RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIULIO CESARE BAROZZI

# Un problema al contorno non omogeneo in un dominio angoloso per equazioni fortemente quasi-ellittiche in due variabili (I)

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 44 (1970), p. 27-63

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__27_0>

# UN PROBLEMA AL CONTORNO NON OMOGENEO IN UN DOMINIO ANGOLOSO PER EQUAZIONI FORTEMENTE QUASI-ELLITTICHE IN DUE VARIABILI (I)

GIULIO CESARE BAROZZI *)

## Introduzione.

In questa nota vengono presi in considerazione operatori fortemente quasi-ellittici in due variabili del tipo

$$P(D)=\sum_{\alpha_1/m_1+\alpha_2/m_2=2} a_\alpha D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2},$$

dove $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$ è un vettore a componenti intere non negative e i coefficienti $a_\alpha$ sono costanti. Un problema ben posto per tale operatore nel dominio angoloso $R_+^2=\{(x_1, x_2); x_1>0, x_2>0\}$, consiste nella determinazione di una funzione $u$ che sia soluzione (in un senso conveniente) di $P(D)u=0$ in $R_+^2$, essendo assegnate le derivate $D_{x_1}^h u$, $h=0, 1, ..., m_1-1$, per $x_1=0$, e $D_{x_2}^k u$, $k=0, 1, ..., m_2-1$, per $x_2=0$. È chiaro che ci si può limitare a studiare il caso in cui le derivate $D_{x_1}^h u$ sono nulle.

Lo studio di un tale problema al contorno non omogeneo in un dominio angoloso è stato affrontato e risolto da B. Pini [11], nel caso particolare delle equazioni contenenti le sole derivate pure, anche nel caso di più di due variabili. Nella trattazione che segue, la presenza delle derivate miste è essenziale; esse complicano lo studio del problema sotto il profilo tecnico e rendono impossibile il ricorso a metodi tipo « separazione delle variabili ».

Adattando il metodo impiegato da B. Pini nel lavoro citato, il problema viene affrontato cercando di rappresentare una soluzione mediante

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Bologna.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1969.

un potenziale opportuno, costruito con l'ausilio della trasformata di Fourier. Imponendo le condizioni al contorno si è condotti ad un sistema di $m_2$ equazioni integro-differenziali con nuclei singolari in $m_2$ funzioni incognite; la deduzione di tali equazioni costituisce il contenuto del numero 1.

Nei numeri successivi 2, 3 e 4 viene dimostrata la possibilità di risolvere il sistema ottenuto in un opportuno spazio funzionale, quando i termini noti (che sono le tracce della soluzione e delle sue derivate normali su $x_2=0$) appartengono ad un certo « spazio di tracce ». La trattazione è svolta nell'ambito degli spazi del tipo di Sobolev.

**1.** Sia

$$P(D)=\sum_{\alpha_1/m_1+\alpha_2/m_2=2} a_\alpha D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2}$$

un operatore quasi-ellittico in due variabili a coefficienti costanti; noi supporremo che $P$ sia fortemente quasi-ellittico, ci limiteremo anzi a considerare quegli operatori per i quali gli indici $\alpha_1$ di derivazione rispetto ad $x_1$ assumono soltanto valori pari. In alcuni casi tale condizione risulta soddisfatta automaticamente: ad esempio se $2m_1/d$ è pari, $d$ essendo il massimo comune divisore tra $2m_1$ e $2m_2$. È noto che per ogni $\xi_1 \neq 0$ l'equazione $P(i\xi_1, i\xi_2)=0$ ammette $m_1$ radici con parte immaginaria positiva ed altrettante radici con parte immaginaria negativa; analogamente, per ogni $\xi_2 \neq 0$ la stessa equazione ammette $m_2$ radici con immaginario positivo ed altrettante con immaginario negativo (v. [1]).

