M von $\{p-r-1, \ldots, p-1\}$. Sei $\tau = \sigma \cdot \sigma_{p-r-1}$. Dann ist $\tau \prod_{j \in M'} \sigma_j \neq 1$ für alle Teilmengen M' von $\{p-r, \ldots, p-1\}$. Wir wenden also (A_r) auf τ und $\sigma_{p-r}, \ldots, \sigma_{p-1}$, sowie σ und $\sigma_{p-r}, \ldots, \sigma_{p-1}$ an und erhalten durch Subtraktion:

$$\sum_{i=r}^{p-1} \sigma^{i-r} (\sigma_{p-r-1}^{i-r} - 1) \prod_{j=p-r}^{p-1} (\sigma_j^{j+i+1-p} - 1) = 0.$$

Für $i=r$ ist $\sigma_{p-r-1}^{i-r} - 1 = 0$; die Summe beginnt also erst bei $r+1$. Ferner ist für $j=p-r-1$ offenbar $\sigma_{p-r-1}^{i-r} = \sigma_j^{j+i+1-p}$.

Wir erhalten also

$$\sum_{i=r+1}^{p-1} \sigma^{i-r} \prod_{j=p-r-1}^{p-1} (\sigma_j^{j+i+1-p} - 1) = 0.$$

Multiplikation mit σ^{-1} ergibt die gewünschte Aussage (A_{r+1}).

Für $r=p-1$ erhalten wir

(5.16.2) Sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1} \in A$ und existiert ein $\sigma \in A$ mit $\sigma \prod_{j \in M} \sigma_j \neq 1$ für alle Teilmengen M von $\{1, \ldots, p-1\}$, so ist $\prod_{j=1}^{p-1} (\sigma_j{}^j - 1) = 0$.

Da $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ höchstens $p-1$ Elemente sind, gibt es höchstens $2^{p-1} < p^{p-1}$ Produkte $\prod_{j \in M} \sigma_j$. Es gibt also wegen $|A| \geq p^{p-1}$ mindestens ein $\sigma \in A$, für das $\sigma^{-1} \neq \prod_{j \in M} \sigma_j$ für alle Teilmengen M von $\{1, \ldots, p-1\}$ ist. Es ist daher $\prod_{j=1}^{p-1} (\sigma_j{}^j - 1) = 0$ für alle $\sigma_j \in A$; da sich jedes σ_k als $\sigma_j{}^j$ schreiben läßt, haben wir schließlich:

(5.16.3) Es ist $\prod_{j=1}^{p-1} (\sigma_j - 1) = 0$ für alle $\sigma_j \in A$.

Das ergibt $(x, s_1, \ldots, s_{p-1}) = 1$ für alle $s_1, \ldots, s_{p-1} \in H$ und $x \in N$. Da $H' \leq N$ ist, folgt $(x, y, s_1, \ldots, s_{p-1}) = 1$ für alle $x, y, s_i \in H$, also $c(H) \leq p$. Das war zu zeigen.

Mit Hilfe von Satz 5.15 können wir eine Frage von Ito ([8], S. 22) über Gruppen, deren von G verschiedene Elementzentralisatoren alle die gleiche Ordnung haben, für $\mathfrak{M}$-Gruppen beantworten.

KOROLLAR 5.17. *Ist G eine $\mathfrak{M}$-Gruppe und ist $|M_1| = |M_2|$ für je zwei maximale Zentralisatoren M_1 und M_2 von G, so ist $G = A \times P$ mit einer abelschen Gruppe A und einer p-Gruppe P der Klasse $\leq p+1$.*

BEWEIS. Daß $G = A \times P$ mit einer abelschen Gruppe A und einer p-Gruppe P ist, folgt aus ([8], Thm. 1, S. 21) oder unseren Sätzen 5.9 und 5.12. Natürlich können wir $A = 1$ annehmen. Wäre $c(G) > p+1$, so existierte ein abelscher Normalteiler N von G mit $|G : N| < p^{p-1}$ und $G' \leq N$. Ist K ein N enthaltender und L ein weiterer maximaler Zentralisator von G, so ist also $|G : K| < p^{p-1}$ und $|K : Z(G)| \leq |G : L| = |G : K| < p^{p-1}$. Damit ist $|G' : Z(G)| < p^{p-1}$, also $c(G) < p+1$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, womit das Korollar bewiesen ist.

Zum Schluß wollen wir noch durch ein Beispiel zeigen, daß der Zentralisatorverband die Struktur einer Gruppe in recht geringem Maße festlegt. Nach Lemma 5.3 ist $SL(2, p^n) \in \mathfrak{M}(p^{2n} + p^n + 1)$. Ist nun G

eine Diedergruppe der Ordnung $2m$, so enthält G einen zyklischen Normalteiler N vom Index 2, ist also nach Satz 5.12 in $\mathfrak{M}(k)$ mit $k=|N:Z(G)|+1$. Ist m ungerade, so ist $Z(G)=1$, also $G\in\mathfrak{M}(m+1)$; ist m gerade, so ist $|Z(G)|=2$, also $G\in\mathfrak{M}\left(\frac{m}{2}+1\right)$. Ist daher $m=2(p^{2n}+p^n)$, so ist $G\in\mathfrak{M}(p^{2n}+p^n+1)$.

Wir sehen also, daß eine Diedergruppe der Ordnung $4(p^{2n}+p^n)$ denselben Zentralisatorverband hat wie $SL(2, p^n)$. Insbesondere können also eine (nichtabelsche) einfache ($p=2$) und eine metazyklische Gruppe gleichen Zentralisatorverband haben.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ALPERIN, J. L. und GORENSTEIN, D.: *The multiplicators of certain simple groups*, Proc. Amer. Math. Soc. *17* (1966), 515-519.

[2] BAER, R.: *Partitionen endlicher Gruppen*, Math. Zeitschr. *75* (1961), 333-372.

[3] BAER, R.: *Einfache Partitionen endlicher Gruppen mit nichttrivialer Fittingscher Untergruppe*, Arch. Math. *12* (1961), 81-89.

[4] GUPTA, N. D., NEWMAN, M. F. und TOBIN, S. J.: *On metabelian groups of prime-power exponent*, Proc. Roy. Soc. *A 302* (1968), 237-242.

[5] HERMES, H.: *Einführung in die Verbandstheorie*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg - New York 1967.

[6] HUGHES, D. R.: *Partial difference sets*, Amer. J. Math. *78* (1956), 650-674.

[7] HUPPERT, B.: *Endliche Gruppen I*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1967.

[8] ITO, N.: *On finite groups with given conjugate types I*, Nagoya Math. J. *6* (1953), 17-28.

[9] LÜNEBURG, H.: *Die Suzukigruppen und ihre Geometrien*, Lecture Notes, Springer Verlag 1965.

[10] MEIER-WUNDERLI, H.: *Metabelsche Gruppen*, Comm. Math. Helv. *25* (1951), 1-10.

[11] SCHUR, I.: *Untersuchungen über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Math. *132* (1907), 85-137.

[12] SCHUR, I.: *Über die Darstellungen der symmetrischen und alternierenden Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Math. *139* (1911), 155-250.

[13] SUZUKI, M.: *On a class of doubly transitive groups*, Annals Math. *75* (1962), 105-145.

[14] SUZUKI, M.: *On a finite group with a partition,* Arch. Math. *12* (1961), 241-254.

[15] VASSILIOU, P.: *Eine Bemerkung über die von dem Zentralisator bestimmte Abbildung,* Prakt. Akad. Athēnōn *42* (1967), 286-289.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 febbraio 1970.