

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARCO BIROLI

**Solutions presque périodiques des inéquations
d'évolution avec des fonctionnelles non différentiables**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 44 (1970), p. 299-318

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__299_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES
DES INÉQUATIONS D'ÉVOLUTION AVEC
DES FONCTIONNELLES NON DIFFÉRENTIABLES

MARCO BIROLI *)

1. Introduction et énoncés.

Dans la suite nous indiquons par V un espace de Banach réel reflexif de norme $\| \cdot \|$, qu'on peut, sans perdre de generalité, supposer strictement convexe, par V^* son dual, par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre V et V^* , par $\| \cdot \|_*$ la norme duale de V^* ; nous indiquons par H un espace de Hilbert identifié avec son dual pour le produit scalaire (\cdot, \cdot) , par $| \cdot |$ la norme induite par (\cdot, \cdot) sur H .

Nous supposons V identifié avec un sous-espace dense de H et que l'injection de V dans H est compacte.

Soit $K \subset V$ fermé convexe, $0 \in K$.

Soit $A : V \rightarrow V^*$ avec les propriétés suivantes:

- (a) A est monotone, borné, hémicontinu
- (b) $\langle Av, v \rangle \geq \alpha \|v\|^p$, $\alpha > 0$, $p \geq 2$, $\forall v \in V$
- (c) $\langle Aw - Av, w - v \rangle \geq \alpha \|w - v\|^p$ $\forall v, w \in V$
- (d) $\|Av\|_* \leq c \|v\|^{p-1} + K$, $c > 0$ $\forall v \in V$.

Soit, enfin $\psi(\eta) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue.

Dans de travaux précédents l'A. a traité le problème de l'existence et de l'unicité d'une solution presque périodique d'une inéquation parabolique et a obtenu les résultats suivants:

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico del Politecnico di Milano.

Istituto di Matematica del Politecnico di Milano; lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

TH. I. Soit $f(t)$ une fonction presque périodique dans V^* . Considérons l'inéquation d'évolution

$$(1,1) \quad \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \} dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \} \quad t_1 \leq t_2;$$

$\forall v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbf{R}; V)$ avec $v'(t) \in \mathcal{L}_{loc}^{p'}(\mathbf{R}; V^*)$ et $v(t) \in \mathbf{K}$ p.p. sur \mathbf{R} ;

$u(t) \in \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbf{R}; V) \cap C(\mathbf{R}; H)$ $u(t) \in \mathbf{K}$ p.p. sur \mathbf{R}

(p' index conjugué à p).

Cette inéquation d'évolution a, au moins, une solution presque périodique dans H et S^p -presque périodique dans V , telle que $\forall \tau \in \mathbf{R}$

$$|u(t+\tau) - u(t)| \leq \varphi \left(\sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|^* \right) \\ \int_0^1 \|u(t+\tau+\eta) - u(t+\eta)\|^p d\eta \leq \varphi \left(\sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|^* \right)$$

où $\varphi(\sigma)$ est une fonction continue telle que $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \varphi(\sigma) = 0$ (cfr. [1]).

TH. II. Soit $f(t) \in \mathcal{L}_{loc}^{p'}(\mathbf{R}; V^*)$ et supposons que la inéquation d'évolution (1,1) ait une solution $u(t)$ bornée dans H ; alors $u(t)$ est l'unique solution de (1,1) bornée dans H (cfr. [2]).

TH. III. Soit $f(t)$ une fonction presque périodique dans V^* et

$$\|f(t)\|^* \leq R.$$

Supposons que $p=2$ et

$$|\psi(\eta_1) - \psi(\eta_2)| \leq M |\eta_1 - \eta_2|, \quad M < \frac{\gamma^s \alpha^2}{R}$$

pour $\eta_1, \eta_2 \leq \frac{R}{\gamma \alpha}$ (où γ est la constante d'injection de V dans H).

Considérons l'inéquation d'évolution

$$(1,2) \quad \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \\ + \psi(|u(t) - \delta|) \langle u(t), v(t) - u(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \} dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \} \quad t_1 \leq t_2, \delta > 0;$$

$\forall v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; V)$ avec $v'(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; V^*)$ et $v(t) \in \mathbf{K}$ p.p. sur \mathbf{R} .