Ne segue che per ogni $\xi \in R-\{0\}$, l'equazione

$$P(i\xi, \mu)=\Sigma a_\alpha (i\xi)^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2}=0$$

ammette $2m_2$ radici $\mu_k(\xi)$, $k=1, 2, ..., 2m_2$, nessuna delle quali puramente immaginaria; ciascuna di esse si scrive

$$\mu_k(\xi)=\omega_k \cdot (|\,\xi\,|)^{m_1})^{1/m_2},$$

con $\omega_k$ radice dell'equazione $\Sigma a_\alpha i^{\alpha_1} \omega^{\alpha_2}=0$. Siano $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{m_2}$ le radici di tale equazione con parte reale negativa: noi supporremo distinte tali radici. Consideriamo il problema consistente nella determinazione di una soluzione $u$ di $P(D)u=0$ per $x_1>0$, $x_2>0$, con le condizioni al contorno

$$D_{x_1}^h u(0, x_2)=0, \qquad x_2>0, \qquad h=0, 1, \dots, m_1-1; \tag{1}$$

$$D_{x_2}^j u(x_1, 0)=f_j(x_1), \qquad x_1>0, \qquad j=0, 1, \dots, m_2-1, \tag{2}$$

dove le $f_j$ sono funzioni la cui regolarità verrà specificata in seguito.

Sia $V(\xi)=V(\mu_1(\xi), \dots, \mu_{m_2}(\xi))$ il determinante di Vandermonde delle radici $\mu_1, \dots, \mu_{m_2}$, $V_{jk}(\xi)$ il complemento algebrico di $\mu_k^j$ nel determinante stesso. Risulta

$$V_{jk}/V=c_{jk}\,|\,\xi\,|^{-\frac{m_1}{m_2}j}$$

con

$$\sum_{k=1}^{m_2} \omega_k^r c_{jk}=\delta_{jr}, \qquad j, r=0, 1, \dots, m_2-1, \tag{3}$$

dove $\delta_{jr}$ sono i simboli di Kronecker.

Ricerchiamo una soluzione del problema sotto la forma

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{m_2-1} \sum_{k=1}^{m_2} \int_0^{+\infty} (i\xi)^{m_1}\Big[e^{ix_1\xi}-\sum_{h=0}^{m_1-1} b_{hk}^{+} e^{i\delta_{hk}^{+}x_1\xi}\Big]\cdot \\ \cdot e^{\mu_k(\xi)x_2}(V_{jk}(\xi)/V(\xi))\widehat{\varphi_j}(\xi)d\xi+ \\ +(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{m_2-1} \sum_{k=1}^{m_2} \int_{-\infty}^{0} (i\xi)^{m_1}\Big[e^{ix_1\xi}-\sum_{h=0}^{m_1-1} b_{hk}^{-} e^{i\delta_{hk}^{-}x_1\xi}\Big]\cdot \\ \cdot e^{\mu_k(\xi)x_2}(V_{jk}(\xi)/V(\xi))\widehat{\varphi_j}(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{4}$$

avendo posto

$$\widehat{\varphi_j}(\xi)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-ix_1\xi}\varphi_j(x_1)dx_1,$$

le $\varphi_j$ essendo densità da determinarsi, nulle per $x_1<0$, di quadrato sommabile su $R_+=]0, +\infty[$.

La convergenza degli integrali a secondo membro di (4) è assicurata, se $\operatorname{Im}\delta^+_{hk}\geq 0$ e $\operatorname{Im}\delta^-_{hk}\leq 0$, dalla scelta delle radici $\mu_k$ e dal fattore di convergenza nell'origine $(i\xi)^{m_1}$.

