

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIANO BRATTI

## **Sulle distribuzioni vettoriali di una variabile debolmente quasi periodiche**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 44 (1970), p. 383-397

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1970\\_\\_44\\_\\_383\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__383_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

SULLE DISTRIBUZIONI VETTORIALI  
DI UNA VARIABILE DEBOLMENTE QUASI PERIODICHE

GIULIANO BRATTI \*)

§ 1. Da un lavoro di Amerio [1] si ricava la seguente definizione: (siano  $R$  i reali con la topologia usuale,  $B$  uno spazio di Banach sui complessi  $C$ ,  $B'$  il suo duale).

DEF. Una mappa  $f: R \rightarrow B$  si dice debolmente quasi periodica (d.q.p.) se  $\forall \alpha \in B'$ ,  $\alpha \circ f, R \rightarrow C$ , è quasi periodica secondo H. Bohr.

In questa nota si dà l'estensione della definizione di Amerio al caso delle distribuzioni vettoriali di una variabile, studiandone qualche conseguente proprietà. In particolare si ottiene:

a) nel § 2, una caratterizzazione topologica dello spazio vettoriale delle distribuzioni soddisfacenti la definizione estesa, mediante la  $\varepsilon$ -topologia tensoriale di Grothendieck ([10], pag. 434);

b) nel § 3, si dimostra che l'estensione della definizione di Amerio coincide con la « naturale » estensione della definizione scalare quasi periodica. Nel fatto: una distribuzione scalare  $T$  di dominio  $\mathfrak{D}_{L^1}$  ( $\mathfrak{D}_{L^1}$  definito come in § 2) si dice quasi periodica se l'insieme delle sue traslate  $(\tau_h T)$  è relativamente compatto in  $\mathfrak{B}'$  duale forte di  $\mathfrak{D}_{L^1}$ .

È naturale, allora, pensare che, se  $E$  è uno spazio vettoriale topologico, una forma lineare e continua  $T$  di  $\mathfrak{D}_{L^1}$  in  $E$  si dica quasi periodica, se, ancora, l'insieme delle sue traslate  $(\tau_h T)$  è relativamente compatto in  $L(\mathfrak{D}_{L^1}; E)$ , spazio delle forme lineari e continue di  $\mathfrak{D}_{L^1}$  in  $E$ , quando

---

\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, 35100 Padova.

quest'ultimo ha la topologia della convergenza uniforme sui limitati di  $\mathfrak{D}_{L^1}$ ;

c) nel § 4, si definisce una mappa di valor medio vettoriale per le distribuzioni soddisfacenti la definizione estesa e di dimostra che sussiste un teorema analogo al teorema di unicità dello sviluppo di Fourier, già classico per le funzioni e distribuzioni scalari quasi periodiche e per le funzioni vettoriali fortemente quasi periodiche, per le distribuzioni considerate;

d) nei §§ 5 e 6, dopo la definizione di distribuzione vettoriale fortemente quasi periodica e lo studio di qualche sua proprietà, si ottiene un teorema analogo a uno di Amerio, precisamente: *se  $B$  è uno spazio di Banach e se la distribuzione  $T \in L_b(\mathfrak{D}_{L^1}; B)$  è debolmente quasi periodica, essa è quasi periodica (in senso forte) se e solo se  $(T \cdot A) = \{\langle T \cdot \varphi, \cdot \rangle, \forall \varphi \in A\}$ ,  $A$  limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1}$ , è relativamente compatto in  $B$ .*

§ 2. Sia  $\mathfrak{D}_{L^1}$  lo spazio vettoriale delle funzioni complesse di variabile reale, indefinitamente derivabili, con ogni loro derivata, ed esse stesse, appartenenti a  $L^1$ ; su  $\mathfrak{D}_{L^1}$ , un sistema di intorni di zero sia costituita dai  $V(m, \varepsilon)$ ,  $m$  naturale,  $\varepsilon$  reale positivo,

$$V(m, \varepsilon) = \{f \in \mathfrak{D}_{L^1} : \sup_{p \leq m} \int_{-\infty}^{+\infty} |D^p f| dx \leq \varepsilon\},$$

$\mathfrak{D}_{L^1}$  risulta  $F$ -spazio, [7], pag. 199.

Il duale forte di  $\mathfrak{D}_{L^1}$  sia  $\mathfrak{B}'$ ; il sottospazio di  $\mathfrak{B}'$  delle distribuzioni quasi periodiche sia  $\mathfrak{B}'_{q.p.}$  (in [7], tale sottospazio è indicato con il simbolo  $\mathfrak{B}'_{p.p.}$ ).

$\mathfrak{E}$  sia lo spazio vettoriale delle funzioni complesse di variabile reale, indefinitamente derivabili, con la topologia vettoriale dell'uniforme convergenza su ogni compatto di  $R$ , i reali, delle funzioni e di ogni loro derivata;  $\mathfrak{E}$  è uno spazio di Fréchet.  $\mathfrak{E}'$  sia il duale forte di  $\mathfrak{E}$ .

Per altro, nel seguito  $E$  è sempre uno spazio vettoriale topologico, localmente convesso, di Hausdorff, con topologia debole,  $E_\sigma$ , completa.

DEF. 1. In  $L_b = L_b(\mathfrak{D}_{L^1}; E_\sigma)$ , spazio vettoriale su  $C$ , i complessi delle forme lineari e continue  $T$  di  $\mathfrak{D}_{L^1}$  in  $E_\sigma$  con la topologia vettoriale dell'uniforme convergenza sui limitati di  $\mathfrak{D}_{L^1}$ ,  $T$  si dice debolmente quasi periodica (d.q.p.) se  $'T : E' \rightarrow \mathfrak{B}'$ ,  $E'$  duale di  $E_\sigma$ ,  $'T(\alpha) = \alpha \circ T$ , ha co-dominio  $\mathfrak{B}'$  q.p.

