RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI RITA

Gruppi finiti di trasformazioni cremoniane intere

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 65-83

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__65_0>

GRUPPI FINITI DI TRASFORMAZIONI CREMONIANE INTERE

GIOVANNI RITA *)

ZUSAMMENFASSUNG - Es sei Γ die Gruppe aller Ganzen Cremona Transformationen einer Ebene in sich. Die endliche Untergruppen von Γ werden hier bestimmt und voll charakterisiert: sie fallen mit den Untergruppen von Γ, die zu endlichen Gruppen von Affinitäten koniugiert sind, zusammen.

Introduzione.

Per trasformazione cremoniana intera tra due piani affini $\mathfrak{A}$ ed $\mathfrak{A}'$ su un campo K si intende una trasformazione birazionale biregolare in ogni punto di $\mathfrak{A}$ e di $\mathfrak{A}'$. Tali trasformazioni, quando K è il corpo complesso, risultano essere caso particolare delle cosiddette trasformazioni di Möbius rappresentabili con equazioni del tipo

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

con f, g funzioni differenziabili in ogni punto del loro comune campo di definizione soddisfacenti l'ulteriore condizione

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \text{costante } (\neq 0).$$

Quando i due piani coincidono le trasformazioni cremoniane intere di $\mathfrak{A}$ in sè costituiscono un gruppo Γ.

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Università, Padova.
Lavoro eseguito nell'ambito dei contratti di ricerca matematica del C.N.R.

Lo studio di Γ può dirsi iniziato da B. Segre in [2], che ne determinò un sistema di generatori costituito dalle affinità e dalle cosiddette trasformazioni di De Jonquieres, rappresentabili con equazioni del tipo

$$\begin{cases} x' = x + f(y) \\ y' = y \end{cases}$$

con $f(y) \in K[y]$.

Nella presente nota vengono studiati i gruppi finiti di trasformazioni cremoniane intere e precisamente viene provato che essi risultano tutti coniugati in Γ di gruppi finiti di affinità.

Il risultato viene stabilito sfruttando una estensione opportuna del sistema dei generatori introdotti da B. Segre. Una tale estensione può avere anche interesse di per sè dal momento che consente una trattazione non più legata a particolari sistemi di riferimento.

La nota si conclude con una caratterizzazione dei gruppi abeliani finiti di trasformazioni intere.

1. Generalità.

Sia $\mathfrak{A}$ un piano affine su un campo K di caratteristica zero, e sia Γ il gruppo delle trasformazioni cremoniane intere di $\mathfrak{A}$ in sè. È stato dimostrato da B. Segre [2] che il gruppo Γ ammette quali generatori le affinità e le cosiddette trasformazioni di De Jonquieres, particolari trasformazioni intere che ammettono un fascio di rette unite. Per gli scopi del presente lavoro, conviene considerare un sistema più ampio di generatori, che chiameremo « trasformazioni elementari » e che sono così definiti:

DEFINIZIONE. *Fissato comunque un punto improprio razionale su K, P_∞, l'insieme delle trasformazioni di Γ che mutano in sè il fascio delle rette di centro il punto P_∞ è un sottogruppo di Γ che indicheremo con $E(P_\infty)$ e che chiameremo gruppo elementare associato a P_∞. Le trasformazioni di $E(P_\infty)$ le diremo trasformazioni elementari.*

Il punto improprio P_∞ è il punto fondamentale comune a tutte le trasformazioni del gruppo $E(P_\infty)$ che non siano affinità.

Rientrano tra le trasformazioni elementari le affinità che ammettono una direzione unita razionale.

In virtù del teorema di fattorizzazione di B. Segre Γ risulta generato da $E(P_\infty)$, al variare di P_∞ su r_∞.

Risulta inoltre che

$$E^* = \bigcap E(P_\infty)$$

è il sottogruppo del gruppo delle affinità generato dalle omotetie e dalle traslazioni.

Due sottogruppi $E(P_\infty)$ ed $E(P'_\infty)$ con $P'_\infty \neq P_\infty$ sono isomorfi perchè coniugati rispetto agli automorfismi interni di Γ definiti dalle affinità involutorie che fanno corrispondere P'_∞ a P_∞.

È da notare che una trasformazione elementare che ammette due fasci uniti di rette è necessariamente un'affinità.

2. **Proprietà del gruppo** $E(P_\infty)$.

