RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIO CESARE BAROZZI

Un problema al contorno non omogeneo in un dominio angoloso per equazioni fortemente quasi-ellittiche in due variabili (II)

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 319-337

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__319_0>

UN PROBLEMA AL CONTORNO NON OMOGENEO IN UN DOMINIO ANGOLOSO PER EQUAZIONI FORTEMENTE QUASI-ELLITTICHE IN DUE VARIABILI (II)

GIULIO CESARE BAROZZI *)

Introduzione.

Questo lavoro è una continuazione della nota precedente [1], recante lo stesso titolo; in esso estendiamo alcune valutazioni (relative al teorema di esistenza della soluzione ed alla dipendenza di quest'ultima dai dati al contorno) a spazi di Sobolev di ordine superiore rispetto a quelli considerati in [1].

Le notazioni e i procedimenti utilizzati in [1] verranno costantemente impiegati; riportiamo tuttavia la posizione del problema ed introduciamo alcune notazion ulteriori, rimandando per maggiori dettagli ai numeri 1 e 2 della nota citata.

Noi consideriamo operatori fortemente quasi-ellittici in due variabili del tipo

$$P(D)=\sum_{\alpha_1/m_1+\alpha_2/m_2=2} a_\alpha D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2};$$

i coefficienti sono supposti costanti. Per ogni $\xi \in R-\{0\}$, indichiamo con $\mu_1, \ldots, \mu_{m_2}$ le radici dell'equazione

$$\sum_\alpha a_\alpha (i\xi)^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2}=0$$

aventi parte reale negativa: abbiamo $\mu_k(\xi)=\omega_k \cdot (|\xi|^{m_1})^{1/m_2}$, con $\operatorname{Re}\omega_k<0$, $k=1, 2, \ldots, m_2$.

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1970.

Consideriamo il problema Dirichlet non omogeneo: determinare una soluzione u di $P(D)u=0$ per $x_1>0$, $x_2>0$, con le condizioni al contorno

$$(1) \qquad D_{x_1}^h u(0, x_2)=0, \qquad x_2>0, \qquad h=0, 1, \ldots, m_1-1;$$

$$(2) \qquad D_{x_2}^j u(x_1, 0)=f_j(x_1), \qquad x_1>0, \qquad j=0, 1, \ldots, m_2-1.$$

Sia $V(\xi)=W(\mu_1(\xi), \ldots, \mu_{m_2}(\xi))$ il determinante di Vandermonde delle radici $\mu_1, \ldots, \mu_{m_2}$, $V_{jk}(\xi)$ il completameto algebrico di $\mu_k{}^j$ in esso.

Si ha

$$V_{jk}(\xi)/V(\xi)=c_{jk}\,|\,\xi\,|^{-jm_1/m_2},$$

con

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{m_2} \omega_k{}^r c_{jk}=\delta_{jk}, \qquad j, r=0, 1, \ldots, m_2-1,$$

dove $\delta_{j,r}$ è il simbolo di Kronecker. La soluzione u è ricercata sotto la forma

$$(4) \quad u(x_1, x_2)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{m_2-1} \sum_{k=1}^{m_2} \int_0^{+\infty} [\exp(ix_1\xi)-\sum_{h=0}^{m_1-1} b_{hk}^{+} \exp(i\delta_{hk}^{+} x_1\xi)]\cdot$$
$$\cdot \exp(\mu_k(\xi)x_2)[V_{jk}(\xi)/V(\xi)]\psi_j(\xi)d\xi+$$
$$+(2\xi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{m_2-1} \sum_{k=1}^{m_2} \int_{-\infty}^{0} [\exp(ix_1\xi)-\sum_{h=0}^{m_1-1} b_{hk}^{-} \exp(i\delta_{hk}^{-} x_1\xi)]\cdot$$
$$\cdot\exp(\mu_k(\xi)x_2)[V_{jk}(\xi)/V(\xi)]\psi_j(\xi)d\xi,$$

dove

$$\psi_j(\xi)=(\mathfrak{F}\psi_j)(\xi)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty} \exp(-ix_1\xi)\psi_j(x_1)dx_1,$$

e le ψ_j sono densità da determinare, nulle per $x_1<0$, di classe $L^2(R)$. Le costanti $\delta_{hk}^{\pm}$ sono scelte in modo che sia $\sum_\alpha a_\alpha(i\delta_{hk}^{\pm})^{\alpha_1}\omega_k^{\alpha_2}=0 \quad \forall h, k$, onde garantire che la funzione fornita dalla (4) sia soluzione dell'equazione considerata.

Per soddisfare le condizioni al contorno (2) si scelgono poi le $b^{\pm}_{hk}$ in modo che

$$\sum_{h=0}^{m_1-1} b^{\pm}_{hk}(\delta^{\pm}_{hk})^r=1, \qquad r=0,\ 1,\ \dots,\ m_1-1. \tag{5}$$

Per tradurre in condizioni sulle densità le condizioni al contorno (2), operiamo una scelta speciale delle ψ_j: supponiamo che sia $\psi_j=D^{m_1}\varphi_j$ con $\varphi_j=0$ per $x_1<0$, ciascuna φ_j essendo di quadrato sommabile su R con le derivate fino all'ordine m_1. La (4) diventa

$$(4_1)\quad u(x_1\,,\ x_2)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sum_j\sum_k\int_0^{+\infty}(i\xi)^{m_1}[\exp(ix_1\xi)-\sum_h b^{+}_{hk}\exp(i\delta^{+}_{hk}x_1\xi)]\cdot$$

$$\cdot\exp(\mu_k(\xi)x_2)[V_{jk}(\xi)/V(\xi)]\varphi_j(\xi)+$$

$$+(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sum_j\sum_k\int_{-\infty}^{0}(i\xi)^{m_1}[\exp(ix_1\xi)-\sum_h b^{-}_{hk}\exp(i\delta^{-}_{hk}x_1\xi)]\cdot$$

$$\cdot\exp(\mu_k(\xi)x_2)[V_{jk}(\xi)/V(\xi)]\varphi_j(\xi)d\xi.$$

Se si pone $\vec{\varphi}=(\varphi_0\,,\ \varphi_1\,,\ \dots,\ \varphi_{m_2-1})$, $\vec{f}=(f_0\,,\ f_1\,,\ \dots,\ f_{m_2-1})$, abbiamo dimostrato in [1] che le condizioni (2) si traducono nel sistema

$$D^{m_1}(x_1)+\int_0^{+\infty}(K\vec{\varphi})(x_1\,,\ t)dt=\vec{f}(x_1), \qquad x_1>0, \tag{6}$$

dove $K=[K_{rj}]$ è la matrice avente come termini i nuclei

$$K_{rj}(x_1\,,\ t)=\sum_{k=1}^{m_2}\omega_k{}^r c_{jk}\sum_{h=0}^{m_1-1}\left[\frac{C^{+}_{rj}b^{+}_{hk}}{(\delta^{+}_{hk}x_1-t)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{C^{-}_{rj}b^{-}_{hk}}{(\delta^{-}_{hk}x_1-t)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}}\right],$$

con $C^{\pm}_{rj}$ costanti opportune.