Se  $\alpha \in E'$ ,  $\Psi_\alpha : L_b \rightarrow \mathfrak{B}'$ ,  $\Psi_\alpha(T) = \alpha \circ T$ , è continua; anzi,  $b$  topologia posta su  $L_b$  è la meno fine che rende continue le  $\Psi_\alpha$ ,  $\forall \alpha \in E'$ . Indicato con  $L_{d.q.p.}$  il sottospazio di  $L_b$  delle  $T$  d.q.p. risulta:

$$L_{d.q.p.} = \cap \{ \Psi_\alpha^{-1}(\mathfrak{B}'_{q.p.}), \forall \alpha \in E' \},$$

intersezione in  $L_b$ .

Poichè  $\mathfrak{B}'_{q.p.}$  è chiuso in  $\mathfrak{B}'$ ,  $L_{d.q.p.}$  è chiuso in  $L_b$ ;  $L_b$  è completo, poichè  $\mathfrak{D}_{L^1}$  è metrico ed  $E_\sigma$  completo; allora  $L_{d.q.p.}$ , con la topologia relativa da  $L_b$ , è completo.

Si ha:  $L_{d.q.p.} \simeq E_\sigma \otimes_\varepsilon \widehat{\mathfrak{B}'_{q.p.}}$  ( $\widehat{\otimes}_\varepsilon$  è il completamento della  $\varepsilon$ -topologia di Grothendieck su  $E_\sigma \otimes \mathfrak{B}'_{q.p.}$ ).

Per provare l'isomorfismo di sopra, sarà dimostrato che:

a)  $E \otimes \mathfrak{B}'$  è denso in  $L_{d.q.p.}$ ;

b)  $\psi : L_{d.q.p.} \rightarrow L_\varepsilon (E'_m; \mathfrak{B}'_{q.p.})$ ,  $\psi(T) = \varphi_T$ ,  $\varphi_T(\alpha) = \alpha \circ T$ ,  $\alpha \in T'$ , è isomorfismo topologico ( $m$  su  $E'$  è la topologia di MacKey;  $L_\varepsilon$  ha la topologia dell'uniforme convergenza sugli equicontinui di  $E'$ , duale di  $E_\sigma$ ).

DIMOSTRAZIONE. a) sia  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(A, V)$ ,  $A$  limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1}$ ,  $V$  intorno di zero in  $E_\sigma$ , un intorno di zero in  $L_{d.q.p.}$ .  $\mathcal{O} \supseteq \mathcal{O}(A, V_1)$ , dove  $V_1 = \{ u \in E, |\alpha_k(u)| \leq \varepsilon, k = 1, 2, \dots, n; \varepsilon$  reale positivo,  $\alpha_k \in E'$  linearmente indipendenti }.

Scelto  $u_i \in \cap \{ \text{Ker}(\alpha_j), j \neq i \}$ , con  $\alpha_i(u_i) = 1$ , se  $T \in L_{d.q.p.}$  si ha:

$$T - \sum_1^n u_i \otimes (\alpha_i \circ T) \in \mathcal{O}(A, V_1) \subseteq \mathcal{O}.$$

Nel fatto: se  $\varphi(x) \in A$ ,

$$\alpha_k \langle T \cdot \varphi \rangle - \alpha_k \left[ \sum_1^n u_i \langle \alpha_i \circ T \cdot \varphi \rangle \right] = \langle \alpha_k \circ T \cdot \varphi \rangle - \langle \alpha_k \circ T \cdot \varphi \rangle = 0;$$

b) dimostriamo che  $\psi(T)$  appartiene a  $L_\varepsilon(E'_m; \mathfrak{B}'_{q.p.})$ .

Sia  $A$  limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1}: A^0 \cap \mathfrak{B}'_{q.p.}$ ,  $A^0$  in  $\mathfrak{B}'$ , è intorno di zero in  $\mathfrak{B}'_{q.p.}$ .  $\langle T \cdot A \rangle = \cup \{ \langle T \cdot \varphi \rangle, \varphi \in A \}$  è totalmente limitato in  $E_\sigma$ ; allora  $\Gamma(\langle T \cdot A \rangle)^-$ , estensione convessa bilanciata e chiusa di  $\langle T \cdot A \rangle$ , è compatta in  $E_\sigma$ , [12], pag. 113.  $\{ \Gamma(\langle T \cdot A \rangle)^- \}^0$  è in  $E'$   $m$ -intorno di zero; se  $\alpha \in \{ \Gamma(\langle T \cdot A \rangle)^- \}^0$  e  $\varphi(x) \in A$ ,  $|\langle \alpha \circ T \cdot \varphi \rangle| \leq 1$ . Ciò implica  $\psi(T) \in L_\varepsilon(E'_m; \mathfrak{B}'_{q.p.})$

$\psi$  è iniettiva: se  $\psi(T) = 0$ , allora  $\forall \alpha \in E'$ ,  $\alpha \circ T = 0$ : per il teorema di Hahn-Banach  $T \equiv 0$ .

$\psi$  è suriettiva: sia  $\varphi: E'_m \rightarrow \mathfrak{B}'_{q.p.}$ ;  $\varphi: E'_m \rightarrow \mathfrak{B}'$  e, quindi,  $\varphi: E'_\sigma \rightarrow \mathfrak{B}'_\sigma$  è ancora continua, [10], pag. 367.