Sia $E(P_\infty)$ il gruppo elementare associato a P_∞ e sia $\mathfrak{F}(P_\infty)$ il fascio delle rette passanti per P_∞. Associando a ciascun elemento di $E(P_\infty)$ l'affinità indotta in $\mathfrak{F}(P_\infty)$, pensato quale spazio affine, resta definito un epimorfismo

$$\omega_1 : E(P_\infty) \to GLA_1 ;$$

ciascuna trasformazione $S \in \ker \omega_1 = G(P_\infty)$ induce su ciascuna retta r di $\mathfrak{F}(P_\infty)$ un'affinità, $a(r)$, che si fattorizza nel prodotto di un'omotetia $\Omega(r)$ per una traslazione $T(r)$. Il rapporto dell'omotetia è però indipendente dalla retta considerata. Invero la corrispondenza S induce una corrispondenza algebrica tra lo spazio affine $\mathfrak{F}(P_\infty)$ ed il campo K munito della sua struttura naturale di spazio affine, che deve risultare priva di poli e priva di zeri a distanza finita dal momento che S è biregolare a distanza finita. Associando a ciascuna $S \in G(P_\infty)$ il rapporto dell'omotetia Ω, resta definito un epimorfismo

$$\omega_2 : G(P_\infty) \to K^*,$$

dove K^* denota il gruppo moltiplicativo del campo K.

Detto $J(P_\infty)$ il nucleo di ω_2 e denotando con $A(P_\infty)$ il sottogruppo delle affinità che lasciano unito il fascio delle rette per P_∞, risulta

$$E(P_\infty) = J(P_\infty) \cdot A(P_\infty). \tag{1}$$

Invero le restrizioni di ω_1 ad $A(P_\infty)$ e di ω_2 ad

$$A'(P_\infty) = G(P_\infty) \cap A(P)$$

risultano essere degli epimorfismi rispettivamente su GLA_1 e su K^* quindi si può subito scrivere:

$$E(P_\infty) = G(P_\infty) \cdot A(P_\infty),$$

$$G(P_\infty) = J(P_\infty) \cdot A'(P_\infty)$$

dalle quali segue la (1).

Sia ora V_1 lo spazio vettoriale soggiacente alle rette di $\mathfrak{F}(P_\infty)$, in V_1 si fissi una base $\{\overrightarrow{e}\}$, ed in $\mathfrak{F}(P_\infty)$ un riferimento affine. Una data $j \in J(P_\infty)$ induce su ciascuna retta r di $\mathfrak{F}(P_\infty)$ una traslazione di vettore $\overrightarrow{v} = \tau \overrightarrow{e}$, con $\tau = f(\rho)$ ed $f(t) \in K[t]$, cosicchè il gruppo $J(P_\infty)$ è isomorfo al gruppo additivo dei polinomi in una indeterminata a coeficienti su K. Se P e P' sono due punti corrispondenti in una $j \in J(P_\infty)$, detta O l'origine di un riferimento affine del piano $\mathfrak{A}$, risulta:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{f(\rho) e},$$

dove ρ è l'ascissa della retta per P rispetto al riferimento fissato in $\mathfrak{F}(P_\infty)$.

Più in generale, considerata una trasformazione $S \in E(P_\infty)$ e posto

$$S = jA$$

per due punti corrispondenti nella S, P e P', risulta

$$\overrightarrow{O'P'} = \lambda(\overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{f(\alpha\rho + \beta) e}, \tag{2}$$

in cui λ è la trasformazione lineare associata all'affinità A dello spazio vettoriale soggiacente il piano e $\alpha\rho + \beta$ è l'ascissa della retta r' corrispondente della retta r nell'affinità indotta dalla A su $\mathfrak{F}(P_\infty)$.

3. Forma ridotta di una trasformazione cremoniana intera.

A norma del teorema di fattorizzazione ogni trasformazione cremoniana intera si può rappresentare con una espressione del tipo:

$$T = S_1 S_2 \ldots S_n \tag{3}$$

con S_i trasformazioni elementari.

La rappresentazione (3) si dirà ridotta quando:

a) trasformazioni contigue che siano di ordine $\geqslant 2$ hanno direzioni fondamentali distinte;

b) ogni affinità che compare nella rappresentazione ha le direzioni unite distinte da quelle dei fattori ad essa contigui; questi debbono inoltre avere ordine $\geqslant 2$ e lo stesso punto fondamentale.

La possibilità di scrivere una data trasformazione intera in forma ridotta si fonda sulle seguenti osservazioni:

I - Se S_1 ed S_2 sono elementari di ordine $\geqslant 2$, con direzioni fondamentali distinte, la trasformazione $T = S_1 S_2$ è una trasformazione non più elementare il cui punto fondamentale coincide con quello di S_1 [1]).

II - La trasformazione $T = SA$, con S elementare e A affinità, è elementare quando la direzione fondamentale di S è unita per la A. Analogamente per la trasformazione $T' = AS'$.

Un'assegnata trasformazione intera ammette in generale più di una forma ridotta; ciò che invece risulta univocamente determinato è il numero dei fattori elementari di ordine $\geqslant 2$ che entrano in ciascuna delle forme ridotte di una data trasformazione T.