La funzione (4) è una soluzione di $P(D)u=0$ se, per ogni $k$ e $h$, si ha

$$\sum_\alpha a_\alpha(i\delta^\pm_{hk}\xi)^{\alpha_1}\mu_k^{\alpha_2}(\xi)=0,$$

cioè

$$\sum_\alpha a_\alpha(i\delta^\pm_{hk})^{\alpha_1}\omega_k^{\alpha_2}=0.$$

Nelle ipotesi ammesse, per ogni $k$ l'equazione

$$\sum_\alpha a_\alpha(i\delta)^{\alpha_1}\omega_k^{\alpha_2}=0$$

ammette $2m_1$ radici divise in coppie di numeri opposti. In particolare, ammettendo la radice 1, essa ammette la radice $-1$. Scegliamo, per ogni fissato $k$, $m_1$ radici $\delta^+_{hk}$, $h=0, 1, \ldots, m_1-1$, in modo che sia $\delta^+_{hk}=-1$, oppure $\operatorname{Im}\delta^+_{hk}>0$; analogamente $\delta^-_{hk}$ sarà uguale a $-1$, oppure $\operatorname{Im}\delta^-_{hk}<0$.

Ammetteremo che, per ogni $k$, tanto le radici $\delta^+_{hk}$, quanto le radici $\delta^-_{hk}$ siano distinte. La funzione (4) verifica le condizioni al contorno (1) se, per ogni $k$,

$$\sum_{k=0}^{m_1-1} b^\pm_{hk}(\delta^\pm_{hk})^r=1, \qquad r=0, 1, \ldots, m_1-1. \tag{5}$$

Per tradurre in condizioni sulle $\varphi_j$ le condizioni al contorno (2), osserviamo innanzitutto che, se le $\varphi_j$ sono funzioni di quadrato sommabile su $R$ con le derivate fino all'ordine $m_1$, si ha

$$\lim_{x_2\downarrow 0}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sum_j\int_R e^{ix_1\xi}\sum_k e^{\mu_k(\xi)x_2}[\mu_k(\xi)]^r\frac{V_{jk}(\xi)}{V(\xi)}(i\xi)^{m_1}\widehat{\varphi}_j(\xi)d\xi= \tag{6}$$
$$=D^{m_1}\varphi_r(x_1), \qquad r=0, 1, \ldots, m_2-1.$$

Studiamo il comportamento per $x_2\downarrow 0$, degli integrali

$$\int_0^{+\infty} e^{i\delta^+_{hk}x_1\xi}e^{\omega_k\xi^{m_1/m_2}x_2}\xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}\widehat{\varphi}_j(\xi)d\xi,$$

corrispondenti alla derivata $D^r_{x_2}$. Scriviamo $\delta$ al posto di $\delta^{\pm}_{hk}$, $\omega$ al posto di $\omega_k$ e $\varphi$ al posto di $\varphi_j$. Supponiamo dapprima $\operatorname{Im}\delta>0$. Si ha allora, per $\varphi\in C_0^\infty(R_+)$,

$$\int_0^{+\infty}\exp\,[i\delta x_1\xi+\omega\xi^{m_1/m_2}x_2]\xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}\left(\int_0^{+\infty}\exp\,(-i\xi t)\varphi(t)dt\right)d\xi=$$

$$=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\left(\int_0^{+\infty}\exp\,[i(\delta x_1-t)\xi+\omega\xi^{m_1/m_2}x_2]\xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}d\xi\right)dt.$$

Ora si ha

$$\left|\int_0^{+\infty}\exp\,[i(\delta x_1-t)\xi+\omega\xi^{m_1/m_2}x_2]\xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}d\xi\right|\leq$$

$$\leq\int_0^{+\infty}\exp\,[-\operatorname{Im}\delta x_1\xi]\xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}d\xi<+\infty,$$

ciò che assicura la possibilità di passare al limite per $x_2\downarrow 0$ sotto entrambi gli integrali (in $d\xi$ e in $dt$). Calcoliamo

$$\int_0^{+\infty}e^{i\alpha\xi}\xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}d\xi,$$

avendo posto $\alpha=\delta x_1-t$. Per ogni $x$, $t>0$ si ha

$$\arg\alpha=\arg\,(\delta x_1-t)\in\,]0,\ \pi[.$$

Poniamo

$$i\alpha\xi=-z\Leftrightarrow\xi=\frac{iz}{\alpha},\quad -\pi/2<\arg z<\pi/2.$$

Si trova

$$\int_0^{+\infty}e^{i\alpha\xi}\xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}d\xi=\left(\frac{i}{\alpha}\right)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}\int_L e^{-z}z^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}dz,$$

con

$$\arg i = \pi/2, \qquad L = \{z \in \boldsymbol{C};\ \arg z = \arg \alpha - \pi/2\}.$$