È continua anche la trasposta di  $\varphi$ :  ${}^t\varphi: (\mathfrak{B}'_\sigma)'_m \rightarrow (E'_\sigma)_m$ . Ma  $(\mathfrak{B}'_\sigma)'_m = \mathfrak{D}_{L^1}$  ed  $E = (E'_\sigma)'$  sicchè  ${}^t\varphi: \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow E_\sigma$ . Poichè  $\alpha \circ {}^t\varphi = \varphi(\alpha) \in \mathfrak{B}'_{q.p.}$ ,  $\psi({}^t\varphi) = \varphi \in L_\varepsilon(E'_m; \mathfrak{B}'_{q.p.})$

$\psi$  è continua e aperta:

$$\mathfrak{M}(\{\alpha\}, A^0 \cap \mathfrak{B}'_{q.p.}) = \{ T \in L_\varepsilon : \alpha \circ T \in A^0 \cap \mathfrak{B}'_{q.p.}, \forall \alpha \in \{\alpha\} \},$$

$\{\alpha\}$  equicontinuo di  $E'$ , è intorno di zero in  $L_\varepsilon \cdot \{\alpha\}^0$ , polare di  $\{\alpha\}$  in  $E$ , è intorno di zero in  $E_\sigma$ ; allora l'intorno di zero in  $L_{d.q.p.}$ ,  $\mathfrak{M}(A, \{\alpha\}^0)$ , è mappato da  $\psi$  su  $\mathfrak{M}(\{\alpha\}, A^0 \cap \mathfrak{B}'_{q.p.})$ .

Poichè  $L_\varepsilon(E'_m; \mathfrak{B}'_{q.p.})$  subordina su  $E_\sigma \otimes \mathfrak{B}'_{q.p.}$  la  $\varepsilon$ -topologia,  $L_{d.q.p.} \simeq E_\sigma \otimes_\varepsilon \mathfrak{B}'_{q.p.}$ .

**OSSERVAZIONE 1.** Sia  $B$  uno spazio di Banach sui complessi e  $B_\sigma$   $B$  con la sua topologia debole.  $\mathfrak{C} = \{ f: R \rightarrow B_\sigma, f \text{ continua e limitata} \}$ , su  $\mathfrak{C}$  la topologia vettoriale sia quella dell'uniforme convergenza su  $R$ . Se  $B_\sigma$  è completo  $\mathfrak{C}$  è completo;  $\mathfrak{C}$  contiene le funzioni debolmente quasi periodiche di Amerio. Indicato con  $\mathfrak{C}_{d.q.p.}$  il sottospazio di  $\mathfrak{C}$  di tali funzioni esso è chiuso in  $\mathfrak{C}$  e, quindi, completo. Indicato con  $\mathfrak{C}_{q.p.}$  lo spazio vettoriale delle funzioni complesse, di variabile reale, quasi periodiche secondo H. Bohr, con la topologia dell'uniforme convergenza su  $R$  si ha, come sopra,  $\mathfrak{C}_{d.q.p.} \simeq B_\sigma \otimes_\varepsilon \mathfrak{C}_{q.p.}$ .

La caratterizzazione trovata per  $\mathfrak{C}_{d.q.p.}$  equivale ad un teorema di approssimazione delle  $f \in \mathfrak{C}_{d.q.p.}$  mediante polinomi trigonometrici vet-

toriali:  $f \in \mathcal{C}$  è d.q.p. se e solo se esiste qualche rete di polinomi trigonometri vettoriali che l'approssima.

**OSSERVAZIONE 2.** Sia  $\mathfrak{B}_{q.p.} = \{f: R \rightarrow C, f \in \mathcal{C}^\infty, \text{quasi periodica secondo Bohr, assieme ad ogni sua derivata}\}$ . Si ha:  $E \otimes \mathfrak{B}_{q.p.}$  denso in  $L_{d.q.p.}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** È sufficiente tener presente che  $\mathfrak{B}_{q.p.}$  è denso in  $\mathfrak{B}'_{q.p.}$ , [7], pag. 206.

§ 3. Per la caratterizzazione delle  $T \in L_{d.q.p.}$  si hanno i seguenti:

a) Sia  $T \in L_{d.q.p.}$ :  $(\tau_h T)$ ,  $h \in R$ , è relativamente compatto in  $L_b$ . Viceversa: Se  $T \in L_b$  e  $(\tau_h T)$  è relativamente compatto in  $L_b$ ,  $T \in L_{d.q.p.}$  (se  $h \in R$  e  $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_{L^1}$ ,  $\langle \tau_h T \cdot \varphi \rangle = \langle T \cdot \varphi(x+h) \rangle$ ).

Il concetto di mappa trasposta permette di enunciare a) anche così:

a') Sia  $T \in L_b$ :  $T \in L_{d.q.p.}$  se e solo se  $(\tau_h' T)$ ,  $'T: E'_m \rightarrow \mathfrak{B}'$ , è relativamente compatto in  $L_e(E'_m; \mathfrak{B}')$ .

La caratterizzazione delle distribuzioni scalari quasi periodiche in [7], pag. 206, b) e la definizione di funzione d.q.p. danno luogo a:

b) sia  $\mathfrak{D}$  il dominio delle distribuzioni scalari:  $T \in L_b$  è d.q.p. se e solo se  $\langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle: R \rightarrow E_\sigma$  è d.q.p.  $\forall \gamma(x) \in \mathfrak{D}$ .

c) Sia  $T \in L_b$ . Posto  $\theta_T(h): R \rightarrow L_b$ ,  $\theta_T(h) = \tau_h T$ ,  $T$  è d.q.p. se e solo se  $\theta_T(h)$  soddisfa la proprietà di Bochner generalizzata (da ogni rete  $\theta_T(h+h_i)$  si può estrarre una sottorete,  $\theta_T(h+h_{i_j})$  convergente, uniformemente rispetto a  $h \in R$ , in  $L_b$ ).

**DIMOSTRAZIONE.** a) Si fa uso del fatto che in uno spazio vettoriale topologico completo i concetti di « precompatto » (totalmente limitato) e di « relativamente compatto » coincidono.

Sia  $T \in L_{d.q.p.}$  è sufficiente dimostrare che  $(\tau_h T)$  è precompatto in  $L_b$  rispetto ad intorni di zero del tipo  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(A, \{\alpha\}^0)$ ,  $A$  limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1}$ ,  $\alpha \in E'$ ,  $\{\alpha\}^0 = \{u \in E: |\alpha(u)| \leq 1\}$ .