Chiameremo *tipo* di una forma ridotta di una data trasformazione il numero dei fattori di ordine $\geqslant 2$ che in essa compaiono. Vale cioè la:

---

[1]) Date in generale due trasformazioni cremoniane intere T_1 e T_2 con punti fondamentali distinti, il punto fondamentale del prodotto $T_2 T_1$ coincide con quello di T_1; ciò si verifica facilmente assumendo i punti fondamentali di T_1 e T_2 coincidenti con i punti impropri degli assi del riferimento. L'osservazione segue poi per assurdo.

Proposizione 1. *Tutte le possibili forme ridotte di una data trasformazione T hanno lo stesso tipo, che verrà chiamato tipo della trasformazione stessa. Un'affinitià ha tipo zero.*

Il risultato su enunciato si basa sul seguente

Lemma. *Se T è una trasformazione intera e*

$$S_1S_2 \ldots S_n , \qquad S'_1S'_2 \ldots S'_m$$

sono due rappresentazioni ridotte di T, le trasformazioni S_n ed S'_m hanno lo stesso ordine.

Dimostrazione. Occorre distinguere due casi a seconda che S_n ed S'_m siano entrambe di ordine $\geqslant 2$ oppure una delle due sia un'affinità.

Primo caso. Intanto è ovvio (cfr. nota a piè di pag. 5) che S_n ed S'_m hanno lo stesso punto fondamentale, posto $\bar{S}=S'_mS_n^{-1}$, risulta:

$$S_1 \ldots S_{n-1}=S'_1 \ldots S'_{m-1}\bar{S}$$

e i due membri sono delle forme ridotte.

Se S_{n-1} è di ordine $\geqslant 2$, essa deve avere lo stesso punto fondamentale di $\bar{S}$, quindi di S_n ; se invece S_{n-1} è un'affinità, S_{n-2} ed S_n hanno lo stesso punto fondamentale coincidente con quello di $\bar{S}$ e che, per l'uguaglianza precedente, è una direzione unita di S_{n-1} .

Entrambe le conclusioni contraddicono l'ipotesi che la fattorizzazione $S_1 \ldots S_n$ sia ridotta, dunque $\bar{S}$ è un'affinità

Secondo caso. Sia, ad esempio, $S_n=A$ un'affinità, si ha l'uguaglianza:

$$S_1S_2 \ldots S_{n-1}A=S'_1S'_2 \ldots S'_m$$

con S'_m di ordine $\geqslant 2$, entrambi i membri essendo forme ridotte. Se S_{n-1} ed S'_m hanno direzioni fondamentali distinte, risulta

$$S_1 \ldots S_{n-1}AS'^{-1}_m=S'_1 \ldots S'_{m-1}$$

cioè ponendo in forma ridotta il primo membro:

$$S_1 \ \dots \ S_{n-1}\overline{S}_{n-1}\overline{S}_m = S'_1 \ \dots \ S'_{m-1}.$$

Da questa, tenendo conto che $\overline{S}_m$ ed S'_m hanno lo stesso punto fondamentale, segue che S'_{m-1} è necessariamente un'affinità; dalla coincidenza dei punti fondamentali dei due membri segue che S'_{m-1} ha per direzione unita la direzione fondamentale di S'_m, in contraddizione col fatto che la seconda fattorizzazione di T sia ridotta. S_{n-1} ed S'_m hanno dunque lo stesso punto fondamentale, che è allora una direzione unita per A in contraddizione col fatto che la prima fattorizzazione di T sia ridotta.

Per provare la proposizione 1 basta ora osservare che se T ha una forma ridotta di tipo 1 tutte le forme ridotte di T hanno tipo 1.

In generale il tipo delle forme ridotte di una T ammetterà un minimo. Il risultato segue, per induzione rispetto al tipo minimo di T, dal lemma precedente.

OSSERVAZIONE. *Per una trasformazione di tipo* $\geqslant 2$ *si ha sempre una forma ridotta*

$$T = S_1 \ \dots \ S_n$$

con S_1 *ed* S_n *di ordine* $\geqslant 2$.

Invero, la più generale forma ridotta di una T è del tipo

$$T = AS_1 \ \dots \ S_nB$$

con A e B affinità non ridotte all'identità.

Inoltre le due trasformazioni

$$S_1 = AS_1A^{-1}, \qquad \overline{S}_n = B^{-1}S_nB$$

sono elementari di ordine $\geqslant 2$. Risulta allora:

$$T = \overline{S}_1AS_2 \ \dots \ S_{n-1}B\overline{S}_n,$$

e riducendo a forma ridotta (se necessario) si perviene ad una forma ridotta della T del tipo voluto.

Tale osservazione vale anche, opportunamente modificata, per le trasformazioni di tipo 1; precisamente una $T=ASB$ ammette sempre una forma ridotta del tipo

$$T=\bar{A}\bar{S}$$

oppure del tipo

$$T=\bar{S}'\bar{B}'$$

con $\bar{S}$, $\bar{S}'$ trasformazioni elementari ed $\bar{A}$, $\bar{B}'$ affinità che non lasciano fissi i punti fondamentali di $\bar{S}$ ed $\bar{S}'$ rispettivamente.