In [1], n. 2, abbiamo introdotto gli spazi $\overset{*}{W}{}^{m}(R_+{}^2)$, $W^m(R_+{}^2)$, $W_\alpha{}^\lambda(R_+)$, $\overset{\circ}{W}_\alpha{}^\lambda(R_+)$, $W_\alpha{}^\lambda(R)$, $V_\alpha{}^\lambda(R_+)$, $\lambda \geq 0$, $-1 < \alpha < 1$ [1]).

Definiamo ancora uno spazio funzionale: se $\bar{R}_+ = [0, +\infty[$, sia $C_0{}^\infty(\bar{R}_+ \times \bar{R}_+)$ l'insieme delle restrizioni a $\bar{R}_+ \times \bar{R}_+$ delle funzioni di classe $C_0{}^\infty(R \times R)$; per tali funzioni introduciamo la norma

$$\| u;\ W^{lm}(R_+{}^2) \| = \| u;\ L^2(R_+{}^2) \| + \sum_{\substack{i=1 \\ lm_i \in N}}^{2} \| D_{x_i}^{lm_i} u;\ L^2(R_+{}^2) \| +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ lm_i \notin N}}^{2} \left[\int_{R_+} t^{-1-2(lm_i - [lm_i])} \| \Delta_i(t) D_{x_i}^{[lm_i]} u;\ L^2(R_+{}^2) \|^2 \, dt \right]^{1/2},$$

dove per ogni reale $l \geq 1$, $lm = (lm_1, lm_2)$, $[\lambda]$ è la parte intera di λ,

$$\Delta_1(t) f(x_1, x_2) = f(x_1 + t, x_2) - f(x_1, x_2),$$
$$\Delta_2(t) f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + t) - f(x_1, x_2).$$

Se $u \in W^{lm}(R_+{}^2)$, la traccia $D_j^{x_2} u(x_1, 0)$ appartiene allo spazio $W^{\lambda_j(l)}(R_+)$ con

$$\lambda_j(l) = \lambda_j(l, m) = lm_1 - (m_1/m_2)(j + 1/2) = \lambda_j(1) + m_1(l-1).$$

Dunque, per ogni $l \geq 1$,

$$\lambda_j(l) - \lambda_r(l) = \lambda_j(1) - \lambda_r(1) = (m_1/m_2)(r-j) = \gamma_{rj}\,.$$

Nella nota [1], $\lambda_j(1)$ è indicato semplicemente λ_j.

Introduciamo infine gli spazi di Banach (dipendenti da l e m)

$$V_l(R_+) = \mathop{\times}_{j=0}^{m_2-1} V^{\lambda_j(l)}(R_+),$$

$$V'_l(R_+) = \mathop{\times}_{j=0}^{m_2-1} V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+),$$

normati nel modo naturale.

---

[1]) Per $\alpha = 0$ lo spazio $V_0{}^\lambda(R_+)$, o più semplicemente $V^\lambda(R_+)$, viene spesso indicato nelle letteratura esistente col simbolo $\tilde{W}^\lambda(R_+)$ (v. P. Grisvard [2]).

1. Nella precedente nota [1] abbiamo dimostrato che l'applicazione

$$\vec{\varphi} \to D^{m_1}\vec{\varphi} + \int_{R_+} (K\vec{\varphi})(x,\ t)dt, \qquad x \in R_+$$

(v. (6)) è continua è iniettiva da

$$\underset{j}{\times}\ V^{\lambda_j(1)+m_1}(R_+)$$

a

$$\underset{j}{\times}\ V^{\lambda_j(1)}(R_+)$$

(v. teoremi 1 e 2 della nota citata). La restrizione di tale applicazione a

$$V'_l(R_+) = \underset{j}{\times}\ V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+),$$

è pertanto ancora inettiva.

In questo numero vogliamo dimostrare che, per ogni $\vec{f} \in V_l(R_+)$ soddisfacente certe condizioni supplementari che specificheremo tra breve, il sistema (6_1) ammette una e una sola soluzione $\varphi \in V'_l(R)$.

Riportiamo brevemente alcune considerazioni già svolte in [1], n. 4, rimandando alla nota ora citata per i dettagli delle dimostrazioni. Dato che siamo interessati al comportamento della soluzione u rappresentata dalla (4_1) soltanto in un intorno dell'origine, possiamo modificare i dati f_j per $x > x_0$ positivo ad arbitrio. È allora lecito supporre verificate le condizioni supplementatri

$$x > a \Rightarrow f_j(x) = 0, \tag{7}$$

$$\int_{R_+} x^k f_j(x)dx = 0, \qquad \begin{matrix} \forall k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1, \\ \forall j = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1, \end{matrix} \tag{8}$$

dove $a > 0$ è prefissato ad arbitrio.

Per ogni funzione $f \in V^{\lambda_j(l)}(R_+)$ verificante (7) e (8), posto

$$h(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{m_1-1}}{(m_1-1)!} f(t)dt,$$

si trova

$$\| h;\ V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+) \| \leq c(a) \| f;\ V^{\lambda_j(l)}(R_+) \| \tag{9}$$

dove $c(a)$ è una costante dipendente da a ma non da f.

Introduciamo ora una convenzione relativa ai simboli, che verrà sistematicamente utilizzata in questo numero. Se f, φ, h, ..., sono funzioni definite su R_+, porremo

$$\Phi(x)=\varphi(e^x),\ F(x)=f(e^x),\ H(x)=h(e^x),\ \ldots;$$

poichè l'isomorfismo tra R_+ e R stabilito dal logaritmo naturale muta la misura di Haar dx/x su R_+ nella misura dx su R, alla misura dx su R_+ corrisponde la misura $\exp(x)dx$ su R. Avremo dunque in generale

$$\| x^\alpha \varphi(x);\ L^2(R_+) \| = \| \exp[(\alpha+1/2)x]\Phi(x);\ L^2(R) \|. \tag{10}$$