Se  $(\tau_h T)$  non fosse precompatto in  $L_b$  esisterebbe  $\mathcal{O}$  intorno di zero in  $L_b$  tale che una relazione del tipo:

$$(\tau_h T) \subseteq \tau_{h_1} T + \mathcal{O}\mathcal{L} \cup \dots \cup \tau_{h_n} T + \mathcal{O}\mathcal{L}, \quad n < +\infty,$$

non è mai vera. Si può estrarre allora da  $(\tau_h T)$  una sequenza  $(\tau_{h_i} T)$  con la proprietà:

$$\tau_{h_{i+1}} T \notin \tau_{h_i} T + \mathcal{O}\mathcal{L} \cup \dots \cup \tau_{h_i} T + \mathcal{O}\mathcal{L}.$$

Poichè  $\alpha \circ T \in \mathfrak{B}'_{q.p.}$  e  $\alpha \circ (\tau_h T) = \tau_h(\alpha \circ T)$ , da  $\tau_{h_i}(\alpha \circ T)$  si può estrarre una sottosequenza convergente in  $\mathfrak{B}'_{q.p.}$ . Indicato con  $V$  l'intorno di zero in  $\mathfrak{B}'$ ,  $V = \{Q \in \mathfrak{B}' : |\langle Q \cdot A \rangle| \leq 1\}$  esiste  $j_0 = j_0(V)$  tale che se  $j_1$  e  $j_2$  sono  $\geq j_0$  si ha:

$$|\langle \tau_{h_{j_1}}(\alpha \circ T) - \tau_{h_{j_2}}(\alpha \circ T) \cdot A \rangle| \leq \varepsilon.$$

Assurdo.

Viceversa. sia  $(\tau_h T)$  relativamente compatto in  $L_b$ .

Se  $\alpha \in E'$ ,  $\psi_\alpha : L_b \rightarrow \mathfrak{B}'$  è continua; valendo  $\{\psi_\alpha(\tau_h T)\} \equiv \{\tau_h(\alpha \circ T)\}$ ,  $\alpha \circ T \in \mathfrak{B}'_{q.p.}$ . Allora  $T$  è d.q.p.

a') Per la dimostrazione di a') è sufficiente tener presente che la mappa  $\psi$ , usata nella caratterizzazione topologica di  $L_{d.q.p.}$  in § 2, con dominio  $L_b$  e codominio  $L_\varepsilon (E'_m; \mathfrak{B}')$  è la mappa di trasposizione ed è isomorfismo topologico.

b) Sia  $T \in L_{d.q.p.}$ ; se  $\alpha \in E'$  e  $\gamma(t) \in \mathfrak{D}$ ,

$$\alpha \langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle = \langle (\alpha \circ T)_t \cdot \gamma(x-t) \rangle, \quad x \in R.$$

Poichè  $\alpha \circ T \in \mathfrak{B}'_{q.p.}$   $\forall \alpha \in E'$ ,  $\langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle$  è funzione, di  $R$  in  $E_\sigma$ , d.q.p.

Viceversa: se  $\langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle$  è d.q.p.,  $\alpha \langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle$  è quasi periodica. Valendo cioè  $\forall \gamma(t) \in \mathfrak{D}$ ,  $\alpha \circ T$  è quasi periodica: allora  $T$  è d.q.p.

c) Per la dimostrazione di c) è sufficiente tener presente che se la rete  $T_j$  converge a  $Q$  in  $L_b$ , allora  $\tau_h T_j$  converge a  $\tau_h Q$ , uniformemente rispetto a  $h \in R$ .

Ciò a causa del fatto che se  $A \subseteq \mathfrak{D}_{L^1}$  è limitato,  $(\tau_h A) = \{\varphi(x+h), \forall \varphi \in A, \forall h \in R\}$  è ancora limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1}$ .

OSSERVAZIONE 1. Se  $E_\sigma$  non è completo a) continua a valere se si sostituisce a relativamente compatto, precompatto.

OSSERVAZIONE 2. La dimostrazione di a) realizza quanto affermato in b) del § 1.

OSSERVAZIONE 3. La dimostrazione di b) prova, implicitamente, che se  $\varphi(t) \in \mathfrak{D}_L^1$ ,  $\langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle$ , funzione di  $R$  in  $E_\sigma$ , è d.q.p.; è sufficiente tener presente che  $\mathfrak{D}$  è denso in  $\mathfrak{D}_L^1$ . Allora, se  $\varphi(t) \in \mathfrak{D}_L^1$ , esiste una sequenza,  $\gamma_i(t) \in \mathfrak{D}$ , con  $\lim_i \gamma_i(t) = \varphi(t)$ ; poichè si ha:  $\lim_i \gamma_i(x-t) = \varphi(x-t)$  uniformemente rispetto a  $x \in R$ , si ha, pure,

$$\langle T_t \cdot \gamma_i(x-t) \rangle \rightarrow \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle.$$

§ 4. Sia  $u \otimes T \in E \otimes \mathfrak{B}'_{a \cdot b}$ ; se  $\alpha \in E'$  e se  $M : \mathfrak{B}'_{q.p.} \rightarrow C$  è la mappa lineare del valor medio delle  $T \in \mathfrak{B}'_{q.p.}$ , si ha:

$$M[\alpha \circ (u \otimes T)] = M(T)\alpha(u).$$

Si consideri  $i \otimes_\epsilon M : E_\sigma \otimes_\epsilon \mathfrak{B}'_{q.p.} \rightarrow E_\sigma \otimes_\epsilon C$ ,  $i$  identità in  $E_\sigma$ ,  $i \otimes_\epsilon M[u \otimes_\epsilon T] = u \otimes_\epsilon M(T)$ ,  $i \otimes_\epsilon M$  è continua, [10], pag. 439; si può quindi estendere in uno ed un solo modo, per continuità, a  $E_\sigma \widehat{\otimes}_\epsilon \mathfrak{B}'_{q.p.}$ , con valori in  $E_\sigma \widehat{\otimes}_\epsilon C$ . Indicata con  $M_1$  tale estensione  $M_1$  si può pensare con codominio  $E$ . Assumiamo  $M_1$  come mappa lineare di valor medio vettoriale delle  $T$  d.q.p.