$u(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; V) \cap C(\mathbf{R}; H) \quad u(t) \in \mathbf{K}$ p.p. sur \mathbf{R} .

Cette inéquation d'évolution a, au moins, une solution presque périodique dans H et \mathcal{S}^2 -presque périodique dans V , telle que $\forall \tau \in \mathbf{R}$

$$|u(t + \tau) - u(t)| \leq \varphi \left(\sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t + \tau) - f(t)\|^* \right) \\ \int_0^1 \|u(t + \tau + \eta) - u(t + \eta)\|^p d\eta \leq \varphi \left(\sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t + \tau) - f(t)\|^* \right)$$

où $\varphi(\sigma)$ est une fonction continue telle que $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \varphi(\sigma) = 0$ (cfr. [3]).

Sibony, [6], a traité le problème de l'existence et de l'approximation de la solution d'inéquations variationnelles elliptiques, où il y a des fonctionnelles non différentiables et Duvaut - Lions, [4] [5], ont traité le problème de Cauchy, pour quelques cas d'inéquation d'évolution, où il y a des fonctionnelles non différentiables.

Notre but est, maintenant, d'étudier le problème de la solution presque périodique d'inéquations paraboliques, ou il y a des fonctionnelles non différentiables; nous utiliserons la formulation abstraite suggérée par [6] et obtiendrons des résultats, qui étendent les Th. I, II et III.

TH. IV. Soient $H(v)$ et $H_\epsilon(v)$ des fonctionnelles convexes sur V .

Supposons que, $\forall \epsilon > 0$, $H_\epsilon(v)$ soit Gateaux-différentiable avec une dérivée bornée et hémicontinue, monotone de V dans V^* , telle que

$$\|H'_{\epsilon} v\|^* \leq c' \|v\|^{p-1} + K', \quad c' > 0 \quad \forall v \in V.$$

Supposons en outre que

a) si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t)$ dans $\mathcal{L}^p(t_1, t_2; V)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} H(u_n(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} H(u(t)) dt$$

b) si $v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbf{R}; V)$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(v(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} H(v(t)) dt;$$

c) si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^* u_\varepsilon(t) = \xi(t)$ dans $\mathcal{L}^p(t_1, t_2; V)$, on a

$$\min_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) dt \geq \int_{t_1}^{t_2} H(\xi(t)) dt.$$

Soit $f(t)$ une fonction presque périodique dans V^ . Considérons l'inéquation d'évolution*

$$(1,3) \quad \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \\ + H(v(t)) - H(u(t)) - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \} dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \} \quad t_1 \leq t_2$$

$\forall v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbf{R}, V)$ avec $v'(t) \in \mathcal{L}_{loc}^{p'}(\mathbf{R}; V^*)$ et $v(t) \in \mathbf{K}$ p.p. sur \mathbf{R}

$u(t) \in \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbf{R}; V) \cap C(\mathbf{R}; H)$ $u(t) \in \mathbf{K}$ p.p. sur \mathbf{R} .

Cette inéquation a une unique solution $u(t)$ presque périodique dans H et \mathcal{S}^p presque périodique dans V .

TH. V. Soient $H(v)$ et $H_\varepsilon(v)$ comme au Th. IV.

Soit $p=2$ et $f(t)$ presque périodique dans V^* avec

$$\|f(t)\|^* \leq R.$$

Supposons que $\psi(\eta) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ satisfait aux hypothèses du Th. III. Considérons l'inéquation d'évolution

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \\
 (1,4) \quad & + \psi(|u(t) - \delta|) \langle u(t), v(t) - u(t) \rangle + H(v(t)) - H(u(t)) - \\
 & - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \} dt \geq \\
 & \geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \} \quad t_1 \leq t_2, \delta > 0
 \end{aligned}$$

$\forall v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; V)$ avec $v'(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; V^*)$ et $v(t) \in \mathbf{K}$ p.p. sur \mathbf{R} .

$u(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; V) \cap C(\mathbf{R}; H)$ $u(t) \in \mathbf{K}$ p.p. sur \mathbf{R} .