Se φ è una funzione m_1 volte derivabile si trova

$$(D^{m_1}\varphi)(e^x)= \exp(-m_1 x)[\Phi^{(m_1)}(x)+a_1\Phi^{(m_1-1)}(x)+\ \ldots\ +a_{m_1-1}\Phi'(x)],$$

dove i coefficienti a_j sono numeri interi. Indichiamo con P_{m_1} il polinomio

$$P_{m_1}(X)=(iX)^{m_1}+a_1(iX)^{m_1-1}+\ \ldots\ +a_{m_1-1}(iX);$$

se si pone, come già nel numero 1, $D^{m_1}\varphi=\psi$, all'uguaglianza $\hat{\varphi}(\xi)=$ $=\hat{\varphi}(\xi)/(i\xi)^{m_1}$ corrisponde l'altra

$$\hat{\Phi}(\xi-im_1)=\hat{\Psi}(\xi)/P_{m_1}(\xi-im_1)$$

o, più in generale,

$$\hat{\Phi}(\xi+i\eta)=\hat{\Psi}(\xi+i(\eta+m_1))/P_{m_1}(\xi+i\eta).$$

Utilizzando le notazioni ora introdotte e facendo uso della trasformazione di Laplace-Fourier, il sistema integrale (6) può essere riscritto

$$\begin{aligned} (6_1)\qquad & P_{m_1}(\xi+i(\alpha/2+\eta-m_l+\lambda_r))\hat{\Phi}_r(\xi+i(\alpha/2+\eta-m_1-\lambda_r))+ \\ & +\sum_j G_{rj}(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))\hat{\Phi}_j(\xi+i(\alpha/2+\eta+m_1-\lambda_j))= \\ & =P_{m_1}(\xi+i(\alpha/2+\eta-m_1-\lambda_r))\hat{H}_r(\xi+i(\alpha/2+\eta-m_1-\lambda_r)), \end{aligned}$$

o, in forma equivalente,

$$(6_2)\qquad \hat{\Psi}_r(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))+$$
$$+\sum_j G^*_{rj}(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))\hat{\Psi}_j(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_j))=$$
$$=\hat{F}_r(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r),\qquad r=0,\ 1,\ \ldots,\ m_2-1,$$

a seconda che si voglia assumere come funzioni incognite le densità φ_j oppure le loro derivate di ordine m_1 ψ_j. Nelle formule precedenti si è posto

$$G_{rj}(s)=\int_R e^{-isx}K_{rj}(e^x,\ 1)dx,\qquad s=\xi+i\eta,$$

$$G^*_{rj}(\xi+i\eta)=G_{rj}(\xi+i\eta)/P_{m_1}(\xi+i(\eta-m_1-\gamma_{rj})).$$

G_{rj} è stata calcolata esplicitamente in [1]: si è osservato che G_{rj} presenta come sole singolarità dei poli semplici nei punti

$$\xi=0,\ \eta=\begin{cases} 1+m_1+\gamma_{rj}+k, & k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\\ -m_1-k, \end{cases}$$

e, per ogni fissato $\eta\in R$, si ha la stima

$$G_{rj}(\xi+i\eta)=O(\exp(-\alpha_0\,|\,\xi\,|),$$

dove $\alpha_0<0$ è un numero tale che $-\pi+\alpha_0\leq\arg(-\delta^{\pm}_{hk})\leq\pi-\alpha_0$.

Dunque, per tutti gli η reali tranne al più un'infinità numerabile, $G_{rj}((\cdot)+i\eta)$ è a decrescenza rapida. G^*_{rj} ha le stesse proprietà di G_{rj} salvo un numero finito di poli in più.

Occupiamoci dapprima del sistema (6_2); detta G^* la matrice

$$G^*(\xi+i\eta)=[G^*_{rj}(\xi+i(\eta-\lambda_r))],\qquad r,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ m_2-1,$$

si ha

$$\det[I+G^*(\xi+i\eta)]=1+O(\exp(-\alpha_0\,|\,\xi\,|)),\ \text{per}\ |\,\xi\,|\uparrow+\infty,$$

I essendo la matrice unità d'ordine m_2. Il determinante in questione è dunque diverso da zero per $|\,\xi\,|$ abbastanza grande; esso presenta un'infinità numerabile di poli ed un'infinità numerabile di zeri al più. Per ogni fissato $\eta \in R$ si può affermare che, per tutti gli α appartenenti ad un insieme (dipendente da η) che è il complementare di un insieme numerabile rispetto a $]-1, 1[$,

$$\det [I+G^*(\xi+i(\alpha/2+\eta))] \neq 0, \qquad \forall \xi \in R,$$
$$G\ ((\cdot)+i(\alpha/2+\eta)) \in \mathcal{S}.$$

Osserviamo che, in ciò che segue, opereremo soltanto un numero finito di scelte differenti di η, e questo ci consente di affermare che i i risultati parziali via via ottenuti sono tutti validi contemporaneamente per gli α appartenenti ad un medesimo insieme del tipo già specificato. Da (6_2) otteniamo la formula risolutiva

$$\begin{aligned} (11) \qquad \widehat{\Psi}_r(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r)) &= \widehat{F}_r(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))+ \\ &+\sum_j \widehat{M}_{rj}(\xi+i(\alpha/2+\eta))\widehat{F}_j(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_j)), \end{aligned}$$

avendo indicato con $\widehat{M}_{rj}$ i termini della matrice

$$\begin{aligned} \widehat{M}(\xi+i\eta) &= [\widehat{M}_{rj}(\xi+i\eta] = \\ &= -[I+G^*(\xi+i\eta)]^{-1}G^*(\xi+i\eta), \quad r,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ m_2-1. \end{aligned}$$

Ciascuna funzione $\xi \rightarrow \widehat{M}_{rj}(\xi+i(\alpha/2+\eta))$ è a decrescenza rapida. Vogliamo dimostrare che per l'applicazione $\vec{f} \rightarrow \vec{\psi}$ individuata da (9) si ha la maggiorazione

$$\|\vec{\psi};\ V_l(R_+)\| \leq c(a)\ \|\vec{f};\ V_l(R_+)\|$$

limitatamente alle $\vec{f}$ per cui sono verificate le condizioni supplementari (7) e (8). Tenendo presente la (9) e la struttura del secondo membro della formula risolutiva (11), è chiaro che basta considerare l'applicazione $h \rightarrow \psi$ individuata dalla formula

$$\begin{aligned} (12) \qquad \widehat{\Psi}(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r)) &= \widehat{M}(\xi+i(\alpha/2+\eta))\widehat{F}(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_j)) = \\ &= \widehat{M}^*(\xi+i(\alpha/2+\eta))\widehat{H}(\xi+i(\alpha/2+\eta-m_1-\lambda_j)), \end{aligned}$$

