

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

**Sull'integrazione delle distribuzioni quasi
periodiche di una variabile**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 44 (1970), p. 411-413

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__411_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULL'INTEGRAZIONE DELLE DISTRIBUZIONI
QUASI PERIODICHE DI UNA VARIABILE

GIULIANO BRATTI *)

§ 1. A seguito dell'ultimo teorema di [1] si ha, come applicazione, il seguente: sia B uno spazio di Banach; $T : D_L^1 \rightarrow B$ sia una distribuzione quasi periodica e $S : D_L^1 \rightarrow B$ sia tale che $S' = T$. Condizione necessaria e sufficiente al fine che S sia quasi periodica è che S sia completamente continua (se A è limitato in D_L^1 , $\langle S, A \rangle = U\{\langle S, \varphi \rangle, \forall \varphi \in A\}$ è relativamente compatto in B).

DIMOSTRAZIONE. L'ultimo teorema in [1], § 5, dà immediatamente la condizione necessaria.

Per la condizione sufficiente si ha: se $\alpha \in B'$,

$$\frac{d}{dx}(\alpha \circ S) = \alpha \circ \left(\frac{d}{dx} S\right).$$

Se $\gamma(x) \in D$, la funzione limitata $\langle S_t \cdot \gamma(x-t) \rangle : R \rightarrow B$ ha traiettoria relativamente compatta, per le ipotesi su S , ed è debolmente quasi periodica. Nel fatto: se $\alpha \in B'$,

$$\alpha \langle S_t \cdot \gamma(x-t) \rangle = \alpha \langle S_t \cdot \gamma(-t) \rangle + \int_0^x \langle (\alpha \circ T)_t \cdot \gamma(x-t) \rangle dx;$$

il teorema di Bohl-Bohr dà il risultato.

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, 35100 Padova.

In definitiva: S è completamente continua e debolmente quasi periodica; allora è quasi periodica.

OSSERVAZIONE 1. Il teorema di sopra è l'estensione alle distribuzioni vettoriali di un classico teorema di Bochner per le funzioni vettoriali fortemente quasi periodiche.

OSSERVAZIONE 2. Se T è da $D_{L^1} \rightarrow B$ esiste sempre una $S : D \rightarrow B$ con $S' = T$. Il fatto che S sia da $D_{L^1} \rightarrow B$ non è sufficiente, da solo, a garantire la quasi periodicità di S quando T è quasi periodica.

Se B coincide con il corpo complesso si ha: *se $S' = T$ è quasi periodico, $S \in D'_{L^\infty}$ è condizione necessaria e sufficiente al fine che S sia quasi periodica.*

DIMOSTRAZIONE. La necessità della condizione è ovvia; la sua sufficienza si ha tenendo conto che, $\forall \alpha(x) \in D$, $\langle S_t \cdot \alpha(x-t) \rangle (R \rightarrow C)$ è funzione limitata e che $(S * \alpha)' = S' * \alpha = T * \alpha$.

Nel caso che lo spazio di Banach sia riflessivo il teorema di sopra è ancora vero, come si vede facilmente mediante l'ultimo teorema di [1], § 5 e l'applicazione di un risultato di W. P. Veith [3].

Mediante l'estensione di un risultato di Kadets, [2], si possono caratterizzare gli spazi di Banach nei quali la limitatezza della distribuzione integrale di una distribuzione quasi periodica, dà la sua quasi periodicità. Si ha: *se B è uno spazio di Banach che non contiene sottospazi isomorfi a c^1), e se $S' = T$, T quasi periodica, S è quasi periodica non appena è limitata; viceversa: se ogni integrale limitato di ogni distribuzione quasi periodica a valori in B è quasi periodico, B non contiene sottospazi isomorfi a c .*

DIMOSTRAZIONE. Per la prima parte del teorema è sufficiente tener presente il lavoro di Kadets; per la seconda parte, l'osservazione in [1], § 5.

¹⁾ c è lo spazio di tutte le sequenze numeriche convergenti.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BRATTI G.: *Sulle distribuzioni vettoriali di una variabile debolmente quasi periodiche*, Rend. Sem. Mat. di Padova, 1970.
- [2] KADETS: il lavoro è in *Funct. anal. and its appl.* Vol. 3, 1969.
- [3] VEITH W. P.: *Bounded-valued functions with almost periodic differences*, 1969.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 ottobre 1970.