Si considerino ora due trasformazioni T_1 di tipo t_1 e T_2 di tipo t_2 con t_1, $t_2 \geqslant 1$ e siano

$$T_1=S_1S_2 \dots S_n, \qquad T_2=S'_1S'_2 \dots S'_m$$

due loro forme ridotte con S_n ed S'_1 di ordine $\geqslant 2$. Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 2. *La trasformazione T_1T_2 è di tipo t_1+t_2 se e solo se S_n ed S'_1 hanno direzioni fondamentali distinte.*

La dimostrazione è immediata.

In particolare, considerata una trasformazione T di tipo t e una sua forma ridotta

$$T=S_1 \dots S_n$$

con S_1, S_n di ordine $\geqslant 2$, si riconosce che T^k è di tipo kt se e solo se S_1 ed S_n hanno punti fondamentali distinti.

4. Trasformazioni periodiche.

Sia T una trasformazione intera di tipo $t \geqslant 2$, e si consideri una sua forma ridotta

$$T=S_1 \dots S_n$$

con S_1, S_n di ordine $\geqslant 2$.

Se il prodotto S_1S_n fosse una trasformazione elementare di ordine $\geqslant 2$; T^k avrebbe tipo $kt-(k-1)$ ed essendo $t \geqslant 2$, $k>1$, T non potrebbe essere periodica. Se dunque T ha tipo $t \geqslant 2$ ed è periodica necessariamente risulta

$$S_n S_1 = A$$

con A affinità, ed inoltre

$$T = S_1(S_2 \ldots S_{n-1}A)S_1^{-1}$$

con $T' = S_2 \ldots S_{n-1}A$ periodica di tipo $t-2$. Iterando il ragionamento si conclude che una trasformazione periodica di tipo $t \geqslant 2$ è coniugata di un'affinità periodica o di una trasformazione periodica di tipo 1.

Questo risultato si precisa con la seguente

PROPOSIZIONE 3. *Ogni trasformazione periodica che non si riduca ad un'affinità è coniugata, in Γ, di un'affinità o di una trasformazione elementare.*

DIMOSTRAZIONE. Tenendo conto di quanto dianzi ottenuto, basta limitarsi a caratterizzare le trasformazioni periodiche di tipo 1. Una trasformazione di tipo 1 avrà una forma ridotta

$$T = ASB$$

con A e B affinità ed S trasformazione elementare.

Se l'affinità BA ha le direzioni unite distinte dalla direzione fondamentale di S, T^k viene ad avere tipo kt; se dunque T è periodica, posto $BA = \bar{A}$, $\bar{A}$ deve lasciare fissa la direzione fondamentale di S e risulta così

$$T = A\bar{S}A^{-1}$$

dove $\bar{S} = S\bar{A}$ è una trasformazione elementare. La proposizione 3 è così dimostrata.

Rimangono da caratterizzare le trasformazioni elementari periodiche.

Sia S una trasformazione elementare di ordine $\geqslant 2$, P_∞ la sua direzione fondamentale.

Considerando l'orbita di S in $E(P_\infty)$ rispetto agli automorfismi interni di $E(P_\infty)$, viene messo in evidenza l'ordine minimo delle trasformazioni coniugate di S, che verrà denominato ordine ridotto di S.

Una trasformazione di ordine ridotto 1 è ovviamente coniugata di un'affinità, esistono poi trasformazioni elementari il cui ordine eguaglia l'ordine ridotto.

Stabiliamo una condizione necessaria affinchè la trasformazione elementare $S = j_1 A_1$ abbia ordine uguale all'ordine ridotto.

Si osservi che la trasformazione lineare λ_1 di V_2 (spazio vettoriale soggiacente il piano affine $\mathcal{A}$) associata all'affinità A_1 ammette come spazio unito lo spazio vettoriale V_1, direzione comune delle rette di $\mathcal{F}(P_\infty)$, e con le notazioni già impiegate si avrà:

$$\lambda_1(\vec{e}) = \alpha_1 \vec{e}.$$

Sia ora $S \in E(P_\infty)$, $f(t)$ ed $f_1(t)$ le funzioni polinomiali associate ad S ed S_1 rispettivamente. Alla trasformazione $S^{-1} S_1 S$ resta associata la funzione polinomiale

$$\alpha_1 f(\delta\rho + b) + f_1(\delta_1\delta\rho + \delta_1 b + b_1) - f(\delta_1\delta\rho + \delta_1 b + b_1),$$

in cui il coefficiente della massima potenza di ρ vale

$$\alpha_1 a_n \delta^n - a_n \delta_1^n \delta^n \quad \text{, quando grado } f_1 < \text{grado } f = n$$

$$\alpha_1 a_n \delta^n + a'_n \delta_1^n \delta^n - a_n \delta_1^n \delta^n \quad \text{, quando grado } f_1 = \text{grado } f = n$$

$$a'_n \delta_1^n \delta^n \quad \text{, quando grado } f_1 > \text{grado } f$$

avendo denotato con a_n ed a'_n i coefficienti direttivi delle funzioni polinomiali f ed f_1 rispettivamente.

