RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER STREB

Über schwach hyperzentrale Ringe

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 399-409

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__399_0>

ÜBER SCHWACH HYPERZENTRALE RINGE

WALTER STREB *)

S. A. Jennings [2; Satz 1, S. 595 und 1; Satz 6.4., S. 353] hat folgende Aussagen bewiesen:

Ist der zu einem Ring R assoziierte Lie-Ring nilpotent, so ist R'' nilpotent und R' nil.

Ist der zu einem Ring R assoziierte Lie-Ring nilpotent und R auflösbar, so ist R von endlicher Klasse.

Hierbei sei unter Verwendung der Bezeichnungen

$a \circ b \; := ab - ba$ für $a, \, b \in R$ und

$A \circ B : = (a \circ b \mid a \in A, \; b \in B)$ für $A, \, B \subseteq R$

R' das von $R \circ R$ erzeugte Ideal von R und

R'' das von $R \circ (R \circ R)$ erzeugte Ideal von R.

In dieser Arbeit wollen wir ähnliche Aussagen für schwach hyperzentrale Ringe gewinnen.

Ein Ring R heißt *schwach hyperzentral,* wenn

$$\circ M := (r \mid r \in R, \; R \circ r \subseteq M) \nsubseteq M$$

für jede Elementenmenge M von R mit $0 \subseteq M \subset R$ gilt.

Zu unterscheiden ist hierbei zwischen

Inklusion $A \subseteq B$ und strikter Inklusion $A \subset B$.

---

*) Indirizzo dell'A.: Walter Streb - 857 Pegnitz - Leibnizweg 10. Bundes republik Deutschland.

Die Klasse der schwach hyperzentralen Ringe umfaßt die Klasse derjenigen Ringe, deren assoziierter Lie-Ring nilpotent ist. Wir erhalten im wesentlichen folgende Aussagen über die Ringe R'', R', R und den von $R \circ R$ erzeugten Unterring ${}^1R$ von R:

Ist R schwach hyperzentral, so ist R'' hyper-R''-annullierend in R, R' hypernilpotent in R, R hyperkommutativ und ${}^1R$ hyperzentral.

Ist R schwach hyperzentral und R' hyper-R'-annullierend in R, so ist R hyperzentral.

Zum Verständnis des Inhaltes der obigen Aussagen schließen wir die Zusammenstellung der in dieser Arbeit verwendeten *Bezeichnungen und Definitionen ab*:

$(x \mid x \ldots)$	Menge aller x mit den Eigenschaften ...
n, m, i, j	bezeichnen *immer* ganze Zahlen größer oder gleich 0
$\complement A$	Komplement von $A \subseteq R$ in dem betrachteten Situation zugrundeliegenden *Gesamtring* R
■	Ende eines Beweises
R, S, T	bezeichnen *immer* assoziative Ringe
$\{A\}$	von $A \subseteq R$ erzeugtes Ideal in dem der betrachteten Situation zugrundeliegenden *Gesamtring* R
$\langle A \rangle$	von $A \subseteq R$ erzeugter Ring
$\lvert A \rvert$	von $A \subseteq R$ erzeugter Modul
AB	$:= \lvert (ab \mid a \in A,\ b \in B) \rvert$ für $A, B \subseteq R$
A^n	$A^1 := A,\ A^{i+1} := AA^i$ für $A \subseteq R$ und $i \geq 1$
${}^nR$	${}^0R := R,\ {}^{i+1}R := \langle ({}^iR) \circ ({}^iR) \rangle$ für $i \geq 0$
${}_nR$	${}_0R := R,\ {}_{i+1}R := R \circ ({}_iR)$ für $i \geq 0$

Idealeigenschaften « *A ist E-Ideal in R* »:

A heißt kommutatives Ideal in R, wenn $A \circ A = 0$.

A heißt zentrales Ideal in R, wenn $R \circ A = 0$.

A heißt nilpotentes Ideal in R, wenn $A^n = 0$ mit $n \geq 1$.