Cette inéquation a, au moins, une solution presque périodique dans H et \mathcal{S}^2 -presque périodique dans V .

Nous considérons, en suite, un cas particulier intéressant du Th. IV.

Nous posons

$$V = H^1(\Omega) \quad H = \mathcal{L}^2(\Omega),$$

où $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert borné avec $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière et

$$\mathbf{K} = V$$

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0(x) u(x) v(x) \right\} dx$$

où

$$a_{ij}(x), a_0(x) \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$$

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2$$

p.p. dans Ω et $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$

$$a_0(x) \geq \delta > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

$$H(u) = g \int_{\Gamma} |u(x)| \, d\sigma \quad g > 0.$$

On a:

TH. VI. Soit $f(t)$ une fonction presque périodique dans $(H^1(\Omega))^* \cap H^{-1}(\Omega)$.

Dans le cas particulier considéré, l'inéquation d'évolution (1,3) a, $\forall g > 0$, une unique solution $u_g(t)$ presque périodique dans $L^2(\Omega)$ et \mathcal{S}^2 -presque périodique dans $H^1(\Omega)$.

On a, en outre, que

$$\lim_{g \rightarrow \infty}^* u_g(t) = u_D(t)$$

$$\lim_{g \rightarrow 0}^* u_g(t) = u_N(t)$$

dans $\mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; H^1(\Omega))$, où $u_D(t)$ est solution du problème

$$(1,5) \quad \begin{cases} \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + \langle Au(t), v \rangle = \langle f(t), v \rangle & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(t) \in H_0^1(\Omega) \quad \text{p.p.} \end{cases}$$

et $u_N(t)$ est solution du problème

$$(1,6) \quad \begin{cases} \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + \langle Au(t), v \rangle = \langle f(t), v \rangle & \forall v \in H^1(\Omega) \\ u(t) \in H^1(\Omega) \quad \text{p.p.} \end{cases}$$

REMARQUE. Nous nous posons dans les conditions du Th. VI; nous observons, [4], que l'inéquation considérée est équivalente formellement au problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x) u(t, x) = f(t, x)$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \right| \leq g \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \leq 0 \quad u \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \right| - g \right) = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma \times \mathbf{R}$$

où nous supposons $f(t, x) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; \mathcal{L}^2(\Omega))$ et par $\frac{\partial}{\partial \nu_A}$ nous indiquons dérivation conormale pour l'opérateur A considéré.

Le problème (1,5) est, supposé $f(t) \in H^{-1}(\Omega)$ p.p., la formulation variationnelle du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u(t, x) = f(t, x)$$

$$u(t, x)|_{\Gamma} = 0 \qquad \text{p.p. sur } \Gamma \times \mathbf{R}.$$

Enfin, si on suppose $f(t, x) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; \mathcal{L}^2(\Omega))$, le problème (1,6) est formellement équivalent au problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u(t, x) = f(t, x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \qquad \text{p.p. sur } \Gamma \times \mathbf{R}.$$

Dans le paragraphe 2 nous démontrons le Th. IV par une procédé de regularisation; le Th. V peut être démontré par le même procédé et nous ne développerons pas la démonstration.

Dans le § 3 nous appliquons le Th. IV à l'exemple considéré et démontrons le Th. VI.

2. Démonstration du Th. IV.

a) *Existence.*

Considérons l'inéquation d'évolution

$$(2,1) \quad \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle H' u(t), v(t) - u(t) \rangle - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \}$$

$$\forall v(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}; V) \quad v'(t) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^{p'}(\mathbf{R}; V^*) \quad v(t) \in \mathbf{K} \text{ p.p.}\}$$

$$u(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}; V) \cap C(\mathbf{R}; H) \quad v(t) \in \mathbf{K} \text{ p.p.}\}.$$

Dans les hypothèses faites, cette inéquation d'évolution a une unique solution $u_\varepsilon(t)$ presque périodique dans H et \mathfrak{S}^p -presque périodique dans V , telle que $\forall \tau \in \mathbf{R}$

$$(2,2) \quad |u_\varepsilon(t+\tau) - u_\varepsilon(t)| \leq \varphi \left(\sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\| \right)^*$$

$$(2,3) \quad \int_0^1 \|u_\varepsilon(t+\tau+\eta) - u_\varepsilon(t+\eta)\|^p d\eta \leq \varphi \left(\sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\| \right)^*.$$

Nous pouvons, en outre, affirmer, [1], que

$$(2,4) \quad |u_\varepsilon(t)| \leq C$$

$$(2,5) \quad \int_0^1 \|u_\varepsilon(t+\eta)\|^p d\eta \leq C.$$

où C ne dépend pas de ε .