Ne segue che se

$$\alpha_1 \neq \delta_1^n$$

dove n è l'ordine di S_1, questa ha certamente ordine ridotto inferiore ad n, se invece S_1 ha ordine ridotto n, risulta

$$\alpha_1 = \delta_1^n .$$

Sia ora data una trasformazione elementare S di ordine ridotto $\nu > 1$, $\bar{S}$ una sua coniugata di ordine ν, $k > 1$ un intero. Il coefficiente direttivo della funzione polinomiale associata ad $\bar{S}^k$ è:

$$[(\delta^k)^\nu + \bar{\alpha}(\delta^{k-1})^\nu + \bar{\alpha}^2(\delta^{k-2})^\nu + \ldots + \bar{\alpha}^{k-1}\bar{\delta}^\nu]\bar{a}_\nu$$

ma poichè l'ordine ridotto di $\bar{S}$ coincide con l'ordine di $\bar{S}$, $\bar{S}^k$ ha ancora ordine ν. Pertanto una trasformazione elementare S periodica ha necessariamente ordine ridotto 1, ed è quindi coniugata di un'affinità. Si può pertanto concludere col seguente:

TEOREMA 1. *Nel piano affine $\mathfrak{A}$ ogni trasformazione cremoniana intera periodica è coniugata di un'affinità.*

5. Gruppi finiti di trasformazioni cremoniane intere.

Sia G un gruppo finito di trasformazioni intere contenente qualche trasformazione di tipo $t \geqslant 1$, quindi di ordine $\geqslant 2$. Per tipo del gruppo G si intende il tipo massimo delle trasformazioni appartenenti a G.

LEMMA a). *Se T_1, T_2 e T_1T_2 sono periodiche, T_1 di tipo $t_1 \geqslant 2$, T_2 di tipo $t_2 \geqslant 2$, esiste un automorfismo interno di Γ che muta T_1 e T_2 in due trasformazioni di tipo t_1-2 e t_2-2.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè il tipo di T_1 e T_2 è $\geqslant 2$, si possono considerare le forme ridotte

$$T_1 = S_1 \dots S_n \qquad T_2 = S'_1 \dots S'_m ,$$

con S_1, S_n, S'_1, S'_m di ordine $\geqslant 2$.

In quanto T_1 e T_2 sono periodiche, risulta:

$$S_nS_1 = A_1 , \qquad S'_mS'_1 = A_2 ,$$

con A_1, A_2 affinità.

Avendosi poi:

$$S'_mS_1 = A_2\bar{S}^{-1}A_1$$

con

$$\bar{S} = S_nS'_1 ,$$

il prodotto

$$T_1T_2 = S_1 \dots S_nS'_1 \dots S'_m$$

non sarebbe più una trasformazione periodica qualora $\bar{S}$ fosse di tipo 2 oppure elementare di ordine $\geqslant 2$.

$\bar{S}$ è dunque un'affinità e l'automorfismo interno di Γ definito da S_1 muta T_1 e T_2 in due trasformazioni di tipo t_1-2 e t_2-2.

LEMMA b). *Siano T_1, T_2, T_1T_2 periodiche con tipo $T_1 \geqslant 2$, tipo $T_2=1$. Esiste un automorfismo interno di Γ che muta T_1 in una trasformazione di tipo t_1-2 e T_2 in un'affinità.*

DIMOSTRAZIONE. È lecito supporre T_2 elementare mentre per T_1 si può considerare la forma ridotta:

$$T_1=S_1S_2 \dots S_n$$

con S_1, S_n di ordine $\geqslant 2$. Sia poi:

$$T_2=S.$$

Poichè T_1T_2 è periodica S_n ed S hanno la stessa direzione fondamentale. Se ora

$$\bar{S}=S_nS$$

fosse un'affinità, essendo T_1T_2 periodica ed avendosi

$$T_1T_2=S_1S_2 \dots S_{n-1}\bar{S},$$

la direzione fondamentale di S_{n-1} deve essere unita in $\bar{S}$, se S_{n-1} ha ordine $\geqslant 2$; ciò comporta che S_{n-1} ed S_n hanno la stessa direzione fondamentale in contrasto col fatto che risultano fattori contigui distinti di una forma ridotta di T_1. Ma se S_{n-1} è un'affinità, $S=S_{n-1}\bar{S}$ deve lasciare fissa la direzione fondamentale di S_{n-2}, coincidente con quella di S_n, che è fissa per $\bar{S}$ e quindi per S_{n-1}. Si ricade di nuovo in un assurdo, dal momento che S_{n-2}, S_{n-1}, S_n sono fattori contigui di una forma ridotta di T_1.