A heißt $\{{}_n({}^mR)\}$-annullierendes Ideal in R, wenn $\{{}_n({}^mR)\}A = 0$.

S heißt $\{_j({}^iR)\}$-*epimorphes Bild von* R, wenn es einen Epimorphismus H von R auf S gibt, so daß $H^{-1}(0) \subset \{_j({}^iR)\}$.

Unter Bezugnahme auf die Idealeigenschaften « A ist E-Ideal in R » definieren wir:

$\{_j({}^iR)\}$ *heißt hyper-E in* R, wenn es zu jedem $\{_j({}^iR)\}$-epimorphen Bild S von R ein E-Ideal A in S gibt mit $0 \subset A \subseteq \{_j({}^iS)\}$.

R *heißt hyper-E*, wenn R hyper-E in R ist.

Wegen $R'' = \{_2({}^0R)\}$, $R' = \{_1({}^0R)\}$ und $R = \{_0({}^0R)\}$ sind somit alle in den obigen Aussagen verwendeten Begriffe geklärt.

Herrn Professor Dr. W. Specht und Herrn Dr. H. Heineken danke ich für wertvolle Hinweise, mit denen sie diese Arbeit unterstützt haben.

LEMMA 1. Für Ideale A und B von R gilt:

$$\{R \circ A\}B \subseteq \{A \circ B\}. \tag{1}$$

$$\{R \circ R\}AB \subseteq \{A \circ B\}. \tag{2}$$

BEWEIS. Sei $a \in A$, $b \in B$ und $r, s \in R$. Da B Ideal von R ist, gilt

$$* \quad (r \circ a)b = r(a \circ b) - a \circ rb \in \{A \circ B\}$$

und wegen $*$ auch

$$(r \circ a)sb \in \{A \circ B\}.$$

Hieraus folgt (1). Zweimalige Anwendung von (1) erbringt

$$\{R \circ R\}AB \subseteq \{R \circ A\}B \subseteq \{A \circ B\}. \quad \blacksquare$$

LEMMA 2. Ist A Ideal von R und $B \subseteq R$, so gilt:

$$\{A \circ \{B\}\} = \{R \circ A\}\{B\} + \{A \circ B\}.$$

BEWEIS.
« $\supseteq$ » folgt unmittelbar mit Lemma 1.(1).
« $\subseteq$ ». Wir setzen $C := \{R \circ A\}\{B\} + \{A \circ B\}$.

Für $a \in A$, $b \in B$ und $r, s \in R$ gilt:

$$a \circ rb = r(a \circ b) - (r \circ a)b \in C \text{ und}$$

$$* \ a \circ br = (a \circ b)r + (r \circ a) \circ b - (r \circ a)b \in C.$$

Mit $*$ folgt weiter

$$a \circ sbr = s(a \circ br) - (s \circ a)br \in C.$$

Aus $A \circ \{B\} \subseteq C$ jedoch folgt unmittelbar die Behauptung. ■

LEMMA 3. Jedes epimorphe Bild S eines schwach hyperzentralen Ringes R ist schwach hyperzentral.

BEWEIS. Sei H Epimorphismus von R auf S und $0 \subseteq M \subset S$. Da R schwach hyperzentral ist und $0 \subseteq H^{-1}(M) \subset R$, gilt $\circ H^{-1}(M) \nsubseteq H^{-1}(M)$. Es folgt $\circ M = H(\circ H^{-1}(M)) \nsubseteq H(H^{-1}(M)) = M$. Somit ist S schwach hyperzentral. ■

SATZ 1. Für jeden Ring R sind folgende Aussagen gleichwertig:

(a) R ist hyperzentral.

(b) R ist schwach hyperzentral und R' ist hyper-R'-annullierend in R.

BEWEIS.
(a) $\Rightarrow$ (b). R ist schwach hyperzentral: Sei $0 \subseteq M \subset R$. Man wählt A maximal in der 0 aber nicht R enthaltenden Menge
$(B \mid B$ ist Ideal von R, $B \subseteq M)$. Weiter sei C/A zentrales Ideal in R/A mit $A \subset C$. Es folgt $\circ M \supseteq C \nsubseteq M$.