$[\hat{M}^*(\xi+i(\alpha/2+\eta))=\hat{M}(\xi+i(\alpha/2+\eta))P_{m_1}(\xi+i(\alpha/2+\eta-m_1-\lambda_j))$ ha le stesse proprietà di $\hat{M}]$, e dimostrare relativamente a tale applicazione la maggiorazione

$$(13) \qquad \| \psi;\ V^{\lambda(l)}(R_+) \| \leq c \| h;\ V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+) \|,$$

con c costante positiva opportuna. La dimostrazione della (13) è simile a quella fornita per $l=1$ nella nota [1]. Richiamiamo le tappe principali di tale dimostrazione. Anzitutto la (12), ove si ponga $\eta=\lambda_r$ e $\hat{M}^*_\alpha(\xi)=\hat{M}^*(\xi+i(\alpha/2+\lambda_r))$, fornisce

$$(12_1) \qquad \psi(x)=\int_{R_+} M^*_\alpha(\ln t)(x/t)^{-m_1-\gamma_{rj}}h(x/t)\frac{dt}{t^{1+\alpha/2}}.$$

Se si pone $q(x)=x^{-m_1-\gamma_{rj}}h(x)$, dalla disuguaglianza

$$\| x^{-\gamma}f(x);\ V^{\lambda}(R_+) \| \leq c \| f;\ V^{\lambda+\gamma}(R_+) \|, \qquad \lambda\geq 0,\ \gamma>0,$$

dimostrata in [1], formula (27), segue che

$$(14) \qquad \| q;\ V^{\lambda_k(l)}(R_+) \| \leq c \| h;\ V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+) \|,$$

tenendo presente che $\lambda_j(l)+m_1-m_1-\gamma_{rj}=\lambda_r(l)$.

Dobbiamo dunque provare che l'applicazione $q\to\psi$ individuata da

$$(15) \qquad \psi(x)=\int_{R_+} M^*_\alpha(\ln t)q(x/t)\frac{dt}{t^{1+\alpha/2}}$$

o, in forma equivalente,

$$\hat{\Psi}(\xi+i(\alpha/2+\eta))=\hat{M}^*(\xi+i(\alpha/2+\eta+\lambda_r))\hat{Q}(\xi+i(\alpha/2+\eta)),$$

è continua da $V^{\lambda_k(l)}(R_+)$ in sè. La dimostrazione si consegue innanzitutto in $V^{\lambda}_{\alpha}{}^{(l)}(R_+)$ per tutti gli $\alpha\in]-1,1[$ tranne al più un'infinità numerabile. La diseguaglianza

$$(16) \qquad \| \psi;\ W^{\lambda_k(l)}_{\alpha}(R_+) \| \leq c \| q;\ W_{\alpha}{}^{k(l)}(R_+) \|$$

relativa alla (15) è stata dimostrata da B. Pini [3], n. 5. Dalla (15) stessa segue, scegliendo $\alpha<0$ e $q\in C_0^\infty(R_+)$, che ψ tende a zero per $x\downarrow 0$. Poichè una formula analoga alla (15) può scriversi per ogni derivata D^s, $s\leq\lambda_r(l)-1/2$,

$$D^s\psi(x)=\int_{R_+} M^*_{\alpha,s}(\ln t)D^s q(x/t)\frac{dt}{t^{1+\alpha/2}},$$

lo stesso ragionamento può ripetersi su ognuna di tali derivate. Dunque ψ presenta nell'origine lo stesso comportamento di q. Infine la maggiorazione

$$\| x^{\alpha/2-(\lambda_r(l)-[\lambda_r(l)])}D^{[\lambda_r(l)]}\psi(x);\ L^2(R_+)\|\leq$$
$$\leq c\,\| x^{\alpha/2-(\lambda_r(l)-[\lambda_r(l)])}D^{[\lambda_r(l)]}q(x);\ L^2(R_+)\|,$$

relativa all'ultimo termine che compare nella norma di $V^{\lambda_r(l)}$, segue dall'uguaglianza

$$P_{[\lambda_r(l)]}(\xi+i((\alpha+1)/2-\lambda_r(l)))\hat{\Psi}(\xi+i((\alpha+1)/2-\lambda_r(l)))=$$
$$=\hat{M}^*(\xi+i(\alpha+1)/2)P_{[\lambda_r(l)]}(\xi+i((\alpha+1)/2-\lambda_r(l)))\hat{Q}(\xi+i((\alpha+1)/2-\lambda_r(l)))$$

Dunque la (16) è dimostrata. Potendosi scrivere la (16) stessa per due valori α_1 e α_2 opposti. con un ragionamento di tipo interpolatorio dovuto a E. Stein [4] (v. [1], Appendice), si ottiene la (16) per $\alpha=0$. Combinando la (16) con la (14) e la (9) si ottiene la maggiorazione richiesta

$$\|\vec{\psi};\ V_l(R_+)\|\leq c(a)\,\|\vec{f};\ V_l(R_+)\|$$

per ogni $\vec{f}$ verificante le condizioni supplementari (7) e (8).

Per completare il nostro risultato resta da provare che la $\vec{\psi}$ ottenuta è la derivata d'ordine m_1 di una $\vec{\varphi}\in V'_l$. Per far questo basta risolvere il sistema (6_1) che fornisce appunto $\vec{\varphi}$, e verificare che $\vec{\varphi}\in V'_l(R_+)$. Tenuto conto di quanto già sappiamo su $\vec{\psi}=D^{m_1}\vec{\varphi}$, basta studiare le derivate $D^s\vec{\varphi}$, $s=0, 1, \ldots, m_1-1$; questo è già stato fatto al termine del n. 4 di [1]. Possiamo riassumere i risultati ottenuti sotto forma di

Teorema 1. *Per ogni $\vec{f}\in V_l(R_+)$, le cui funzioni componenti verifichino le condizioni supplementari* (7) *e* (8), *esiste un vettore di densità*

$\vec{\psi}$ *con* $\vec{\psi}=D^{m_1}\vec{\varphi}$ *e*

$$\| \vec{\varphi};\ V'_l(R_+) \| \leq c(a) \| \vec{f};\ V_l(R_+) \|;$$

$\vec{\varphi}$ *è soluzione del sistema* (6_1).

2. In questo numero vogliamo dimostrare che la funzione rappresentata dal secondo membro delle formula (4_1) appartiene allo spazio $W^{lm}(R_+{}^2)$ se $\vec{\varphi}\in V'_l(R_+)$, cioè $\varphi_j \in V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+)$. Rammentiamo che

$$\lambda_j(l)+m_1=\lambda_j(1)+lm_1=lm_1+m_1-(m_1/m_2)(j+1/2),$$

$\forall j=0,\ 1,\ \ldots,\ m_2=1$.