Dunque $S_nS=\bar{S}$ è di ordine $\geqslant 2$ e poichè T_1T_2 è periodica, con una forma ridotta

$$T_1T_2=S_1S_2 \dots S_{n-1}\bar{S}$$

risulta

$$\bar{S}S_1=A$$

ed essendo

$$S_nS_1=B$$

con A, B affinità, segue l'asserto.

LEMMA c). *Se T_1, T_2, T_1T_2 sono periodiche con T_1 di tipo $t_1\geqslant 2$, T_2 affinità, esiste un automorfismo interno di Γ che muta T_1 in una trasformazione di tipo t_1-2 e T_2 in una affinità.*

DIMOSTRAZIONE. T_1 abbia forma ridotta $T_1=S_1S_2 \dots S_n$. L'affermazione segue dal fatto che, posto $T_2=A$, essendo T_1A periodica, la direzione fondamentale di S_n è unita per l'affinità A e risulta:

$$S_nS_1=B, \ (S_nA)S_1=B_1$$

con B e B_1 affinità.

Dimostriamo ora la seguente:

PROPOSIZIONE 4. *Un gruppo finito di tipo 1 è coniugato di un gruppo di trasformazioni elementari.*

DIMOSTRAZIONE. Siano T_1, T_2 due trasformazioni di tipo 1 di G. Esse possono scriversi:

$$T_1=A^{-1}S_1A \qquad T_2=B^{-1}S_2B$$

con A e B affinità S_1, S_2 trasformazioni elementari.

Poichè T_1T_2 è periodica, S_1, S_2 devono avere lo stesso punto fondamentale. Invero, se S_1 ed S_2 avessero punti fondamentali distinti AB^{-1} e BA^{-1} si potrebbero esprimere rispettivamente come prodotti di due affinità B_1B_2 *e* $B'_1B'_2$ con B_1 e B'_1 aventi la direzione fondamentale di S_1 quale direzione unita B_2 e B'_2 aventi la direzione fondamentale di S_2 quale direzione unita, cosicchè T_1T_2 verrebbe ad avere una forma ridotta del tipo:

$$T_1T_2=A_1S'_1S'_2A_2^{-1}$$

ma allora il prodotto $(S'_2A_2^{-1})$ $(A_1S'_1)$ risulterebbe di tipo 2 e la T_1T_2

non sarebbe periodica [1]).

Il punto fondamentale comune alle trasformazioni S_1 ed S_2 è allora fisso per l'affinità AB^{-1}, la quale viene così ad appartenere al gruppo elementare di S_1 ed S_2, cosicchè, l'automorfismo interno di Γ definito da A trasforma T_1 e T_2 in due trasformazioni elementari. È poi chiaro che se SA', con S elementare e periodica ed A' affinità periodica, è periodica, la direzione fondamentale di S è fissa per l'affinità A'.

PROPOSIZIONE 5. *Un gruppo finito di tipo $t \geqslant 2$ è coniugato in Γ di un gruppo finito di tipo $t' < t$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un gruppo finito di tipo $t \geqslant 2$; a G apparterranno eventualmente affinità e trasformazioni di tipo 1. Per la proposizione 4 tutte le eventuali trasformazioni di tipo 1 di G risultano coniugate di trasformazioni elementari mediante una stessa affinità A.

L'automorfismo interno di Γ definito dall'affinità A trasforma G in un gruppo G' di tipo t nel quale le eventuali trasformazioni di tipo 1 risultano tutte elementari. Sia ora T una trasformazione di G' di tipo massimo $t (\geqslant 2)$ e se ne consideri la forma ridotta

$$T = S_1 \ldots S_n$$

con S_1 ed S_n di ordine $\geqslant 2$ (ciò è lecito per l'osservazione di pag. 7), l'automorfismo interno di Γ definito da S_1 a norma dei lemmi a), b), c) trasforma G' in un gruppo G_1 di tipo $t_1 < t$. Da cui l'asserto.

PROPOSIZIONE 6. *Ogni gruppo finito G di trasformazioni elementari è coniugato in Γ di un gruppo finito di affinità.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $E(P_\infty)$ il gruppo elementare contenente G. In quanto gli elementi di $J(P_\infty)$ risultano aperiodici, G sarà isomorfo ad un sottogruppo finito del gruppo:

$$E(P_\infty)/J(P_\infty) \simeq A(P_\infty)/A^*(P_\infty)$$

---

[1]) Il risultato vale indipendentemente dal fatto che le due trasformazioni appartengano ad un gruppo di tipo 1.