Sia  $\lambda \in R$  e  $a_\lambda(T)$ ,  $T \in L_{d.q.p.}$ , sia così definito:

$$\bar{a}_\lambda(T) = M_1[(\exp. - 2\pi i \lambda x)T].$$

Si ha:  $\forall \alpha \in E'$ ,  $\alpha[a_\lambda(T)] = a_\lambda(\alpha \circ T)$ ,  $a_\lambda(Q)$ ,  $Q \in \mathfrak{B}'_{q.p.}$ , definito come in [7], pag. 208.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $T \in L_{d.q.p.}$ :  $T = \lim_j S_j$  in  $L_{d.q.p.}$ ,  $S_j = \sum_{(j)}^k u_k \otimes T_k \in E \otimes \mathfrak{B}'_{q.p.}$ . Risulta facilmente:

$$(\exp. - 2\pi i \lambda x)S_j = \sum_k^{(j)} u_k \otimes (\exp. - 2\pi i \lambda x)T_k.$$

La proprietà dei limitati in  $\mathfrak{D}_L^1$  dà:

$$(\exp. - 2\pi i \lambda x)S_j \rightarrow (\exp. - 2\pi i \lambda x)T$$

in  $L_{d.q.p.}$ . Allora

$$\bar{a}_\lambda(T) = \lim_j M_1[(\exp. - 2\pi i \lambda x) S_j] = \lim_j \Sigma_k^{(j)} a_\lambda(T_k) u_k.$$

Ne segue:

$$\alpha[\bar{a}_\lambda(T)] = \lim_j \Sigma_k^{(j)} a_\lambda(T_k) \alpha(u_k).$$

È, anche,  $\lim_j \alpha \circ S_j = \alpha \circ T$  in  $\mathcal{B}'_{q.p.}$ , e, a causa della continuità di  $M$  su  $\mathcal{B}'_{q.p.}$ ,

$$\lim_j a_\lambda(\alpha \circ S_j) = a_\lambda(\alpha \circ T).$$

La dimostrazione è compiuta.

**OSSERVAZIONE 1.** Segue facilmente, da sopra, se  $\bar{a}_\lambda(T) = 0, \forall \lambda \in R$ ,  $T$  è identicamente nulla.

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $\bar{a}_\lambda(T) = 0 \forall \lambda \in R$ ,  $\alpha \circ T$  è tale che  $a_\lambda(\alpha \circ T) = 0 \forall \lambda \in R$ . Allora  $\alpha \circ T \equiv 0 \forall \alpha \in E'$ . Ricordando il teorema di Hahn-Banach,  $T \equiv 0$ .

**OSSERVAZIONE 2.** Il significato delle  $\bar{a}_\lambda(T)$  è quello di coefficienti di Fourier vettoriali delle  $T$  d.q.p. Si ha, come enunciato in c) § 1,

$$T_1 \equiv T_2, T_1 \text{ e } T_2 \text{ d.q.p., se e solo se } \{\bar{a}_\lambda(T_1)\}_{\lambda \in R} \equiv \{\bar{a}_\lambda(T_2)\}_{\lambda \in R}.$$

**OSSERVAZIONE 3.** Sia  $g : R \rightarrow E_\sigma$  funzione d.q.p.

È naturale pensare il

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} 1/T \int_0^T g(x) dx$$

come valore medio vettoriale di  $g$ . Sia  $T_g : \mathcal{D}_{L^1} \rightarrow E_\sigma$ ,

$$\langle T_g \cdot \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi(x) dx : \alpha \circ T_g = T_{\alpha \circ g}, \quad \alpha \in E'.$$

Si ha:

$$M_1(T_g) = \lim_{T \rightarrow +\infty} 1/T \int_0^T g(x) dx.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia

$$\begin{aligned} \alpha \in E' : \alpha[M_1(T_g)] &= \alpha[\bar{a}_0(T_g)] = a_0(\alpha \circ T_g) = a_0(T_{\alpha \cdot g}) = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} 1/T \int_0^T \alpha(g(x)) dx = \alpha \left[ \lim_{T \rightarrow +\infty} 1/T \int_0^T g(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Valendo la relazione di sopra per ogni  $\alpha \in E'$  la dimostrazione è compiuta.

L'osservazione 1 e quest'ultimo risultato danno una conferma della accettabilità di  $M_1$  come mappa di valor medio vettoriale delle distribuzioni d.q.p.

§ 5. Sia  $B$  uno spazio di Banach sui complessi  $C$ .

**DEF. 2.** In  $L_b = L_b(\mathfrak{D}_{L^1}; B)$ , spazio vettoriale su  $C$  delle forme lineari e continue  $T$  di  $\mathfrak{D}_{L^1}$  in  $B$ , con la topologia dell'uniforme convergenza sui limitati di  $\mathfrak{D}_{L^1}$ ,  $T$  si dice (fortemente) quasi periodica, (q.p.), se l'insieme delle sue traslate,  $(\tau_h T)$ ,  $h \in R$ , in  $L_b$ , relativamente compatto.