De (2,2) on a que les $u_\varepsilon(t)$ sont equicontinues dans H . Si, alors, on procède comme dans [1], on a que il est possible d'extraire de $\{u_\varepsilon(t)\}$ une sous-suite, que nous indiquons encore par $\{u_\varepsilon(t)\}$, telle que.

$$(2,6) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t) = u(t) \text{ dans } C(t_1, t_2; H)$$

$$(2,7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^* u_\varepsilon(t) = u(t) \text{ dans } \mathcal{L}^p(t_1, t_2; V)$$

$$(2,8) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^{**} u_\varepsilon(t) = u(t) \text{ dans } \mathfrak{S}^p(V) \quad (\text{cfr. [1]})$$

(où par \lim^{**} nous indiquons la limite dans la topologie faible*).

On a alors

$$(2,9) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |v(t_2) - u_\varepsilon(t_2)|^2 = |v(t_2) - u(t_2)|^2$$

$$(2,10) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |v(t_1) - u_\varepsilon(t_1)|^2 = |v(t_1) - u(t_1)|^2$$

$$(2,11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle dt$$

$$(2,12) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t), v(t) - u_\varepsilon(t) \rangle dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \langle v(t), v(t) - u(t) \rangle dt.$$

Observons que $\{Au_\varepsilon(t)\}$ est bornée dans $\mathcal{L}^{p'}(t_1, t_2; V^*)$; on peut, alors, sans perdre de généralité, supposer

$$(2,13) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^* Au_\varepsilon(t) = \xi(t) \text{ dans } \mathcal{L}^{p'}(t_1, t_2; V^*).$$

Démontrons maintenant que $Au(t) = \xi(t)$.

Considérons l'inéquation (2,1); il est évident que chaque solution de (2,1) est aussi solution de l'inéquation d'évolution

$$(2,14) \quad \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \\ + H_\varepsilon(v(t)) - H_\varepsilon(u(t)) - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \} dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \}$$

$$\forall v(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbf{R}; V) \quad v'(t) \in \mathcal{L}_{loc}^{p'}(\mathbf{R}; V^*) \quad v(t) \in \mathbf{K} \text{ p.p.}\}$$

$$u(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^p(\mathbf{R}; V) \cap C(\mathbf{R}; H), \quad v(t) \in \mathbf{K} \text{ p.p.}\}.$$

Fixons t_1 et t_2 ; il est toujours possible, [1], de trouver une suite $\{u_n(t)\}$ telle que, supposé $u(t_1) \in \mathbf{K}$,

$$(2,15) \quad u_n(t_1) = u(t_1), \quad u(t) \in \mathbf{K} \text{ pp. dans } (t_1, t_2)$$

$$(2,16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t) \text{ dans } \mathcal{L}^p(t_1, t_2; v)$$

$$(2,17) \quad u'_n(t) \in \mathcal{L}^2(t_1, t_2; H)$$

$$(2,18) \quad \max_{n \rightarrow \infty} \lim \int_{t_1}^{t_2} \langle u'_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle dt \leq 0.$$

Posons dans (2,14) $v(t) = u_n(t)$; on a

$$(2,19) \quad \begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle dt \leq \\ & \leq \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle u'_n(t), u_n(t) - u_\varepsilon(t) \rangle + \\ & + H_\varepsilon(u_n(t)) - H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - \langle f(t), u_n(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \} dt. \end{aligned}$$

Nous observons, maintenant, que

$$(2,20) \quad \begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t) \rangle dt \end{aligned}$$

uniformément pour ε .