Poichè $e^{-z} z^{(m_1/m_2)(m_2+r-j)}$ decresce esponenzialmente nel semipiano $\operatorname{Re} z > 0$, si ha

$$\int_L e^{-z} z^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)} dz = \int_0^{+\infty} e^{-x_1} x_1^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)} dx_1 =$$

$$= \Gamma(m_1 + (m_1/m_2)(r-j) + 1).$$

Se ne conclude che

$$\text{(7)} \qquad \lim_{x_2 \downarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{i\delta_{hk}^+ x_1 \xi} e^{\omega_k \xi^{m_1/m_2} x_2} \xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)} \widehat{\varphi}_j(\xi) d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[ i\,\frac{\pi}{2}(m_1 + (m_1/m_2)(r-j) + 1) \right] \Gamma[m_1 + (m_1/m_2)(r-j) + 1]$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi_j(t)}{(\delta_{hk}^+ x_1 - t)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}} dt,$$

dove, come già si è detto, $0 < \arg(\delta_{hk}^+ x_1 - t) < \pi$.

Lo stesso risultato sussiste se $\delta_{hk}^+ = -1$, a patto di scegliere $\arg(\delta_{hk}^+ x_1 - t) = \arg(-x_1 - t) = \pi$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} \exp[-ix_1\xi + \omega\xi^{m_1/m_2} x_2] \xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)} \left( \int_0^{+\infty} \exp(-i\xi t)\varphi(t) dt \right) d\xi =$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(t) \left( \int_0^{+\infty} \exp[i(-x_1 - t)\xi + \omega\xi^{m_1/m_2} x_2] \xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)} d\xi \right) dt.$$

Ora le funzioni

$$f_{x_2}(\xi) = \begin{cases} \exp[\omega\xi^{m_1/m_2} x_2] \xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}, & \xi > 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , & \xi < 0, \end{cases}$$

per $x_2 \downarrow 0$ convergono in $S'$ alla funzione

$$f_0(\xi)=\begin{cases}\xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}, & \xi>0\\ 0 \quad , & \xi<0,\end{cases}$$

e dunque la trasformata di Fourier di $f_{x_2}$ tende (in $S'$) alla trasformata di Fourier di $f_0$, calcolata nel punto $-x_1-t$, cioè a

$$\left(\frac{i}{-x_1-t+i0}\right)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}\Gamma[m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1],$$

(vedi [5], Cap. 2, § 3) dove $-x_1-t+i0$, significa che $\arg(-x_1-t)=\pi$.

Riassumendo: in base a (7) si trova che

$$\text{(8)}\qquad \lim_{x_2\downarrow 0} -(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}(i\xi)^{m_1}\sum_k\Big[\sum_h b_{hk}^{+}e^{i\delta_{hk}^{+}x_1\xi}\Big]\cdot$$

$$\cdot e^{\mu_k(\xi)x_2}[\mu_k(\xi)]^r V_{jk}(\xi)/V(\xi)\widehat{\varphi}_j(\xi)d\xi=$$

$$=-(2\pi)^{-1}i^{m_1+1}\exp\,[i(\pi/2)(m_1+(m_1/m_2)(r-j))]\Gamma[m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1]\cdot$$

$$\cdot\int_0^{+\infty}\varphi_j(t)\sum_{k=1}^{m_2}\omega_k{}^r c_{jk}\sum_{h=0}^{m_1-1}\frac{b_{hk}^{+}}{(\delta_{hk}^{+}x_1-t)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}}dt,$$

per ogni $j$, $r=0$, 1, ..., $m_2-1$.