È evidente che il sottospazio di  $L_b$ ,  $L_{q.p.}$ , delle  $T$  che sono q.p., è chiuso; poichè  $L_b$  è completo anche  $L_{q.p.}$ , con la topologia relativa da  $L_b$ , è completo. Risulta: Se  $f: R \rightarrow B$  è quasi periodica,  $T_f: \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow B$ ,

$$\langle T_f \cdot \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x),$$

è quasi periodica; l'insieme delle  $T_f$  è denso in  $L_{q.p.}$

**DIMOSTRAZIONE.** La prima affermazione dipende dal fatto che in  $\mathcal{C} = \mathcal{C}\{f: R \rightarrow B, \text{continue e limitate}\}$  con la topologia vettoriale dell'uniforme convergenza su  $R$ , se  $f(x)$  è quasi periodica,  $\{f(x+h), \forall h \in R\}$  è relativamente compatto. Indicato con  $\mathcal{C}_{q.p.}(B)$  il sottospazio di  $\mathcal{C}$  delle funzioni quasi periodiche, e pensato  $\mathcal{C}_{q.p.}(B)$  come sottospazio di  $L_b$ , la topologia relativa da  $L_b$  è meno fine dell'originale.

Per la dimostrazione della seconda affermazione si premettono i seguenti lemmi:

a) se  $T \in L_b$  e  $\{\alpha\}$  è un equicontinuo nel duale  $B'$  di  $B$ ,  $\{\alpha \circ T\}$  è limitato in  $\mathfrak{B}'$ ;

b) se  $T \in L_b$ ,  $\varphi(t)$  e  $\psi(t) \in \mathfrak{D}_{L^1}$ ,

$$\langle \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle = \langle \langle T_t \cdot \psi(x+t) \rangle \cdot \varphi(x) \rangle.$$

Per a) si ha: il polare di  $\{\alpha\}$  in  $B$ ,  $\{\alpha\}^0$ , è intorno di zero. Considerato  $V = V(A, \{\alpha\}^0)$ , intorno di zero in  $L_b$  se  $A$  è limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1}$ ,  $\rho T$ ,  $\rho \in R$ , è contenuto in  $V$ . Ciò implica:  $\rho\{\alpha \circ T\} \subseteq U = U(A, |\cdot| \leq 1)$  con  $U$  intorno di zero in  $\mathfrak{B}'$ . Allora  $\{\alpha \circ T\}$  è limitato in  $\mathfrak{B}'$ .

Per b) si ha  $\langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle : R \rightarrow B$  è scalarmente derivabile e, quindi, continua [9]; poichè  $\{\varphi(x-t)\}_{x \in R}$  è limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1}$ ,  $\langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle$  è limitata e, quindi, il simbolo  $\langle \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle$  ha significato.

Se  $\alpha \in \mathfrak{B}'$ ,

$$\alpha[\langle \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle] = \langle \langle (\alpha \circ T)_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle;$$

sicchè è sufficiente dimostrare b) nel caso che  $T \in \mathfrak{B}'$ .

In  $\mathfrak{B}'$  è denso  $\mathfrak{B}^1$ , [7], pag. 202; se  $f(t) \in \mathfrak{B}$ , facili calcoli danno:

$$\langle \langle f(t) \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle = \langle \langle f(x) \cdot \psi(x+t) \rangle \cdot \varphi(x) \rangle.$$

Sia  $T \in \mathfrak{B}'$ :  $T = \lim_j f_j(t)$ ,  $f_j(t) \in \mathfrak{B}$ , ciò implica:

$$\langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle = \lim_j \langle f_j(t) \cdot \varphi(x-t) \rangle$$

e la convergenza ha luogo uniformemente rispetto a  $x \in R$ . Allora:

$$\langle \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle = \int_{+\infty}^{-\infty} \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \psi(x) dx =$$

---

<sup>1)</sup>  $\mathfrak{B}$  sia lo spazio vettoriale delle funzioni di variabile reale, complesse, indefinitamente derivabili, limitate con ogni loro derivata. Su  $\mathfrak{B}$  la topologia vettoriale sia quella che ha un sistema di intorni di zero nei  $V(m, \epsilon) = \{f \in \mathfrak{B}, \sup |D^m f| \leq \epsilon, m \text{ naturale}, \epsilon \text{ reale positivo}\}$ .  $\mathfrak{B}$  è uno spazio di Fréchet.

$p \leq m$

$$\begin{aligned}
&= \lim_j \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_j(t) \cdot \varphi(x-t) \rangle \psi(x) dx = \lim_j \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_j(t) \cdot \psi(x+t) \rangle \varphi(x) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T_t \cdot \psi(x+t) \rangle \varphi(x) dx = \langle \langle T_t \cdot \psi(x+t) \rangle \cdot \varphi(x) \rangle.
\end{aligned}$$

Da a) e b) segue: sia  $\alpha_j(x) \in \mathfrak{D}$ ,  $\alpha_j(x) \rightarrow \delta$ ,  $\delta$  la distribuzione di Dirac, la convergenza avendo luogo in  $\mathfrak{E}'$  come in [7], pag. 166.

Sia  $T \in L_{q.p.}$  e  $V = V(A, \{\alpha\}^0)$  un intorno di zero in  $L_b$ :

$$\begin{aligned}
&| \alpha [ \langle \langle T_t \cdot \alpha_j(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle - \langle T \cdot \psi \rangle ] | = \\
&= | \langle \langle (\alpha \circ T)_t \cdot \alpha_j(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle - \langle \alpha \circ T \cdot \psi(x) \rangle | = \\
&= | \langle \alpha_j(x) \cdot \langle (\alpha \circ T)_t \cdot \psi(x+t) \rangle \rangle - \langle \delta \cdot \langle (\alpha \circ T)_t \cdot \psi(x+t) \rangle \rangle | = \\
&= | \langle \alpha_j(x) - \delta \cdot \langle (\alpha \circ T)_t \cdot \psi(x+t) \rangle \rangle |.
\end{aligned}$$

Per a):  $\langle (\alpha \circ T)_t \psi(x+t) \rangle$ ,  $\psi(x) \in A \subseteq \mathfrak{D}_{L^1}$  limitato,  $\alpha \in \{\alpha\} \subseteq B'$  equicontinuo, è limitato in  $\mathfrak{B}$ , poichè i limitati di  $\mathfrak{B}$  sono limitati anche in  $\mathfrak{E}$ , l'iniezione  $i: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{E}$  essendo continua, se  $j_0$  è opportuno,  $\forall j \geq j_0$  si ha:

$$| \langle \alpha_j(x) - \delta \cdot \langle (\alpha \circ T)_t \cdot \psi(x+t) \rangle \rangle | \leq 1.$$

Allora:

$$\langle T_t \cdot \alpha_j(x-t) \rangle - T \in V \text{ se } j \geq j_0.$$

Poichè  $\langle T_t \cdot \alpha_j(x-t) \rangle$  è quasi periodica, la dimostrazione è compiuta.