On a alors

$$\begin{aligned}
& \max_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t) \rangle dt = \\
& = \max_{n \rightarrow \infty} \lim \max_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle dt = \\
& = \max_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \max_{n \rightarrow \infty} \lim \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle dt \leq \\
(2,21) \quad & \leq \max_{n \rightarrow \infty} \lim \max_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle u'_n(t), u_n(t) - u_\varepsilon(t) \rangle + \\
& + H_\varepsilon(u_n(t)) - H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - \langle f(t), u_n(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \} dt \leq \\
& \leq \max_{n \rightarrow \infty} \lim \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle u'_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle + H(u_n(t)) - H(u(t)) - \\
& - \langle f(t), u_n(t) - u(t) \rangle \} dt \leq 0.
\end{aligned}$$

De (2,21) et de la monotonie de A , on a, [1],

$$Au(t) = f(t)$$

et

$$\begin{aligned}
(2,22) \quad & \min_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - v(t) \rangle dt \cong \\
& \cong \int_{t_1}^{t_2} \langle Au(t), u(t) - v(t) \rangle dt.
\end{aligned}$$

Démontrons, maintenant, que $u(t)$ est solution de l'inéquation d'évolution (1,3).

Nous observons, en outre, que

$$(2,23) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(v(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} H(v(t)) dt$$

$$(2,24) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) dt \geq \int_{t_1}^{t_2} H(u(t)) dt.$$

De (2,9), (2,10), (2,11), (2,12), (2,22), (2,23) et (2,24) on a

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle + \\ & + H(v(t)) - H(u(t)) - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \} dt \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \}; \end{aligned}$$

donc $u(t)$ est solution de (1,3).

De (2,2), (2,3), (2,6) et (2,8) on a que $u(t)$ est presque périodique dans H et \mathcal{S}^p -presque périodique dans V .

La thèse est ainsi démontrée.

b) *Unicité.*

La partie du Th. IV concernant l'unicité suit du lemme suivant:

LEMMA I. Soit $f(t) \in \mathcal{L}'_{loc}(\mathbf{R}; V)$. Considérons l'inéquation d'évolution (1,3) et supposons que cet inéquation ait une solution $u(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbf{R}; H)$; $u(t)$ est alors l'unique solution de (1,3) dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{R}; H)$.

Soient $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux solutions de (1,2) dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{R}; H)$.

Nous posons

$$w(t) = \frac{u_1(t) + u_2(t)}{2}.$$

Considérons t_1 et t_2 fixés et définissons $w_\eta(t)$ comme solution du problème

$$\eta w'_\eta(t) + w_\eta(t) = w(t)$$

$$w_\eta(t_1) = w(t_1)$$

et supposons $w(t_1) \in \mathbf{K}$.

On a

$$(2,25) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} w_\eta(t) = w(t) \text{ dans } \mathcal{L}^p(t_1, t_2; V)$$

$$(2,26) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} w_\eta(t) = w(t) \text{ dans } C(t_1, t_2; H)$$

$$(2,27) \quad w'_\eta(t) \in \mathcal{L}^2(t_1, t_2; H)$$

$$(2,28) \quad \max_{\eta \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} \langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - w(t) \rangle dt \leq 0$$

$$(2,29) \quad w_\eta(t) \in \mathbf{K} \text{ p.p. dans } (t_1, t_2)$$

De (2,25) on a que

$$(2,30) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} H(w_\eta(t)) dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} H(w(t)) dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{H(u_1(t)) + H(u_2(t))}{2} dt.$$

Posons dans (1,3) $v(t) = w_\eta(t)$.