R' ist hyper-R'-annullierend in R: Da mit R auch R' hyperzentral in R ist, läßt sich zu jedem R'-epimorphen Bild S von R ein zentrales Ideal A in S mit $0 \subset A \subseteq S'$ wählen. Nach Lemma 1.(1) ist $S'A \subseteq \{S \circ A\} = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Sei S ein R'-epimorphes Bild von R. Man wählt ein S'-annullierendes Ideal A in S mit $0 \subset A \subseteq S'$. Da S nach Lemma 3 schwach hyperzentral ist, gilt $\circ(\complement A \cup 0) \nsubseteq \complement A \cup 0$. Demnach gibt es $0 \neq a \in A$ mit $S \circ a \subseteq (\complement A \cup 0) \cap A = 0$. Wegen $S \circ a = 0$ und $S'a = 0$ ist nach Lemma 2 $\{a\}$ zentrales Ideal in S. Aus $0 \neq a \in A \subseteq S'$ folgt $0 \subset \{a\} \subseteq S'$. R' ist also hyperzentral in R. Da weiter R/R' als kommutativer Ring hyperzentral ist, ist auch R hyperzentral. ■

LEMMA 4. Für $M \subseteq R$ mit $R \circ (R \circ M) = 0$ gilt:

$$(R \circ R) \circ M = 0. \tag{1}$$

$$R''\{R \circ M\} = 0. \tag{2}$$

BEWEIS. Sei $a \in M$, $b \in R \circ R$ und $r, s, t \in R$:

(1) folgt aus $(s \circ r) \circ a = s \circ (r \circ a) - r \circ (s \circ a) = 0$.

(2) Da nach (1) $b \circ a = 0$ ist, gilt

$$(s \circ b)(r \circ a) = s \circ (br \circ a) - (s \circ (b \circ a))r - (b \circ a)(s \circ r) - b(s \circ (r \circ a)) = 0.$$

Hiermit gilt auch

$$(s \circ b)t(r \circ a) = (s \circ b)(r \circ a)t + (s \circ b)(t \circ (r \circ a)) = 0.$$

Insgesamt folgt (2). ■

SATZ 2. Ist R schwach hyperzentral, so ist R'' hyper-R''-annullierend in R.

BEWEIS. Sei S ein R''-epimorphes Bild von R. Wegen $S'' \supset 0$ ist $\circ(\circ 0) \subset S$. Da S nach Lemma 3 schwach hyperzentral ist, gilt $\circ(\circ(\circ 0)) \nsubseteq \circ(\circ 0)$. Es folgt für $M := S \circ (\circ(\circ(\circ 0)))$, daß $S \circ M \supset 0$ und $S \circ (S \circ M) = 0$ gilt. Anwendung von Lemma 4 liefert $S''\{S \circ M\} = 0$, wobei $0 \subset \{S \circ M\} \subseteq S''$ gilt. ■

LEMMA 5. Ist $\{{}_m({}^nR)\}$ nilpotentes Ideal in R, so ist $\{{}_m({}^nR)\}$ auch hyper-$\{{}_m({}^nR)\}$-annullierend in R.

BEWEIS. Sei S ein $\{{}_m({}^nR)\}$-epimorphes Bild von R. $B := \{{}_m({}^nS)\}$ ist nilpotent, da $\{{}_m({}^nR)\}$ nilpotent ist. Es läßt sich deshalb $m \geq 1$ so wählen, daß $B^m \supset 0$ und $B^{m+1} = 0$ gilt. B^m ist also B-annullierend in S mit $0 \subset B^m \subseteq B$. Hiermit folgt die Behauptung. ■

SATZ 3. Ist R'/R'' nilpotentes Ideal in R/R'', so sind folgende Aussagen gleichwertig:

(a) R ist hyperzentral.