La dimostrazione di sopra dà, subito:  $T \in L_b$  è quasi periodica se e solo se  $\langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle: R \rightarrow B$  è quasi periodica  $\forall \gamma(t) \in \mathfrak{D}$ . (Estensione ad caso vettoriale di b) [7], pag. 206).

**DIMOSTRAZIONE.** Il tipo di convergenza in  $L_b$  rende la condizione necessaria evidente.

Per la condizione sufficiente si ha:  $\langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle: R \rightarrow B$ , quasi periodica  $\forall \gamma(t) \in \mathfrak{D}$  implica, secondo affermazione del teorema di sopra, che  $T$  è approssimata da funzioni quasi periodiche. Poichè  $L_{q.p.}$  è chiuso anche la condizione sufficiente è dimostrata.

OSSERVAZIONE 1. Se  $f: R \rightarrow B$  è d.q.p. senza essere q.p., e se è uniformemente continua,  $T_f$  è d.q.p. senza essere q.p.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga  $T_f$  q.p. Se  $\alpha_j(x) \rightarrow \delta$  come in [7], pag. 166 si ha:  $\langle (T_f)_t \cdot \alpha_j(x-t) \rangle$  quasi periodica. Se  $V$  è intorno di zero in  $B$  chiuso, convesso, bilanciato,  $p_V$ , seminorma associata a  $V$  è così definita:  $p_V(x) = \inf_{\rho \geq 0, \rho x \in V} \rho$ . Si ha:

$$\begin{aligned} p_V[f(x) - \langle (T_f)_t \cdot \alpha_j(x-t) \rangle] &= p_V\left[\int_{-1/j}^{+1/j} \alpha_j(t) f(x) dt - \int_{-1/j}^{+1/j} f(x-t) \alpha_j(t) dt\right] = \\ &= p_V\left[\int_{-1/j}^{+1/j} \alpha_j(t) [f(x) - f(x-t)] dt\right] \leq \int_{-1/j}^{+1/j} p_V[f(x) - f(x-t)] \alpha_j(t) dt. \end{aligned}$$

Poichè  $f(x)$  è uniformemente continua se  $j$  è opportuno,

$$p_V[f(x) - f(x-t)] \leq 1.$$

Ciò implica:

$$\int_{-1/j}^{+1/j} p_V[f(x) - f(x-t)] \alpha_j(t) dt \leq 1.$$

Allora:  $f(x)$  è approssimata uniformemente rispetto a  $x \in R$  da funzioni quasi periodiche. Assurdo. Si garantisce, così, l'esistenza di distribuzioni vettoriali che sono d.q.p. senza essere q.p.

§ 6. Le dimostrazioni nel § 5 ed il teorema di approssimazione delle funzioni vettoriali q.p. mediante polinomi trigonometrici vettoriali [2] danno il teorema citato in d) § 1: *Condizione necessaria e sufficiente al fine che  $T$  d.q.p. sia q.p. è che  $\forall A$  limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1}$ ,  $\langle T \cdot A \rangle = \langle \langle T \cdot \varphi \rangle, \forall \varphi \in A \rangle \subseteq B$  sia relativamente compatto.*

DIMOSTRAZIONE. *La condizione è necessaria.*

Sia  $V = V\{u \in B : \|u\| \leq \eta, \eta \text{ reale positivo}\}$  intorno di zero in  $B$ . Se  $A$  è limitato in  $\mathfrak{D}_{L^1}$  e se  $\varepsilon$  è un reale positivo, esiste un polinomio

trigonometrico a coefficienti in  $B$ , tale che, se  $T \in L_{q.p.}$ , si ha:

$$\| \langle T \cdot \varphi \rangle - \langle P \cdot \varphi \rangle \| \leq \varepsilon, \quad \forall \varphi \in A,$$

$P$  il polinomio.

$\langle P \cdot A \rangle = \{ \langle P \cdot \varphi \rangle \mid \forall \varphi \in A \}$  è relativamente compatto in  $B$ , poichè sottoinsieme limitato di un sottospazio vettoriale di dimensione finita di  $B$ . Ne segue: esiste

$$\{ u_1, u_2, \dots, u_n \} \subseteq B, \quad n < +\infty,$$

con

$$\langle P \cdot A \rangle \subseteq u_1 + V \cup u_2 + V \cup \dots \cup u_n + V.$$

Se

$$V_1 = V_1 \{ u \in B, \| u \| \leq \eta + \varepsilon \}$$

si ha: se  $\varphi(x) \in A$

$$\| \langle T \cdot \varphi \rangle - \langle P \cdot \varphi \rangle \| \leq \varepsilon$$

e, poichè

$$\| \langle P \cdot \varphi \rangle - u_i \| \leq \eta$$

per qualche

$$u_i \in \{ u_1, u_2, \dots, u_n \}, \quad \| \langle T \cdot \varphi \rangle - u_i \| \leq \eta + \varepsilon.$$

Allora:

$$\langle T \cdot A \rangle \subseteq u_1 + V_1 \cup u_2 + V_1 \cup \dots \cup u_n + V_1.$$

$\langle T \cdot A \rangle$  è precompatto in  $B$ .

**DIMOSTRAZIONE 1.** *La condizione è sufficiente.*

Si fa uso del teorema di Amerio [1] e dell'ultima proposizione del § 5.