On a

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - u_1(t) \rangle + \langle Au_1(t), w_\eta(t) - u_1(t) \rangle \\ + H(w_\eta(t)) - H(u_1(t)) - \langle f(t), w_\eta(t) - u_1(t) \rangle \} dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \{ |w_\eta(t_2) - u_1(t_2)|^2 - |w_\eta(t_1) - u_1(t_1)|^2 \} \\ \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle + \langle Au_2(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle + \\ + H(w_\eta(t)) - H(u_2(t)) - \langle f(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle \} dt \geq \\ \geq \frac{1}{2} \{ |w_\eta(t_2) - u_2(t_2)|^2 - |w_\eta(t_1) - u_2(t_1)|^2 \}.$$

Si on fait la semi-somme des deux inéquations, on a

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - w(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle Au_2(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle \\ & + \frac{1}{2} \langle Au_2(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle + H(w_\eta(t)) - \frac{H(u_1(t)) + H(u_2(t))}{2} \\ & - \langle f(t), w_\eta(t) - w(t) \rangle \} dt \geq \frac{1}{4} \{ |w_\eta(t_2) - u_1(t_2)|^2 + \\ & + |w_\eta(t_2) - u_2(t_2)|^2 - |w_\eta(t_1) - u_1(t_1)|^2 - |w_\eta(t_1) - u_2(t_1)|^2 \} \end{aligned}$$

dont, si on passe à la limite pour $\eta \rightarrow 0$, de (2,25), (2,26), (2,28) et (2,30) on a

$$\begin{aligned} & - \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle dt \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \{ |u_2(t_2) - u_1(t_2)|^2 - |u_2(t_1) - u_1(t_1)|^2 \}. \end{aligned}$$

De telle relation, si on procède comme dans (2), on démontre la thèse.

3. Démonstration du Th. VI.

Pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution presque périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et \mathcal{S}^2 -presque périodique dans $H^1(\Omega)$ du problème considéré, il suffit de démontrer que la fonctionnelle $H(u)$ satisfait aux hypothèses du Th. IV. La fonctionnelle

$$H(u) = g \int_{\Gamma} |u(x)| d\sigma, \quad g > 0$$

est convexe et puisque $H^1(\Omega)$ s'injecte avec continuité dans $H^{1/2}(\Gamma)$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t) \text{ dans } \mathcal{L}^2(t_1, t_2; H^1(\Omega))$$

on peut affirmer que

$$(3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} H(u_n(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} H(u(t)) dt.$$

Définissons, maintenant, les fonctionnelles $H_\varepsilon(u)$ dans la façon suivante

$$H_\varepsilon(u) = g \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{\Gamma} |u(x)|^{1+\varepsilon} d\sigma.$$

Il est évident que les fonctionnelles $H_\varepsilon(u)$ sont convexes et ont une Gateaux-dérivée donnée par un opérateur $H'_\varepsilon(u)$ monotone, hémicontinue, positif de $H^1(\Omega)$ dans $(H^1(\Omega))^*$.

On a, pour $v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \langle H'_\varepsilon u, v \rangle &= g \int_{\Gamma} u(x) |u(x)|^\varepsilon v(x) d\sigma \leq \\ &\leq \|v(x)\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \cdot \left(\int_{\Gamma} |u(x)|^{2\varepsilon} d\sigma \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \|v(x)\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} \cdot \left(\int_{\Gamma} |u(x)|^2 d\sigma + K' \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \|v(x)\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} (\|u(x)\|_{\mathcal{L}^2(\Gamma)} + K'') \leq \\ &\leq \|v(x)\|_{H^1(\Omega)} (C \|u(x)\|_{H^1(\Omega)} + K). \end{aligned}$$

On a alors

$$\|H'_\varepsilon u\|_* \leq C \|u\| + K.$$

Soit maintenant $v(t) \in \mathcal{L}^2(t_1, t_2; H^1(\Omega))$; on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\varepsilon} |v(t, x)|^{1+\varepsilon} &\leq \max \{1, |v(t, x)|^2\} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|v(t, x)|^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} &= |v(t, x)| \text{ p.p. sur } (t_1, t_2) \times \Gamma. \end{aligned}$$

On a alors

$$(3,2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(v(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} H(v(t)) dt.$$

Soit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}^* u_\varepsilon(t) = \xi(t) \text{ dans } \mathcal{L}^2(t_1, t_2; H^1(\Omega)).$$

Démontrons que

$$\min_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) dt \geq \int_{t_1}^{t_2} H(\xi(t)) dt.$$