Un calcolo perfettamente simile fornisce

$$\text{(9)}\qquad \lim_{x_2\downarrow 0} -(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{0}(i\xi)^{m_1}\sum_k\Big[\sum_h b_{hk}^{-}e^{i\delta_{hk}^{-}x_1\xi}\Big]\cdot$$

$$\cdot e^{\mu_k(\xi)x_2}[\mu_k(\xi)]^r V_{jk}(\xi)/V(\xi)\widehat{\varphi}_j(\xi)d\xi=$$

$$=(2\pi)^{-1}i^{m_1+1}\exp\,[i(\pi/2)(m_1-(m_1/m_2)(r-j))]\Gamma[m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1]\cdot$$

$$\cdot\int_0^{+\infty}\varphi_j(t)\sum_{k=1}^{m_2}\omega_k{}^r c_{jk}\sum_{h=0}^{m_1-1}\frac{b_{hk}^{-}}{(\delta_{hk}^{-}x_1-t)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}}dt,$$

dove si conviene che sia $\arg(\delta_{hk}^{-}x_1 - t) \in [-\pi, 0[$, $\forall h, k$. Se si pone

$$C_{rj}^{+} = -(2\pi)^{-1} i^{2m_1+1} \exp[i(\pi/2)(m_1/m_2)(r-j)]\Gamma[m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1]$$

$$C_{rj}^{-} = (2\pi)^{-1} i^{2m_1+1} \exp[i(-\pi/2)(m_1/m_2)(r-j)]\Gamma[m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1]$$

si trova che le condizioni al contorno (2) si traducono nelle equazioni (vedi (6), (8) e (9))

$$(10) \qquad D^{m_1}\varphi_r(x_1) + \sum_{j=0}^{m_2-1} \int_{R_+} \varphi_j(t) \left\{ \sum_{k=1}^{m_2} \omega_k{}^r c_{jk} \sum_{h=0}^{m_1-1} \left[ \frac{C_{rj}^{+} b_{hk}^{+}}{(\delta_{hk}^{+}x_1 - t)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{C_{rj}^{-} b_{hk}^{-}}{(\delta_{hk}^{-}x_1 - t)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}} \right] \right\} dt = f_r(x_1),$$

$r = 0, 1, \ldots, m_2 - 1$, $x_1 \in R_+$. Se si pone $\vec{\varphi} = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{m_2-1})$, $\vec{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{m_2-1})$, il sistema ottenuto può essere scritto

$$(10_1) \qquad D^{m_1}\vec{\varphi}(x_1) + \int_{R_+} (K\vec{\varphi})(x_1, t)dt = \vec{f}(x_1),$$

dove $K = [K_{rj}]$, $r, j = 0, 1, \ldots, m_2 - 1$, è identificabile con la matrice avente come termini i nuclei

$$K_{rj}(x_1, t) = \sum_{k=1}^{m_2} \omega_k{}^r c_{jk} \sum_{h=0}^{m_1-1} \left[ \frac{C_{rj}^{+} b_{hk}^{+}}{(\delta_{hk}^{+}x_1 - t)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{rj}^{-} b_{hk}^{-}}{(\delta_{hk}^{-}x_1 - t)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}} \right].$$

Si osservi che il sistema (10) traduce le condizioni al contorno (2) a patto che le densità $\varphi_j$ appartengono a spazi funzionali su $R_+$ ottenuti mediante completamento dell'insieme delle funzioni a supporto compatto su $R_+$.

**2.** Poniamo $R_+ = ]0, +\infty[$, $\overline{R}_+ [0, +\infty[$; $C_0{}^\infty(R_+)$ indicherà come di consueto, l'insieme delle funzioni (a valori complessi) infinitamente differenziabili e a supporto compatto in $R_+$.