dove

$$A^*(P_\infty)=J(P_\infty)\cap A(P_\infty).$$

Si verifica facilmente che, se nel piano $\mathcal{A}$ è stato fissato un riferimento $(0, \vec{e}, \vec{e}')$ dove $\vec{e}$ è un assegnato vettore parallelo alle rette di $\mathfrak{F}(P_\infty)$ la trasformazione lineare λ associata ad un'affinità $a \in A(P_\infty)$ è rappresentata dalle equazioni

$$\xi'=\alpha\xi+\beta\eta$$

$$\eta'=\gamma\eta$$

dove (ξ, η) sono le componenti di un vettore $\vec{v}$ del piano e (ξ', η') sono le componenti del vettore corrispondente nella trasformazione λ; mentre la trasformazione λ^* associata ad un'affinità $a^* \in A^*(P_\infty)$ è rappresentata da equazioni del tipo

$$\xi'=\xi+\beta\eta$$

$$\eta'=\eta$$

e che di quest'ultimo tipo è la trasformazione lineare associata ad un commutatore $a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2$ di $A(P_\infty)$, che pertanto differisce per una traslazione da un elemento di $A^*(P_\infty)$.

Ne viene che ogni commutatore di $A(P_\infty)/A^*(P_\infty)$ è contenuto nel gruppo $\mathcal{T}'$ immagine del sottogruppo $\mathcal{T}$ delle traslazioni di $A(P_\infty)$ nell'omomorfismo

$$A(P_\infty) \rightarrow A(P_\infty)/A^*(P_\infty).$$

Il gruppo

$$(A(P_\infty)/A^*(P_\infty))/\mathcal{T}' \tag{4}$$

risulta così abeliano e ricordando che gli elementi di $\mathcal{T}$, e quindi quelli di $\mathcal{T}'$, sono aperiodici si conclude che ogni gruppo finito G di trasformazioni elementari è abeliano in quanto isomorfo ad un sottogruppo finito di (4).

Le trasformazioni di G possono essere tutte di ordine $\geqslant 2$, oppure in G vi è qualche trasformazione di ordine 1. Nel primo caso sia S

una di esse, esisterà una trasformazione $j \in J(P_\infty)$ tale che $j^{-1}Sj$ sia un'affinità, cosicchè l'automorfismo interno di $E(P_\infty)$ definito da j applicherà G in un gruppo G' il quale, se non è già interamente costituito da affinità, verrà a contenere un'affinità non identica, e così sarà lecito limitarsi a discutere il secondo dei casi dianzi prospettati.

Siano dunque B un'affinità non identica, S una trasformazione di ordine $\geqslant 2$ entrambi appartenenti a G, λ_1 la trasformazione lineare associata a B, con $\lambda_1(\vec{e}) = \alpha_1 \vec{e}$ $(\alpha_1 \in K)$. La S sarà rappresentata dalla

$$\overrightarrow{O'P'} = \lambda(\overrightarrow{OP}) + f(\delta\rho + b)\vec{e},$$

le trasformazioni SB e BS saranno rappresentate rispettivamente dalle

$$\overrightarrow{O''P''} = \lambda_1\lambda(\overrightarrow{OP}) + \alpha_1 f(\delta\rho + b)\vec{e}$$

$$\overrightarrow{O_1P_1} = \lambda\lambda_1(\overrightarrow{OP}) + f(\delta\delta_1\rho + \delta b_1 + b)\vec{e},$$

nell'ultima delle quali $\rho' = \delta_1\rho + b_1$ è l'equazione dell'affinità indotta da B su $\mathfrak{F}(P_\infty)$. Orbene, tale affinità non può ridursi all'identità, se così fosse, tenendo conto della permutabilità di S e B seguirebbe che:

$$\lambda_1\lambda(\overrightarrow{OP}) - \lambda\lambda_1(\overrightarrow{OP}) = (1 - \alpha_1) f(\delta\rho + b)\vec{e}$$

e quindi che la trasformazione di $J(P_\infty)$ definita da

$$\overrightarrow{PP'} = (1 - \alpha_1) f(\delta\rho + b)\vec{e}$$

sarebbe lineare, quindi $\alpha_1 = 1$, cioè B indurrebbe su ciascuna retta di $\mathfrak{F}(P_\infty)$ una traslazione, il che è assurdo.

Considerata invece una trasformazione $S \in G$ di ordine $\geqslant 2$, con $S = JA$, $J \in J(P_\infty)$ ed A affinità che induce su $\mathfrak{F}(P_\infty)$ l'identità, S è coniugata mediante una trasformazione elementare S_1 di un'affinità B che induce su $\mathfrak{F}(P_\infty)$ l'identità. Ora $B \in G' = S_1^{-1}GS_1$, ed il gruppo G' può risultare interamente costituito di affinità oppure in G' vi è qualche trasformazione di ordine $\geqslant 2$, il che per l'osservazione precedente è impossibile. Pertanto se in G vi è una trasformazione S che induca su $\mathfrak{F}(P_\infty)$ l'affinità identica, G è certamente coniugato in $E(P_\infty)$ di un gruppo finito di affinità.