Nous observons, avant tout, que

$$\alpha^{1+\varepsilon} - \alpha \geq -e^{-(1+\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad \forall \alpha \geq 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned} & \min_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} (H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - H(\xi(t))) dt \geq \\ & \geq \min_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} (H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - H(u_\varepsilon(t))) dt + \\ & + \min_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} (H(u_\varepsilon(t)) - H(\xi(t))) dt. \end{aligned}$$

Pour (3,1) la fonctionnelle $\int_{t_1}^{t_2} H(v(t)) dt$ est convexe continue sur $\mathcal{L}^2(t_1, t_2; H^1(\Omega))$; donc cette fonctionnelle est semicontinue inférieurement dans la topologie faible de $\mathcal{L}^2(t_1, t_2; H^1(\Omega))$, dont

$$\min_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} (H(u_\varepsilon(t)) - H(\xi(t))) dt \geq 0.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} & \min_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} (H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - H(\xi(t))) dt \geq \\ & \geq \min_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} \left(-e^{-(1+\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) dt = 0. \end{aligned}$$

La thèse est ainsi démontrée.

Toutes les hypothèses du Th. IV sont donc valables; nous pouvons, alors, affirmer que dans notre cas particulier l'inéquation d'évolution (1,3) a une unique solution presque périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et \mathcal{S}^2 — presque périodique dans $H^1(\Omega)$.

Indiquons par $u_g(t)$ la solution de (1,3) dans notre cas particulier.

De la démonstration du Th. IV résulte que $\forall g > 0$, on a, $\forall \tau \in \mathbf{R}$,

$$(3,3) \quad |u_g(t+\tau) - u_g(t)| \leq \varphi(\text{Sup}_{t \in \mathbf{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|)$$

$$(3,4) \quad \begin{aligned} & \int_0^1 \|u_g(t+\tau+\eta) - u_g(t+\eta)\|^2 d\eta \leq \\ & \leq \varphi(\text{Sup}_{t \in \mathbf{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\|). \end{aligned}$$

Si nous posons $v(t) = 0$ dans notre inéquation d'évolution, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} H_g(u_g(t)) dt + \alpha \int_{t_1}^{t_2} \|u_g(t)\|^2 dt + C^{\text{st}} \leq \\ & \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} (\|f(t)\|)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u_g(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

où

$$H_g(u_g(t)) = g \int_{\mathbb{F}} |u_g(t, x)| d\sigma.$$

De la relation précédente on a

$$(3,5) \quad \int_{t_1}^{t_2} \|u_g(t)\|^2 dt \leq C^{st}.$$

$$(3,6) \quad \int_{t_1}^{t_2} H_g(u_g(t)) dt \leq C^{st}.$$

dont

$$(3,7) \quad \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} |u_g(t, x)| dt d\sigma = 0.$$

De (3,3), (3,4), (3,5) on a qu'on peut extraire de $\{u_g(t)\}$ une sous-suite, que nous indiquons encore par $\{u_g(t)\}$, telle que

$$(3,8) \quad \lim_{g \rightarrow \infty}^* u_g(t) = u_D(t) \text{ dans } \mathcal{L}^2(t_1, t_2; H^1(\Omega))$$

$$(3,9) \quad \lim_{g \rightarrow \infty} u_g(t) = u_D(t) \text{ dans } C(t_1, t_2; \mathcal{L}^2(\Omega))$$

$$(3,10) \quad \lim_{g \rightarrow \infty}^{**} u_g(t) = u_D(t) \text{ dans } \mathcal{S}^2(H^1(\Omega)).$$

De (3,3), (3,9) et (3,10) on a que $u_D(t)$ est presque périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et \mathcal{S}^2 — presque périodique dans $H^1(\Omega)$, de (3,7) on a

$$u_D(t) \in H_0^1(\Omega) \text{ p.p.}$$

Si on passe à la limite dans (1,3), par les mêmes procédés du Th. IV on a alors que $u_D(t)$ est l'unique solution presque — périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et \mathcal{S}^2 — presque périodique dans $H_0^1(\Omega)$ de l'inéquation d'évolution

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle - \\ - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \} dt \geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \}, \quad t_1 \leq t_2$$

$$\forall v(t) \in \{ v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; H_0^1(\Omega)) \quad v'(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; H^{-1}(\Omega)) \\ u(t) \in \{ v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; H_0^1(\Omega)) \cap C(\mathbf{R}; \mathcal{L}^2(\Omega)) \}$$

qui est équivalent au problème (1,5).