Con $C_0^\infty(R_+ \times \overline{R}_+)$ indicheremo l'insieme delle restrizioni a $R_+ \times \overline{R}_+$ delle funzioni di classe $C_0^\infty(R_+ \times R)$; analogo significato $C_0^\infty(\overline{R}_+^2)$. Per le funzioni $u \in C_0^\infty(\overline{R}_+^2)$ introduciamo la norma

$$\| u;\ W^m(R_+^2) \| = \| u;\ L^2(R_+^2) \| + \| D_{x_1}^{m_1} u;\ L^2(R_+^2) \| + \\ + \| D_{m_2}^{x_2} u;\ L^2(R_+^2) \|.$$

Indicheremo con $W^m(R_+^2)$ lo spazio (di Banach) ottenuto mediante completamento di $C_0^\infty(\overline{R}_+^2)$ rispetto alla norma ora introdotta.

Se $u \in W^m$, le derivate $D^\alpha u$, con $\alpha_1/m_1 + \alpha_2/m_2 \leq 1$ sono di quadrato sommabile in $R_+^2$.

Con $\overset{*}{W}{}^m(R_+^2)$ indicheremo il completamento di $C_0^\infty(R_+ \times \overline{R}_+)$ rispetto alla norma introdotta; $\overset{*}{W}{}^m$ è un sottospazio chiuso di $W^m$.

Introduciamo ora, per funzioni definite su $R_+$, alcuni spazi del tipo di Sobolev con peso.

Se $u \in C_0^\infty(\overline{R}_+)$, $\lambda \geq 0$, $-1 < \alpha < 1$, introduciamo la norma

$$\| u;\ W_\alpha^\lambda(R_+) \| = \| x^{\alpha/2} u(x);\ L^2(R_+) \| + \| x^{\alpha/2} D^{[\lambda]} u(x);\ L^2(R_+) \| + \\ + \left[ \int_{R_+} t^{-1-2(\lambda-[\lambda])} \| x^{\alpha/2} \Delta(t) D^{[\lambda]} u(x);\ L^2(R_+) \|^2\, dt \right]^{1/2},$$

dove $[\lambda]$ è la parte intera di $\lambda$ e $\Delta(t) f(x) = f(x+t) - f(x)$. $W_\alpha^\lambda(R_+)$ indicherà lo spazio (di Banach) ottenuto mediante completamento di $C_0^\infty(\overline{R}_+)$ rispetto alla norma introdotta; l'analogo completamento di $C_0^\infty(R_+)$ verrà qui indicato $\overset{\circ}{W}{}_\alpha^\lambda(R_+)$. $\overset{\circ}{W}{}_\alpha^\lambda$ è un sottospazio chiuso di $W_\alpha^\lambda$. Spazi del tipo ora definito, anche per funzioni di più variabili, sono stati studiati di recente da A. Cavallucci (vedi [2], [3] e la relativa bibliografia sui lavori precedenti). In particolare, nelle note ora citate è stato provato che, se $\lambda$ non è intero, il secondo dei tre addendi che definiscono la norma di $W_\alpha^\lambda$ si maggiora mediante il primo e il terzo addendo e pertanto può essere soppresso. Se $\lambda$ è intero si sopprime il terzo addendo.

Per $\alpha = 0$ (quando cioè manca il peso) scriveremo semplicemente $W^\lambda(R_+)$ e $\overset{\circ}{W}{}^\lambda(R_+)$ in luogo di $W_0^\lambda(R_+)$ e $\overset{\circ}{W}{}_0^\lambda(R_+)$.

In modo analogo a $W_\alpha^\lambda(R_+)$ si può definire lo spazio $W_\alpha^\lambda(R)$: basta considerare il peso $|x|^{\alpha/2}$ e le relative norme in $L_2(R)$.

Ora $\mathring{W}_\alpha^\lambda(R_+)$ non coincide necessariamente con l'insieme delle restrizioni ad $R_+$ delle funzioni $u \in W_\alpha^\lambda(R)$ nulle per $x<0$, ma è più ampio di tale insieme, almeno per certi valori di $\lambda$ e $\alpha$. In altri termini: non tutte le $u \in \mathring{W}_\alpha^\lambda(R_+)$ appartengono a $W_\alpha^\lambda(R)$ se prolungate con lo zero per $x<0$.