(b) R ist schwach hyperzentral.

BEWEIS.

$(a) \Rightarrow (b)$ folgt aus Satz 1.

$(b) \Rightarrow (a)$. Nach Satz 1 ist lediglich zu beweisen, daß R' hyper-R'-annullierend in R ist. Nach Lemma 5 ist R'/R'' hyper-R'/R''-annullierend in R/R''. Deshalb bleibt zu beweisen:

R'' ist hyper-R'-annullierend in R.

Sei S ein R''-epimorphes Bild von R. Da nach Satz 2 R'' hyper-R''-annullierend in R ist, läßt sich ein S''-annullierendes Ideal A in S wählen mit $0 \subset A \subseteq S''$. Mit R'/R'' ist auch S'/S'' nilpotent und deshalb $(S')^n \subseteq S''$ mit $n \geq 1$. Da $(S')^n A \subseteq S'' A = 0$ gilt, ist entweder $S'A = 0$ oder es läßt sich $m \geq 1$ so wählen, daß $(S')^m A \supset 0$ und $(S')^{m+1} A = 0$ gilt. Im ersten Fall ist A ein S'-annullierendes Ideal in S mit $0 \subset A \subseteq S''$, im zweiten Fall ist $(S')^m A$ ein S'-annullierendes Ideal in S mit $0 \subset (S')^m A \subseteq S''$. ■

LEMMA 6. Jeder Unterring S eines schwach hyperzentralen Ringes R ist schwach hyperzentral.

BEWEIS. Aus $0 \subseteq M \subset S$ folgt $0 \subseteq \mathfrak{C}S \cup M \subset R$. Wegen $\circ(\mathfrak{C}S \cup M) \nsubseteq \mathfrak{C}S \cup M$ gibt es $s \in S$, so daß $s \notin M$ und $S \circ s \subseteq (R \circ s) \cap S \subseteq M$ gilt. Hiermit ergibt sich die Behauptung. ■

LEMMA 7.

(1) Sei S Unterring von R, $M \subseteq S$ und C Ideal von S:

Aus $R \circ M \subseteq C$ folgt $R \circ \langle M \rangle \subseteq C$.

(2) Seien $A, B \subseteq R$:

Aus $R \circ A \subseteq |A|$ und $R \circ B \subseteq |B|$ folgt

(a) $R \circ (A \circ B) \subseteq |A \circ B|$ und

(b) $R \circ \langle A \circ B \rangle \subseteq \langle A \circ B \rangle$.

(3) Es gilt: $R \circ ({}_{\mathrm{m}}({}^n R)) \subseteq |{}_m({}^n R)|$ für $n, m \geq 0$.

BEWEIS.

(1) Es reicht zu zeigen, daß $D := (d \mid d \in S,\ R \circ d \subseteq C)$ ein Ring ist. Für $a,\ b \in D$ und $r \in R$ gilt:

$r \circ (a-b) = r \circ a - r \circ b \in C$ und $r \circ ab = (r \circ a)b + a(r \circ b) \in C$.

(2) Sei $a \in A,\ b \in B$ und $r \in R$. Wegen $|A| \circ |B| \subseteq |A \circ B|$ ist

$r \circ (a \circ b) = (r \circ a) \circ b + a \circ (r \circ b) \in |A \circ B|$. Hieraus folgt ($a$).

(b) ergibt sich aus (a) durch Anwendung von (1) auf

$$M := A \circ B \text{ und } S := C := \langle A \circ B \rangle.$$

(3) Wir beweisen: $R \circ ({}^nR) \subseteq {}^nR$ für $n \geq 0$.

Für $n=0$ ist die Aussage trivial. Den Induktionsschluß von i auf $i+1$ leistet (2)(b) angewendet auf $A := B := {}^iR$.