Tenendo presente la struttura della formula (4_1), cominciamo col valutare la norma in $W^{lm}(R_+{}^2)$ della funzione

$$v(x_1\,,\ x_2)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R (i\xi)^{m_1}\exp(ix_1\xi)\exp(\mu_k(\xi)x_2)[V_{jk}(\xi)/V(\xi)]\hat{\varphi}_j(\xi)d\xi= \tag{17}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R (i\xi)^{m_1}\exp(ix_1\xi)\exp(\mu_k(\xi)x_2)c_{jk}\,|\,\xi\,|^{-jm_1/m_2}\hat{\varphi}_j(\xi)d\xi,$$

per j e k fissati, essendo $x_1>0$, $x_2>0$. Per ogni α_1 intero non negativo si ha

$$D^{\alpha_1}_{x_1}v(x_1\,,\ x_2)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \exp(ix_1\xi)i^{\alpha_1+m_1}\exp(\mu_k(\xi)x_2)c_{jk}\xi^{\alpha_1+m_1}\,|\,\xi\,|^{-jm_1/m_2}\hat{\varphi}_j(\xi)d\xi=$$

$$=\mathfrak{F}^{-1}_{\xi}[i^{\alpha_1+m_1}c_{jk}\exp(\mu_k(\xi)x_2)\xi^{\alpha_1+m_1}\,|\,\xi\,|^{-jm_1/m_2}\hat{\varphi}_j(\xi)](x_1).$$

Convenendo che $D^{\alpha_1}_{x_1}v$ indichi il prolungamento con lo zero per $x_2<0$ della derivata stessa, otteniamo, in virtù della relazione di Parseval,

$$\| D^{\alpha_1}_{x_1}v;\ L^2(R^2) \|^2 \leq c\int_{R^2} |\,\mathfrak{F}_{x_2}\mathfrak{F}_{x_1}[D^{\alpha_1}_{x_1}v](\xi_1\,,\ \xi_2)\,|^2\,d\xi_1 d\xi_2=$$

$$=c\int_R |\,\xi_1\,|^{2(\alpha_1+m_1-jm_1/m_2)}\,|\,\hat{\varphi}_j(\xi_1)\,|^2\left(\int_{R^2} |\,\mathfrak{F}_{x_2}[\vartheta(x_2)\exp(\mu_k(\xi_1)x_2](\xi_2)\,|^2\,d\xi_2\right)d\xi_1\,,$$

dove abbiamo indicato con ξ_1 la variabile duale di x_1 (precedentemente indicata ξ), con ξ_2 la variabile duale di x_2 e con c una costante positiva opportuna, non necessariamente la stessa in ogni formula. La funzione ϑ è la caratteristica di R_+ (funzione di Heaviside). È

$$\mathfrak{F}_{x_2}[\vartheta(x_2)\exp(\mu_k(\xi_1)x_2](\xi_2)=$$

$$=\frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}}{i\xi_2-\omega_k\,|\xi_1|^{m_1/m_2}},\qquad \mu_k(\xi_1)=\omega_k\,|\,\xi_1\,|^{m_1/m_2},$$

e quindi

$$\int_R |\,\mathfrak{F}_{x_2}[\vartheta(x_2)\exp(\mu_k(\xi_1)x_2)](\xi_2)\,|^2\,d\xi_2=\left(\frac{-1}{2\,Re\,\omega_k}\right)|\,\xi_1\,|^{-m_1/m_2},$$

ed infine

$$\|\,D_{x_1}^{\alpha_1}v;\;L^2(R_+{}^2)\,\|^2\leq c\int_R |\,\xi_1\,|^{2(\alpha_1+m_1)-2(j+1/2)m_1/m_2}\,|\,\hat{\varphi}_j(\xi_1)\,|^2\,d\xi_1\leq$$

$$c\leq\int_R (1+\xi_1{}^2)^{\alpha_1+m_1-(j+1/2)m_1/m_2}\,|\,\hat{\varphi}_j(\xi_1)\,|^2\,d\xi_1\,.$$

Se dunque $0\leq\alpha_1\leq lm_1$, si trova

$$\|\,D_{x_1}^{\alpha_1}v;\;L^2(R_+{}^2)\,\|\leq c\,\|\,\varphi_j\,;\;V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+)\,\|.$$

Le derivate $D_{x_2}^{\alpha_2}v$ si trattano esattamente allo stesso modo: in particolare se lm_2 è intero si trova

$$\|\,D_{x_2}^{\alpha_2}v;\;L^2(R_+{}^2)\,\|\leq c\,\|\,\varphi_j\,;\;V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+)\,\|.$$

Sempre tenendo presente la formula (4_1), prendiamo ora in considerazione funzioni del tipo

$$\int_0^{+\infty}\exp(i\delta_{hk}^{+}x_1\xi)\exp(\mu_k(\xi)x_2)\xi^{m_1}\,|\,\xi\,|^{-jm_1/m_2}\hat{\varphi}_j(\xi)d\xi,$$

$$\int_{-\infty}^{0}\exp(i\delta_{hk}^{-}x_1\xi)\exp(\mu_k(\xi)x_2)\xi^{m_1}\,|\,\xi\,|^{-jm_1/m_2}\hat{\varphi}_j(\xi)d\xi,$$

per h, k, j fissati. Studiamo, ad esempio, la funzione

$$(18) \qquad w(x_1, x_2)=\int_0^{+\infty} \exp(i\delta_{hk}^+ x_1\xi)\exp(\mu_k(\xi)x_2)\xi^{m_1-jm_1/m_2}\widehat{\varphi}_j(\xi)d\xi.$$

Se $\delta_{hk}^+=-1$, tale funzione, a meno di una costante, coincide con

$$\mathfrak{F}_\xi^{-1}[\vartheta(\xi)\exp(\mu_k(\xi)x_2)\xi^{m_1-jm_1/m_2}\varphi_j(\xi)](-x_1);$$

formule analoghe valgono per le derivate. Si può dunque ripetere inalterato il procedimento già visto. Supponiamo dunque $\operatorname{Im}\delta_{hk}^+>0$. Abbiamo

$$D_{x_1}^{\alpha_1}w(x_1, x_2)=(i\delta_{hk}^+)^{\alpha_1}\int_0^{+\infty} \exp(i\delta_{hk}^+ x_1\xi)\exp(\mu_k(\xi)x_2)\xi^{\alpha_1+m_1-jm_1/m_2}\widehat{\varphi}_j(\xi)d\xi;$$