Le funzioni di $\mathring{W}_\alpha^\lambda(R_+)$ che godono di tale proprietà costituiscono un sottospazio che indicheremo $V_\alpha^\lambda(R_+)$. $V_\alpha^\lambda(R_+)$ è uno spazio di Banach se si pone

$$(11) \quad \| u;\ V_\alpha^\lambda(R_+) \| = \| u;\ W_\alpha^\lambda(R_+) \| + \left[ \int_{R_+} t^{\alpha-2(\lambda-[\lambda])} \, | D^{[\lambda]} u(t) |^2 \, dt \right]^{1/2}$$

$$= \| u;\ W_\alpha^\lambda(R_+) \| + \| D^{[\lambda]} u;\ L_{2,\alpha-2(\lambda-[\lambda])} \|$$

avendo posto $L_{2,\beta} = W_\beta^0$. $V_\alpha^\lambda(R_+)$ è il completamento di $C_0^\infty(R_+)$ rispetto alla norma introdotta. Alternativamente, la norma in $V_\alpha^\lambda$ può essere definita ponendo

$$(11') \qquad \| u;\ V_\alpha^\lambda(R_+) \| = \| u;\ W_\alpha^\lambda(R) \|,$$

ove s'intenda che la funzione $u$ a secondo mebro è quella a primo membro prolungata con lo zero per $x<0$. Questa seconda espressione della norma di $u$ ci tornerà utile nel seguito.

Risulta

$$\alpha - 2(\lambda - [\lambda]) \neq -1 \left( \text{cioè } \lambda - [\lambda] \neq \frac{\alpha+1}{2} \right) \Rightarrow V_\alpha^\lambda = \mathring{W}_\alpha^\lambda.$$

Ciò equivale ad affermare che eccettuato il « il caso eccezionale » $\lambda - [\lambda] = (\alpha+1)/2$, si ha la maggiorazione

$$\| D^{[\lambda]} \varphi;\ L_{2,\alpha-2(\lambda-[\lambda])} \| \leq c \, \| \varphi;\ W_\alpha^\lambda \|, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(R_+),$$

$c$ essendo una costante positiva opportuna indipendente da $\varphi$.

Infatti se

$$\alpha - 2(\lambda - [\lambda]) > -1 \left( \text{cioè } \lambda - [\lambda] < \frac{\alpha+1}{2} \right)$$

si ha l'immersione continua

$$W_\alpha^{\lambda-[\lambda]} \subset W^0_{\alpha-2(\lambda-[\lambda])} = L_{2,\alpha-2(\lambda-[\lambda])}\,,$$

(v. [2], Teorema 1); quindi

$$\| D^{[\lambda]}\varphi;\ W^0_{\alpha-2(\lambda-[\lambda])} \| \leq c \,\| D^{[\lambda]}\varphi;\ W_\alpha^{\lambda-[\lambda]} \| \leq c\, \| \varphi;\ W_\alpha^\lambda \|.$$

Sia poi

$$\alpha-2(\lambda-[\lambda])<-1 \left(\text{cioè } \lambda-[\lambda]>\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Si può allora applicare il Lemma 1 di [3], tenendo presente che attualmente $m=n-1=0$, quindi va eliminata, nella diseguaglianza [8] del Lemma citato, l'integrazione in $dx'$. La [8] stessa fornisce allora, ove si ponga $2\mu=2(\lambda-[\lambda])-(\alpha+1)=(2(\lambda-[\lambda])-\alpha)-1>0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{|D^{[\lambda]}\varphi(x)-D^{[\lambda]}\varphi(0)|^2}{x^{1+2\mu}}dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-2(\lambda-[\lambda])}\,|D^{[\lambda]}\varphi(x)|^2\,dx =$$

$$= \| D^{[\lambda]}\varphi;\ L_{2,\alpha-2(\lambda-[\lambda])} \| \leq c\,\| \varphi;\ W_\alpha^\lambda \|.$$