Wir zeigen:
Für jeden Unterring S von R mit $R \circ S \subseteq S$ gilt: $R \circ ({}_mS) \subseteq |{}_mS|$.
Für $m=0$ ist die Aussage trivial. Den Induktionsschluß von i auf $i+1$ erbringt (2)(a) angewendet auf $A := S$ und $B := {}_iS$.
Beide Schritte zusammen beweisen (3). ■

LEMMA 8. Sei $0 \leq i \leq n$ und B das von ${}_m({}^nR)$ erzeugte Ideal von ${}^iR$. Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(a) A ist hyper-B-annullierendes Ideal in ${}^iR$.

(b) $\{A\}$ ist hyper-$\{{}_m({}^nR)\}$-annullierendes Ideal in R.

BEWEIS. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Gleichwertigkeit der folgenden beiden Aussagen:

(c) A ist B-annullierendes Ideal in ${}^iR$.

(d) $\{A\}$ ist $\{{}_m({}^nR)\}$-annullierendes Ideal in R.

(c) $\Rightarrow$ (d). Nach Lemma 7.(3) gilt $R \circ ({}_m({}^nR)) \subseteq |{}_m({}^nR)|$. Es folgt $bra = rba - (r \circ b)a = 0$ für $b \in {}_m({}^nR)$, $a \in A$ und $r \in R$ und damit die Behauptung.

(d) $\Rightarrow$ (c) ist trivial. ■

SATZ 4. R ist hyperzentral genau dann, wenn R schwach hyperzentral und ${}^1R$ hyper-${}^1R$-annullierend ist.

BEWEIS. Die Behauptung folgt mit Satz 1 bei Anwendung von Lemma 8 auf $m:=0$, $n:=i:=1$. ■

LEMMA 9. Ist R'' hyper-R''-annullierend in R, so ist $({}^1R)'$ hyper-$({}^1R)'$-annullierend in ${}^1R$.

BEWEIS. Anwendung von Lemma 7.(1) auf $M:=R\circ R$, $S:=R$ und $C:=R''$ erbringt $({}^1R)\circ({}^1R)=({}^1R)\circ\langle R\circ R\rangle\subseteq R\circ\langle R\circ R\rangle\subseteq R''$.
Also gilt:

$$* \quad ({}^1R)'\subseteq R''.$$

Wegen $*$ ist mit R'' auch $\{({}^1R)'\}$ hyper-R''-annullierend in R. Mit $*$ folgt weiter, daß auch $\{({}^1R)'\}$ hyper-$\{({}^1R)'\}$-annullierend in R ist. Anwendung von Lemma 8 auf $A:=({}^1R)'$ und $m:=n:=i:=1$ erbringt, daß $({}^1R)'$ hyper-$({}^1R)'$-annullierend in ${}^1R$ ist. ■

SATZ 5. Ist R schwach hyperzentral, so ist ${}^1R$ hyperzentral.

BEWEIS. Nach Lemma 6 ist ${}^1R$ schwach hyperzentral. Nach Satz 2 ist R'' hyper-R''-annullierend in R. Nach Lemma 9 ist demnach $({}^1R)'$ hyper-$({}^1R)'$-annullierend in ${}^1R$. Nach Satz 1 ist insgesamt ${}^1R$ hyperzentral. ■

LEMMA 10. Sei $S:=R/\{{}_2({}^nR)\}$:
Ist ${}^nR$ schwach hyperzentral, so gilt:

(1) $\{{}_2({}^nR)\}$ ist hyper-$\{{}_2({}^nR)\}$-annullierend in R und

(2) $${}^{n+2}S=0.$$

BEWEIS. Wir setzen $D:=\{{}_2({}^nR)\}$.

(1) Nach Satz 2 ist $({}^nR)''$ hyper-$({}^nR)''$-annullierend in ${}^nR$, da ${}^nR$ schwach hyperzentral ist. Nach Lemma 8 angewendet auf $i:=n$, $m:=2$ und $A:=({}^nR)''$ ist D hyper-D-annullierend in R.