Rimane quindi da discutere il caso che tutte le trasformazioni di G di ordine $\geqslant 2$ inducano su $\mathfrak{F}(P_\infty)$ un'affinità non identica, che può addirittura supporsi ridotta ad un'omotetia. In tale ipotesi per una trasformazione S di G si può scrivere

$$\overrightarrow{O'P'}=\lambda(\overrightarrow{OP})+g(\delta_1\rho)\vec{e}. \tag{5}$$

Sia ora A un'affinità di G, affinchè un elemento $j\in J(P_\infty)$ di ordine n trasformi A in un'affinità è necessario e sufficiente che la componente non lineare di j soddisfi l'identità

$$\alpha f(\rho)-f(\delta\rho)=0$$

dove $\alpha\in K$ è tale che $\lambda(\vec{e})=\alpha\vec{e}$ e δ è il rapporto dell'omotetia indotta da A su $\mathfrak{F}(P_\infty)$. Posto

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i t^i\,,$$

l'identità precedente si traduce nelle

$$(\alpha-\delta^i)\lambda_i=0 \qquad 2\leqslant i\leqslant n. \tag{6}$$

Data poi una trasformazione $S\in G$ di ordine n rappresentata dalla (5), la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un elemento $j\in J(P_\infty)$ di equazioni

$$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+f'(\rho)\vec{e}$$

che trasforma S in un'affinità si traduce nelle relazioni seguenti tra i coefficienti μ_i di $f'(t)$:

$$\begin{gathered}\alpha_1 f'(\rho)+g(\delta_1\rho)-f'(\delta_1\rho)=0.\\ a_i\delta_1{}^i+(\alpha_1-\delta_1{}^i)\mu_i=0\\ 2\leqslant i\leqslant n.\end{gathered} \tag{7}$$

etaon shrdlu cmfwyp

Le (6) e (7) si possono riguardare come due sistemi nelle incognite

λ_i e μ_i rispettivamente, il secondo dei quali certamente compatibile. Ma A ed S sono permutabili, quindi sussistono le relazioni:

$$\alpha g(\delta_1\rho) = g(\delta\delta_1\rho)$$

cioè:

$$a_i\delta_1{}^i(\alpha - \delta^i) = 0 \qquad 0 \leqslant i \leqslant n$$

dalle quali segue che anche (6) è compatibile e che una soluzione di (7) è soluzione di (6).

Esiste così per una data $S \in G$ di ordine $\geqslant 2$ un automorfismo interno di $E(P_\infty)$ che trasforma G in un gruppo G' in cui il numero delle trasformazioni di ordine $\geqslant 2$ è inferiore al numero analogo delle trasformazioni in G. Se ne conclude che con un numero finito di tali trasformazioni G si può trasformare in un gruppo finito di affinità.

TEOREMA 2. *Ogni gruppo finito G di trasformazioni cremoniane intere è congiunto in Γ di un gruppo finito di affinità.*

DIMOSTRAZIONE. Il teorema segue immediatamente per induzione rispetto al tipo del gruppo G dalle proposizioni 4, 5, 6.

Concludiamo con una caratterizzazione dei gruppi finiti abeliani di trasformazioni cremoniane intere su un campo K algebricamente chiuso.

Diremo che un gruppo finito G di trasformazioni cremoniane intere ha *tipo ridotto* τ quando esiste un automorfismo interno di Γ che trasforma G in gruppo G_0 di tipo τ contenente qualche trasformazione di ordine $\geqslant 2$, e inoltre ogni gruppo G' coniugato di G, il quale contenga una trasformazione di ordine $\geqslant 2$, ha tipo $\geqslant \tau$.

PROPOSIZIONE 7. *Un gruppo finito di trasformazioni cremoniane intere è abeliano se e solo se ha tipo ridotto* 1.

DIMOSTRAZIONE. La sufficienza della condizione è provata nella proposizione 6.

La condizione è anche necessaria. Un gruppo G abeliano finito per il teorema 2 è coniugato in Γ di un gruppo abeliano finito di affinità A_0.

D'altra parte le affinità di A_0 che inducono sulla retta impropria una proiettività non identica hanno in comune le direzioni unite; se allora P_∞ è una di queste e se S è una trasformazione elementare avente

P_∞ come direzione fondamentale, l'automorfismo interno di Γ definito dalla S trasforma A_0 in un gruppo di tipo 1, onde 1 è necessariamente il tipo ridotto di G.

BIBLIOGRAFIA

[1] ROSATI, M.: *Classificazione proiettiva delle trasformazioni cremoniane intere tra due piani,* Rendiconti di Matematica e sue applicazioni, *21* (1962), pp. 86-99.

[2] SEGRE, B.: *Corrispondenze di Möbius e trasformazioni cremoniane intere,* Atti della Accademia delle Scienze di Torino, *91* (1956-57), pp. 1-17.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 gennaio 1970.