$T: \mathfrak{D}_{L^1} \rightarrow B$  è senz'altro continua poichè l'immagine di ogni limitato è limitata e  $\mathfrak{D}_{L^1}$  è spazio di Fréchet.

Se  $\gamma(t) \in \mathfrak{D}$ ,  $\theta(x): R \rightarrow B$ ,  $\theta(x) = \langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle$  è d.q.p. poichè è d.q.p.  $T$ ;  $\theta(x)$  ha codominio relativamente compatto poichè  $\{ \theta(x), \forall x \in R \}$  è, in  $B$ , l'immagine mediante  $T$  del limitato  $A = \{ \gamma(x-t), \forall x \in R \}$  di  $\mathfrak{D}_{L^1}$ . Allora  $\theta(x)$  è q.p.  $\forall \gamma(t) \in \mathfrak{D}$ . Ne segue:  $T$  è q.p.

**DIMOSTRAZIONE 2.** La condizione sufficiente, come dimostrato di sopra, fa uso di un teorema, quello di Amerio, formulato per le funzioni. Se si suppone  $B$  con topologia debole completa, tale condizione può essere dimostrata direttamente. Nel fatto: si supponga  $(\tau_h T)$  non precompatto in  $L_b$ . Esiste  $U = U(A, \|\cdot\| \leq \varepsilon) = \{T \in L_b : \|\langle T \cdot A \rangle\| \leq \varepsilon\}$  e una sequenza,  $(\tau_{h_i} T) \subseteq (\tau_h T)$  con la proprietà:

$$\tau_{h_{i+1}} T \notin \tau_{h_i} T + U \cup \dots \cup \tau_{h_1} T + U.$$

Visto che  $B$  ha topologia debole completa, il fatto che  $T$  sia d.q.p. implica la possibilità di estrarre dalla sequenza  $(\tau_{h_i} T)$  una sottorete,  $(\tau_{h_{i_j}} T)$ , con  $\lim_j \tau_{h_{i_j}} T = Q$  in  $L_{d.q.p.}$ . Si pone, per brevità  $\tau_{h_{i_j}} T = b_j$ ; possibile determinare la rete  $\{\varphi_j\} \subseteq A$  con:  $\|\langle b_j \cdot \varphi_j \rangle - \langle b_{j'} \cdot \varphi_j \rangle\| > \eta > 0$ ,  $j'$  un successivo di  $j$ . In base alle ipotesi: da  $\langle b_j \cdot \varphi_j \rangle$  si può estrarre una sequenza,  $\langle b_{j_\mu}; \varphi_{j_\mu} \rangle$  convergente a un  $u_1 \in B$ ; da  $\langle b_{j'_\nu} \cdot \varphi_{j'_\nu} \rangle$  si può estrarre una sequenza,  $\langle b_{j'_\nu}; \varphi_{j'_\nu} \rangle$  convergente in  $B$  verso un  $u_2$ .

Per non complicare le notazioni si può supporre:  $\lim_j \langle b_j \cdot \varphi_j \rangle = u_1$ ,  $\lim_j \langle b_{j'} \cdot \varphi_j \rangle = u_2$  in  $B$  e, senz'altro,  $\|u_1 - u_2\| \geq \eta$ . Esiste  $\bar{\alpha} \in B'$  con:  $|\bar{\alpha}(u_1) - \bar{\alpha}(u_2)| = h > 0$ . Poichè  $b_j \rightarrow Q$  in  $L_{d.q.p.}$ ,  $\bar{\alpha} \circ b_j \rightarrow \bar{\alpha} \circ Q$  in  $B'$ ; ciò implica: esiste  $j_0$  tale che, se  $j$  e  $j' \geq j_0$

$$|\langle \bar{\alpha} \circ b_j \cdot \varphi_j \rangle - \langle \bar{\alpha} \circ b_{j'} \cdot \varphi_j \rangle| \leq h/2 \quad \text{Vi.}$$

Sicchè,  $|\bar{\alpha}(u_1) - \bar{\alpha}(u_2)| \leq h/2$ . Assurdo.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] AMERIO L.: *Funzioni debolmente quasi periodiche*. Rend. Sem. Mat. di Padova, 1960.
- [2] AMERIO L.: *Sul teorema di approssimazione delle funzioni quasi periodiche*. Acc. Naz. dei Lincei Rend. della Cl. di Sc. fis. mat. e nat. Serie VIII, vol. XXXIV, fasc. 2, febbraio 1963; e *Ancora sul teorema di approssimazione delle funzioni quasi periodiche*. Rend. Acc. Naz. dei Lincei, 36 (1964), pag. 101-106.
- [3] AMERIO L.: *Sull'integrazione delle funzioni quasi periodiche astratte*. Ann. di Mat., 1961.

- [4] AMERIO L.: *Abstract almost periodic functions and functional equations*. Boll. dell'Un. Mat. Italiana, Serie III, Anno XX, 1965, pag. 287-331.
- [5] BOCHNER S.: *Abstrakte fastperiodische Funktionen*. Acta Math., 1933.
- [6] FAVARD J.: *Leçons sur les fonctions presque periodiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1933.
- [7] SCHWARTZ L.: *Theorie des distributions*. Hermann, 1966.
- [8] SCHWARTZ L.: *Theorie des distributions à valeurs vectorielles*. Ann. Inst. Fourier, Tomo 7, 1957 e Tomo 8, 1958 .
- [9] SCHWARTZ L.: *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles*. Journal d'analyse mathématique, 1954, pag. 88-148.
- [10] TREVES F.: *Linear topological spaces, distributions and Kernels*. Accademie Press, 1967.
- [11] ZAJDMAN S.: *Corso C.I.M.E.* 1961.
- [12] KELLEY J. L., NAMIOKA I.: *Linear topological spaces*. D. Van Nostrand Company, 1963.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1<sup>o</sup> settembre 1970.