Indichiamo ancora con $D_{x_1}^{\alpha_1}w$ il prolugamento con lo zero della funzione scritta per $(x_1, x_2)\in R^2-R_+{}^2$; abbiamo

$$\mathfrak{F}_{x_1x_2}[D_{x_1}^{\alpha_1}w](\xi_1, \xi_2)=[D_{x_1}^{\alpha_1}w]\hat{}(\xi_1, \xi_2)=$$

$$=\text{cost.}\int_{R_+}\exp(-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2))\left(\int_{R^2_+}\exp(i\delta_{hk}^+x_1s+\mu_k(s)x_2)s^{\alpha_1+m_1-jm_1/m_2}\widehat{\varphi}_j(s)ds\right)dx_1dx_2=$$

$$=\text{cost.}\int_{R_+}s^{\alpha_1+m_1-jm_1/m_2}\widehat{\varphi}_j(s)\left(\int_{R_+}\exp(ix_1(\delta_{hk}^+s-\xi_1))dx_1\right)\left(\int_{R_+}\exp(x_2(\mu_k(s)-i\xi_2))dx_2\right)ds=$$

$$=\text{cost.}\int_{R_+}\frac{s^{\alpha_1+m_1-jm_1/m_2}\widehat{\varphi}_j(s)}{(\delta_{hk}^+s-\xi_1)(i\xi_2-\mu_k(s))}ds.$$

Nell'ultimo passaggio si è conglobata nella costante un'unità immaginaria. Abbiamo quindi

$$\| D_{x_1}^{\alpha_1}w;\ L^2(\mathrm{R}_+{}^2)\|^2\leq c\int_{R^2}\left|\int_{R_+}\frac{s^{\alpha_1+m_1-jm_1/m_2}\widehat{\varphi}_j(s)}{(\delta_{hk}^+s-\xi_1)(i\xi_2-\mu_k(s))}ds\right|^2 d\xi_1d\xi_2.$$

Poniamo momentaneamente

$$f(s)=s^{\alpha_1+m_1-jm_1/m_2}\widehat{\varphi}_j(s)/(i\xi_2-\mu_k(s)).$$

Facendo uso della disuguaglianza di Hilbert abbiamo

$$\int_R \left| \int_{R_+} \frac{f(s)}{\delta_{1k}^{+} s - \xi_1} ds \right|^2 d\xi_1 \leq c \,\| f;\ L^2(R_+) \|^2.$$

Dunque

$$\| D_{x_1}^{\alpha_1} w;\ L^2(R_+{}^2) \|^2 \leq c \int_R \left(\int_{R_+} \frac{s^{2(\alpha_1+m_1)-2jm_1/m_2} \,|\, \hat{\varphi}_j(s) \,|^2}{} ds \right) d\xi_2 =$$

$$= c \int_R s^{2(\alpha_1+m_1)-2jm_1/m_2} \,|\, \hat{\varphi}_j(s) \,|^2 \left(\int_{R_+} \frac{d\xi_2}{|\, i\xi_2 - \mu_k(s) \,|^2} \right) ds =$$

$$= c' \int_{R_+} s^{2(\alpha_1+m_1)-2(j+1/2)m_1/m_2} \,|\, \hat{\varphi}_j(s) \,|^2 ds.$$

Si è dunque ottenuta la stessa stima vista in precedenza per $D_{x_1}^{\alpha_1} v$. Le derivate $D_{x_2}^{\alpha_2} w$ si trattano allo stesso modo.

A questo punto possiamo intanto concludere che, nel caso particolare in cui lm_1 e lm_2 sono entrambi interi, si ha

$$\| u;\ W^{lm}(R_+{}^2) \| \leq c \,\| \vec{\varphi};\ V'_l(R_+) \| .$$

Per completare il risultato restano da esaminare le norme corrispondenti al caso in cui lm_1 e lm_2 non sono interi. Riprendiamo in considerazione la funzione v definita dalla (17) e poniamo $\alpha_1 = [lm_1]$ (parte intera di lm_1), $lm_1 = \alpha_1 + \beta_1$, con $0 < \beta_1 < 1$. La funzione $D_{x_1}^{\alpha_1} v$ è definita per $x_2 > 0$; se conveniamo, come già in precedenza, che il simbolo $D_{x_1}^{\alpha_1} v$ indichi anche la funzione stessa prolungata con lo zero per $x_2 < 0$, abbiamo

$$\int_{R_+} t^{-1-2\beta_1} \| \Delta_1(t) D_{x_1}^{\alpha_1} v;\ L^2(R_+{}^2) \|^2 dt \leq \int_{R_+} t^{-1-2\beta_1} \| \Delta_1(t) D_{x_1}^{\alpha_1} v;\ L^2(R^2) \|^2 dt =$$

$$= \int_{R_+} t^{-1-2\beta_1} \left(\int_{R^2} |\, e^{-it\xi_1} - 1 |^2 \,|\, [\, D_{x_1}^{\alpha_1} v]\hat{}\,(\xi_1 ,\ \xi_2) \,|^2 \, d\xi_1 \ d\xi_2 \right) dt =$$

$$= c \int_{R^2} |\, \xi_1 \,|^{2\beta_1} \,|\, [D_{x_1}^{\alpha_1} v]\hat{}\,(\xi_1 ,\ \xi_2) \,|^2 \, d\xi_1 d\xi_2 .$$

Ma la trasformata di Fourier di $D_{x_1}^{\alpha_1}v$ è già stata calcolata:

$$[D_{x_1}^{\alpha_1}v]^{\wedge}(\xi_1\,,\ \xi_2)=(2\pi)^{-1/2}i^{\alpha_1+m_1}c_{jk}\frac{\xi_1^{\alpha_1+m_1}\mid\xi_1\mid^{-jm_1/m_2}\hat{\varphi}_j(\xi_j)}{i\xi_2-\omega_k\mid\xi_1\mid^{m_1/m_2}}\,,$$

quindi l'ultimo integrale si maggiora con

$$c\int_R\mid\xi_1\mid^{2(\alpha_1+\beta_1+m_1-jm_1/m_2)}\mid\hat{\varphi}_1(\xi_1)\mid^2\left(\int_R\frac{d\xi_2}{\mid i\xi_2-\omega_k\mid\xi_1\mid^{m_1/m_2}\mid^2}\right)^2 d\xi_1=$$

$$=c'\int_R\mid\xi_1\mid^{2(\alpha_1+\beta_1+m_1-(j+1/2)m_1/m_2)}\mid\hat{\varphi}_j(\xi_1)\mid^2 d\xi_1\le c'\,\|\,\varphi_j\,;\ \ V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+)\,\|\,,$$

dove si è tenuto conto del fatto che

$$\alpha_1+\beta_1=lm_1\Rightarrow\alpha_1+\beta_1+m_1-(j+1/2)m_1/m_2=\lambda_j(l)+m_1\,.$$

Poniamo ora

$$\alpha_2=[lm_2],\ \ lm_2=\alpha_2+\beta_2\,,\ \ 0<\beta_2<1.$$

Consideriamo la derivata $D_{x_2}^{\alpha_2}v$ ed il suo prolungamento con lo zero per $x_2<0$, che indichiamo con lo stesso simbolo.