(2) Die Inklusion $*$ im Beweis von Lemma 9 angewendet auf ${}^nR$ liefert ${}^{n+2}R={}^2({}^nR)\subseteq({}^1({}^nR))'\subseteq({}^nR)''\subseteq\{{}_2({}^nR)\}$. Folglich ist ${}^{n+2}S=0$. ■

LEMMA 11. Aus $*$ $(T\circ T)\circ(T\circ T)=0$ folgt $\wedge\, a,b,c,d\in T$

$$(a\circ b)(b\circ c)(c\circ d)=0 \text{ und } (c\circ a)(c\circ b)(c\circ d)=0.$$

Beweis. Seien $a, b, c, d, e, f \in T$. Es gilt:

$$**((e \circ f) \circ c)(c \circ d) = (e \circ f) \circ (c \circ cd) - c((e \circ f) \circ (c \circ d)) = 0.$$

Indem man $*$ beachtet und in $**$ e und f geeignet wählt, folgt

$$(a \circ b)(b \circ c)(c \circ d) = (b \circ c)(a \circ b)(c \circ d) =$$

$$= ((ba \circ b) \circ c)(c \circ d) - b((a \circ b) \circ c)(c \circ d) = 0$$

und

$$(c \circ a)(c \circ b)(c \circ d) = (((a \circ b) \circ c) \circ c)(c \circ d) +$$

$$+ c((a \circ b) \circ c)(c \circ d) - ((ac \circ b) \circ c)(c \circ d) + a((c \circ b) \circ c)(c \circ d) = 0. \quad \blacksquare$$

Lemma 12. Sei T Unterring von S:

$$\text{Aus } (T \circ T) \circ (T \circ T) = 0 \text{ und } S \circ T \subseteq T \text{ folgt}$$

$$\{a \circ b\}^3 = 0 \wedge a,\ b \in T.$$

Beweis. Seien $a, b, c, d \in T$ und $r, s \in S$. Setzt man in

$$(a \circ b)r(a \circ b)s(a \circ b)$$

$$(a \circ b)r = (a \circ b) - (r \circ a) \circ b - a \circ (r \circ b) \text{ und}$$

$$s(a \circ b) = (a \circ b)s + (s \circ a) \circ b + a \circ (s \circ b) \text{ ein}$$

und rechnet nach den Distributivgesetzen aus, so erhält man neun Summanden. Wir weisen nach, daß jeder dieser Summanden 0 ist, wobei evt. multiplikative Faktoren r und s o.B.d.A. getilgt seien. Hierzu wenden wir Lemma 11 auf T an. Wegen $r \circ a$, $r \circ b, s \circ a$, $s \circ b \in T$ läßt sich jeder Summand bis aufs Vorzeichen in einen Ausdruck überführen, der sich bei geeigneter Buchstabenwahl einem der in Lemma 11 angegebenen Typen unterordnet. Demnach ist jeder Summand gleich 0. Hieraus folgt $(a \circ b)r(a \circ b)s(a \circ b) = 0$. Entsprechend weist man nach, daß

$$(a \circ b)r(a \circ b)^2 = 0,\ (a \circ b)^2 s(a \circ b) = 0 \text{ und } (a \circ b)^3 = 0 \text{ gilt.}$$

Insgesamt folgt die Behauptung. $\blacksquare$

Satz 6. Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(a) R' ist hypernilpotent in R.

(b) R ist hyperkommutativ.

(c) Zu jedem R'-epimorphen Bild S von R gibt es einen Unterring T von S, so daß $S \circ T \subseteq T$, $T \circ T \supset 0$ und $(T \circ T) \circ (T \circ T) = 0$.

BEWEIS.