De l'unicité de la solution presque périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et \mathcal{S}^2 — presque périodique dans $H^1(\Omega)$ de (1,5), on a que (3,8), (3,9), (3,10) sont valables pour l'entière suite $\{u_g(t)\}$.

Faisons maintenant tendre $g \rightarrow 0$.

De (3,5) on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} |u_g(t, x)| dt d\sigma \leq C^{st}.$$

et donc

$$\lim_{g \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} H_g(u_g(t)) dt = 0.$$

De la même façon $\forall v(t) \in \mathcal{L}_{loc}^2(\mathbf{R}; H^1(\Omega))$ on a

$$\lim_{g \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} H_g(v(t)) dt = 0.$$

De (3,3), (3,4), (3,5) on a encore qu'on peut extraire de $\{u_g(t)\}$ une sous-suite, que nous indiquons encore par $\{u_g(t)\}$, telle que

$$(3,13) \quad \lim_{g \rightarrow 0}^* u_g(t) = u_N(t) \text{ dans } \mathcal{L}^p(t_1, t_2; H^1(\Omega))$$

$$(3,14) \quad \lim_{g \rightarrow 0} u_g(t) = u_N(t) \text{ dans } C(t_1, t_2; \mathcal{L}^2(\Omega))$$

$$(3,15) \quad \lim_{g \rightarrow 0}^{**} u_g(t) = u_N(t) \text{ dans } \mathcal{S}^2(H^1(\Omega)).$$

De (3,13), (3,14) et (3,15) on a que $u_N(t)$ est presque périodique dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et \mathcal{S}^2 — presque périodique dans $H^1(\Omega)$.

Si on passe à la limite, par les mêmes procédés utilisés dans le Th. IV, on a que $u_N(t)$ est l'unique solution presque périodique dans $H^1(\Omega)$ de l'inéquation d'évolution. ■

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t), v(t) - u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t) - u(t) \rangle - \\ - \langle f(t), v(t) - u(t) \rangle \} dt \geq \frac{1}{2} \{ |v(t_2) - u(t_2)|^2 - |v(t_1) - u(t_1)|^2 \}, \quad t_1 \leq t_2$$

$$\forall v(t) \in \{ v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}; H^1(\Omega)) \quad v'(t) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}; (H^1(\Omega))^*) \}$$

$$u(t) \in \{ v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(\mathbf{R}; H^1(\Omega)) \cap C(\mathbf{R}; \mathcal{L}^2(\Omega)) \}$$

qui est équivalente au problème (1,6).

De l'unicité de la solution presque périodique dans $H^1(\Omega)$ de (1,6) on a que (3,8), (3,9) et (3,10) sont valables pour l'entière suite $\{u_g(t)\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BIROLI M.: *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution paraboliques*. Annali di Matematica, serie IV, vol. 88.
- [2] BIROLI M.: *Sull'unicità della soluzione limitata di una diseguaglianza variazionale d'evoluzione*. Rend. Ac. Naz. Lincei, serie VIII. vol. XLVIII, fasc. 4, Aprile 1970.
- [3] BIROLI M.: *Solutions presque périodiques d'une équation et d'une inéquation parabolique avec terme de retard non linéaire*. (I. II. III.). Rend. Ac. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XLVIII fasc. 6, vol. XLIX, fasc. 1-2 e fasc. 3-4.
- [4] DUVAUT G., LIONS J. L.: *Sur des nouveaux problèmes d'inéquations variationnelles posés par la Mécanique. Le cas stationnaire*. C.R. Ac. Sc. Paris, t. 269 (1969).
- [5] DUVAUT G., LIONS J. L.: *Sur des nouveaux problèmes d'inéquations variationnelles posés par la Mécanique. Le cas d'évolution*. C.R. Ac. Sc. Paris, t. 269 (1969).
- [6] SIBONY M.: *Minimisation des fonctionnelles non différentiables*. Séminaire Lions, Décembre '69.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 giugno 1970.