È

$$[D_{x_2}^{\alpha_2}v]^{\wedge}(\xi_1\,,\ \xi_2)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}i^{m_1}c_{jk}\omega_k^{\alpha_2}\frac{\xi_1^{m_1}\mid\xi_1\mid^{(\alpha_2-j)m_1/m_2}\hat{\varphi}_j(\xi_1)}{i\xi_2-\omega_k\mid\xi_1\mid^{m_1/m_2}}\,.$$

Consideriamo la funzione

$$v_{\alpha_2}(x_1\,,\ x_2)=\begin{cases}D_{x_2}^{\alpha_2}v(x_1\,,\ x_2), & \text{per } x_2>0,\\ D_{x_2}^{\alpha_2}v(x_1\,,\ -x_2), & \text{per } x_2<0;\end{cases}$$

si avrà

$$\hat{v}_{\alpha_2}(\xi_1\,,\ \xi_2)=[D_{x_2}^{\alpha_2}v]^{\wedge}(\xi_1\,,\ \xi_2)+[D_{x_2}^{\alpha_2}v]^{\wedge}(\xi_1\,,\ -\xi_2)=$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}i^{m_1}c_{jk}\omega_k^{\alpha_2}\xi_1^{m_1}\mid\xi_1\mid^{(\alpha_2-j)m_1/m_2}\hat{\varphi}_j(\xi_1)\left[\frac{1}{i\xi_2-\omega_k\mid\xi_1\mid^{m_1/m_2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{-i\xi_2-\omega_k\mid\xi_1\mid^{m_1/m_2}}\right]=$$

$$= -2(2\pi)^{-\frac{1}{2}} i^{m_1} c_{jk} \omega_k^{\alpha_2+1} \frac{\xi_1^{m_1} \mid \xi_1 \mid^{(\alpha_2-j)m_1/m_2} \widehat{\varphi}_j(\xi_1)}{\omega_k^2 \mid \xi_1 \mid^{2m_1/m_2} + \xi_2^2} .$$

Abbiamo allora

$$\int_{R_+} t^{-1-2\beta_2} \| \Delta_2(t) D_{x_2}^{\alpha_2} v;\ L^2(R_+^2) \|^2 dt = \int_{R_+} t^{-1-\beta_2} \| \Delta_2(t) v_{\alpha_2};\ L^2(R^2) \|^2 dt =$$

$$= \int_{R_+} t^{-1-2\beta_2} \left(\int_{R^2} \mid e^{-it\xi_2} - 1 \mid^2 \mid \widehat{v}_{\alpha_2}(\xi_1, \xi_2) \mid^2 d\xi_1 d\xi_2 \right) dt =$$

$$= c \int_{R^2} \mid \xi_2 \mid^{2\beta_2} \mid \widehat{v}_{\alpha_2}(\xi_1, \xi_2) \mid^2 d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= c' \int_R \mid \xi_1 \mid^{2(m_1 + (\alpha_2+1-j)m_1/m_2)} \mid \widehat{\varphi}_j(\xi_1) \mid^2 \left(\int_R \frac{\mid \xi_2 \mid^{2\beta_2}}{\mid \omega_k^2 \mid \xi_1 \mid^{2m_1/m_2} + \xi_2^2 \mid^2} d\xi_2 \right) d\xi_1 .$$

Valutiamo l'integrale in $d\xi_2$. Posto $\omega_k = \omega'_k + i\omega''_k$ $(\omega'_k < 0)$, il denominatore dell'integrando si scrive

$$\mid \omega_k^2 \mid \xi_1 \mid^{2m_1/m_2} + \xi_2^2 \mid^2 = 4(\omega'_k \omega''_k)^2 \mid \xi_1 \mid^{4m_1/m_2} + [\xi_2^2 + (\omega'^2_k - \omega''^2_k) \mid \xi_1 \mid^{2m_1/m_2}]^2 =$$
$$= a \mid \xi_1 \mid^{4m_1/m_2} + [\xi_2^2 + b \mid \xi_1 \mid^{2m_1/m_2}]^2;$$

attualmente $a^2 + b^2 > 0$. L'integrale in questione si scrive successivamente

$$(19) \qquad 2 \int_{R_+} \frac{\xi_2^{2\beta_2}}{a \mid \xi_1 \mid^{4m_1/m_2} + (\xi_2^2 + b \mid \xi_1 \mid^{2m_1/m_2})^2} d\xi_2 =$$

$$= 2 \mid \xi_1 \mid^{2\beta_2+1-4m_1/m_2} \int_{R_+} \frac{t^{2\beta_2}}{a + (\mid \xi_1 \mid^{2(1-m_1/m_2)} t^2 + b)^2} dt =$$

$$= 2 \mid \xi_1 \mid^{(2\beta_2-3)m_1/m_2} \int_{R_+} \frac{\tau^{2\beta_2}}{a + (\tau^2 + b)^2} d\tau = c \mid \xi_1 \mid^{(2\beta_2-3)m_1/m_2}.$$

In definitiva

$$\int_{R_+} t^{-1-2\beta_2} \| \Delta_2(t) D_{x_2}^{\alpha_2} v;\ L^2(R_+^2) \|^2 dt \leq$$

$$\leq c \int_R |\xi_1|^{2(m_1+(\alpha_2+\beta_2)m_1/m_2-(j+1/2)m_1/m_2)} |\hat{\varphi}_j(\xi_1)|^2 d\xi_1 \leq$$

$$\leq c \, \| \varphi_j \, ; \, V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+) \|,$$

dove si è tenuto conto del fatto che

$$m_1+(\alpha_2+\beta_2)m_1/m_2-(j+1/2)m_1/m_2=$$
$$=m_1+lm_1m_2/m_2-(j+1/2)m_1/m_2=\lambda_j(l)+m_1 \, .$$

Passiamo ora alle norme delle derivate frazionarie della funzione w definita dalla (18). Se $\delta_{hk}^+=-1$, si applica inalterato il procedimento visto poco sopra per la funzione v: supponiamo dunque $\mathrm{Im}\,\delta_{hk}^+>0$. Poniamo ancora $\alpha_1=[lm_1]$, $lm_1=\alpha_1+\beta_1$, $0<\beta_1<1$. Consideriamo $D_{x_1}^{\alpha_1} w$ ed indichiamo con lo stesso simbolo il prolungamento con lo zero di tale derivata per $(x_1\,,\,x_2)\in R^2-R_+{}^2$. È

$$[D_{x_1}^{\alpha}w]\hat{}\,(\xi_1\,,\,\xi_2)=\text{cost.}\int_{R_+}\frac{s^{\alpha_1+m_1-m_1/m_2}\varphi_j(s)}{(\delta_{hk}^+s-\xi_1)(i\xi_2-\mu_k(s))}ds.$$