$(a) \Rightarrow$ (b). Da R/R' hyperkommutativ ist, bleibt zu beweisen, daß R' hyperkommutativ in R ist. Sei deshalb S ein R'-epimorphes Bild von R. Man wählt ein nilpotentes Ideal A in S mit $0 \subset A \subseteq S'$ und weiter $n \geq 1$ so, daß $0 \subset A^n$ und $A^{n+1} = 0$. A^n ist dann ein kommutatives Ideal in S mit $0 \subset A^n \subseteq A \subseteq S'$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Sei S ein R'-epimorphes Bild von R. Man wählt ein kommutatives Ideal A in S mit $0 \subset A$. Sei P maximal in der A enthaltenden Menge $(Q \mid Q$ ist Ideal von S, $A \subseteq Q$, $Q \circ Q = 0)$. Wegen $0 \subset S'$ ist $P \subset S$. Man kann demnach ein kommutatives Ideal C/P in S/P wählen mit $0 \subset C/P$. Da C Ideal in S ist, gilt $S \circ C \subseteq C$. Wegen $P \subset C$ und der Maximaleigenschaft von P ist $C \circ C \supset 0$. Weiter gilt $(C \circ C) \circ (C \circ C) = 0$. Wir setzen deshalb $T := C$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Sei S ein R'-epimorphes Bild von R und T wie bei (c) gewählt. Es gibt $a, b \in T$ mit $a \circ b \neq 0$. Nach Lemma 12 folgt $\{a \circ b\}^3 = 0$, wobei $0 \subset \{a \circ b\} \subseteq S'$ gilt. ■

SATZ 7. Aus ${}^mR = 0$ folgt, daß R hyperkommutativ ist.

BEWEIS. Es reicht Bedingung (c) von Satz 6 nachzuweisen. Sei S ein R'-epimorphes Bild von R. Aus ${}^mR = 0$ folgt ${}^mS = 0$. Wegen $S' \supset 0$ ist $m \geq 2$. Es läßt sich deshalb $n \geq 1$ so wählen, daß ${}^nS \supset 0$ und ${}^{n+1}S = 0$ gilt. Für $T := {}^{n-1}S$ gilt $T \circ T \supset 0$, $(T \circ T) \circ (T \circ T) = 0$ und nach Lemma 7.(3) auch $R \circ T \subseteq T$. ■

Wir bemerken, daß die im folgenden auftretende Voraussetzung « ${}^nR$ ist schwach hyperzentral » die Bedingungen « ${}^nR = 0$ » und « R ist schwach hyperzentral » zu Spezialfällen hat.

SATZ 8. Ist ${}^nR$ schwach hyperzentral, so ist R' hypernilpotent in R und R hyperkommutativ.

BEWEIS. Sei $A := \{z({}^nR)\}$. Nach Lemma 10 ist A hyper-A-annullierend in R und damit hypernilpotent in R. Da für $S := R/A$ nach Lemma 10 ${}^{n+2}S=0$ gilt, ist nach Satz 7 $S'=R'/A$ hypernilpotent in R/A. Insgesamt ist R' hypernilpotent in R. Nach Satz 6 ist R auch hyperkommutativ. ■

SATZ 9. Ist ${}^{n}R$ schwach hyperzentral und R/R' nil, so ist R hypernilpotent.

BEWEIS. Nach Satz 8 ist R' hypernilpotent. Es bleibt zu beweisen, daß $S := R/R'$ hypernilpotent ist. Sei T epimorphes Bild von S mit $T \supset 0$. Man wählt $0 \neq a \in T$. Aus $a^m=0$ mit $m \geq 1$ und $T \circ a=0$ folgt $\{a\}^m=0$. ■

SATZ 10. Ist ${}^{n}R$ schwach hyperzentral, so ist R' nil. Ist ${}^{n}R$ schwach hyperzentral und R/R' nil, so ist R nil.

BEWEIS. Nach Satz 8 bzw. Satz 9 ist R' hypernilpotent in R bzw. R hypernilpotent . Bekanntlich ist dann R' bzw. R nil. ■.

LITERATUR

[1] JENNINGS, S. A.: *Central chains of ideals in an associative ring.* Duke Mathematical Journal, vol. 9 (1942), S. 341-355.

[2] JENNINGS, S. A.: *On rings whose associated Lie rings are nilpotent.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 53 (1947), S. 593-597.

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 settembre 1970.