Introduciamo la funzione

$$w_{\alpha_1}(x_1\,,\,x_2)=\begin{cases} D_{x_1}^{\alpha_1}w(x_1\,,\,x_2), & \text{per } x_1>0,\ x_2>0,\\ D_{x_1}^{\alpha_1}w(-x_1\,,\,x_2), & \text{per } x_1<0,\ x_2>0,\\ 0 & \text{, per } x_2<0.\end{cases}$$

Si avrà:

$$\hat{w}_{\alpha_1}(\xi_1\,,\,\xi_2)=[D_{x_1}^{\alpha_1}w]\hat{}\,(\xi_1\,,\,\xi_2)+[D_{x_1}^{\alpha_1}w]\hat{}\,(-\xi_1\,,\,\xi_2)=$$
$$=\text{cost.}\int_{R_+}\frac{s^{\alpha_1+m_1-jm_1/m_2}\hat{\varphi}_j(s)}{(i\xi_2-\mu_k(s))}\left[\frac{1}{\delta_{hk}^+s-\xi_1}+\frac{1}{\delta_{hk}^+s+\xi_1}\right]ds=$$
$$=\text{cost.}\int_{R_+}\frac{s^{\alpha_1+m_1+1-jm_1/m_2}\hat{\varphi}_j(s)}{(i\xi_2-\mu_k(s))[(\delta_{hk}^+)^2s^2-\xi_1{}^2]}ds.$$

Abbiamo allora, ripetendo un calcolo già visto sopra,

$$\int_0^{+\infty} t^{-1-2\beta_1} \| \Delta_1(t)D_{x_1}^{\alpha_1}w;\ L^2(R_+{}^2) \|^2 dt \leq \int_0^{+\infty} t^{-1-2\beta_1} \| \Delta_1(t)w_{\alpha_1}\,;\ L^2(R^2) \|^2 dt=$$

$$=c\int_{R^2}|\xi_1|^{2\beta_1}\left|\int_{R_+}\frac{s^{\alpha_1+m_1+1-jm_1/m_2}\hat{\varphi}_j(s)}{(i\xi_2-\mu_k(s))((\delta_{hk}^+)^2s^2-\xi_1^2)}ds\right|^2d\xi_1d\xi_2=$$

$$=2c\int_R\left\{\int_{R_+}\xi_1^{2\beta_1}\left|\int_{R_+}\frac{f(s,\,\xi_2)}{(\delta_{hk}^+)^2s^2-\xi_1^2}ds\right|^2d\xi_1\right\}d\xi_2$$

dove si è posto

$$f(s,\,\xi_2)=s^{\alpha_1+m_1+1-jm_1/m_2}\hat{\varphi}_j(s)/(i\xi_2-\mu_k(s)).$$

Scrivendo momentaneamente $f(s)$ in luogo di $f(s,\,\xi_2)$, valutiamo l'integrale in $d\xi_1$ facendo uso della disuguaglianza integrale di Minkowski:

$$\int_{R_+}\left|\int_{R_+}\frac{f(s)\xi_1^{\beta_1}}{(\delta_{hk}^+)^2s^2-\xi_1^2}ds\right|^2d\xi_1=$$

$$\leq\left[\int_{R_+}\frac{1}{|(\delta_{hk}^+)^2t^2-1|}\left(\int_{R_+}|f(t\xi_1)|^2\xi_1^{2(\beta_1-1)}d\xi_1\right)^{1/2}dt\right]^2=$$

$$=\left[\int_{R_+}\frac{1}{t^{\beta_1-1/2}|(\delta_{hk}^+)^2t^2-1|}\left(\int_{R_+}|f(s)|^2s^{2(\beta_1-1)}ds\right)^{1/2}dt\right]^2=$$

$$=c\,\|\,s^{\beta_1-1}f(s);\;L^2(R_+)\,\|^2.$$

Sostituendo si ottiene

$$\int_0^{+\infty}t^{-1-2\beta_1}\|\,\Delta_1(t)D_{x_1}^{\alpha_1}w;\;L^2(R_+^2)\,\|^2\,dt\leq c\int_R\left(\int_{R_+}\frac{s^{2(\alpha_1+\beta_1+m_1-jm_1/m_2)}|\,\hat{\varphi}_j(s)\,|^2}{|\,i\xi_2-\mu_k(s)\,|^2}ds\right)d\xi_2=$$

$$=c'\int_{R_+}s^{2(\alpha_1+\beta_1+m_1-(j+1/2)m_1/m_2)}\,|\,\hat{\varphi}_j(s)\,|^2\,ds\leq c'\,\|\,\varphi_j\,;\;V^{\lambda_j(l)+m_1}(R_+)\,\|.$$

La stima relativa all'integrale

$$\int_0^{+\infty}t^{-1-2\beta_2}\|\,\Delta_2(t)D_{x_2}^{\alpha_2}w;\;L^2(R_+^2)\,\|^2\,dt$$

si esegue in modo perfettamente analogo: basta considerare il prolungamento

$$w_{\alpha_2} = \begin{cases} D_{x_2}^{\alpha_2} w(x_1\,, \; x_2), \text{ per } x_1 > 0, \; x_2 > 0, \\ D_{x_2}^{\alpha_2} w(x_1\,, \; -x_2), \text{ per } x_1 > 0, \; x_2 < 0, \\ 0 \qquad\qquad , \text{ per } x_1 < 0. \end{cases}$$

Si possono dunque omettere i dettagli relativi.

Possiamo riassumere i risultati di questo numero sotto forma di

TEOREMA 2. *Per ogni* $\varphi \in V'_l(R_+)$, *la formula* (4_1) *fornisce una funzione u per cui*

$$\| u; \; W^{lm}(R_+^2) \| \leq c \| \varphi; \; V'_l(R) \|.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BAROZZI, G. C.: *Un problema al contorno non omogeneo in un dominio angoloso per equazioni fortemente quasi-ellittiche in due variabili* (I), in corso di stampa su Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova.

[2] GRISVARD, G.: *Équations différentielles abstraites,* Ann. Scient. École Norm. Sup., t. 2 (1969), 311-395.

[3] PINI, B.: *Sulla rappresentazione delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche in una regione angolosa,* Annali di Mat. Pura Appl. (IV), Vol. LXXX, 359-372.

[4] STEIN, E.: *Interpolation of linear operators,* Transactions A.M.S., Vol. 83 (1956), 482-492.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 giugno 1970.