Si osservi che le condizioni di validità della diseguglianza utilizzata, e cioè

$$0<\mu<1, \quad \frac{[\lambda]}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\alpha+1}{2\lambda}\leq 1,$$

sono soddisfatte per la scelta da noi operata di $\mu$: essa corrisponde al segno di $=$ nell'ultima diseguaglianza scritta.

Riassumendo: *nella norma* (11) *di* $V_\alpha^\lambda$ *il secondo addendo può essere omesso tutte le volte in cui non si presenta il caso di eccezionale* $\lambda-[\lambda]=(\alpha+1)/2$ (cioè $\lambda-(\alpha+1)/2 \in N \cup \{0\}$).

Nel caso eccezionale tale secondo addendo si scrive

$$\int_0^{+\infty} x^{-1}\,|D^{[\lambda]}u(x)|^2\,dx;$$

la convergenza dell'integrale scritto garantisce che una $u \in \overset{\circ}{W}_\alpha^\lambda(R_+)$ appartiene a $W_\alpha^\lambda(R)$ se prolungata con lo zero per $x<0$ (v. P. Grisvard [6]). Per $\alpha=0$ la norma di $V_0^\lambda = V^\lambda$ coincide con la norma

$$\left[ \int_R (1+\xi^2)^\lambda \, | \widehat{\varphi}(\xi) |^2 \, d\xi \right]^{1/2} = \| \varphi \|_{H_\lambda(R)} .$$

Lo spazio $H_\lambda(R)$, $\lambda \geq 0$, è il completamento di $C_0^\infty(R)$ rispetto alla norma sopra scritta; esso è un sottospazio (di Hilbert) di $L_2(R)$. Definiamo $H_\lambda(R_+)$ nel modo seguente: $u : R_+ \to C$ *appartiene a* $H_\lambda(R_+)$ *se*

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x), & x>0 \\ 0 \quad , & x<0 \end{cases}$$

*appartiene a* $H_\lambda(R)$.

Si ha allora

$$V_0^\lambda(R_+) = V^\lambda(R_+) = H_\lambda(R_+), \qquad \forall \lambda \geq 0.$$

Sia $u \in \overset{*}{W}{}^m(R_+^2)$; è noto che la traccia $D_{x_2}^j u(x_1, 0)$, $j=0, 1, \ldots, m_2-1$, appartiene allo spazio $V^{m_1-(m_1/m_2)(j+1/2)}(R_+)$. Poniamo, per semplicità,

$$\lambda_j = \lambda_j(m) = m_1 - \frac{m_1}{m_2}\left( j + \frac{1}{2} \right),$$

$$V(R_+) = \mathop{\times}_{j=0}^{m_1-1} V^{\lambda_j}(R_+).$$

Lo spazio $V(R_+)$ è munito in modo naturale di una struttura di spazio di Banach: Se $\vec{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m_2-1}) \in V(R_+)$, si può porre

$$\| \vec{\varphi};\ V(R_+) \| = \sum_j \| \varphi_j ,\ V^{\lambda_j}(R_+) \|.$$

Nel seguito avremo occasione di considerare anche lo spazio con peso

$$V_\alpha(R_+) = \mathop{\times}_{j=0}^{m_2-1} V_\alpha^{\lambda_j}(R_+), \qquad -1<\alpha<1.$$

Consideriamo altresì gli spazi

$$V'_\alpha(R_+) = \mathop{\times}_{j=0}^{m_2-1} V_\alpha^{\lambda_j+m_1}(R_+),$$

e scriveremo $V'(R_+)$ anzichè $V'_0(R_+)$.

Tornando ora alla formula (4) che costituisce il punto di partenza della presente nota, osserviamo che essa è un caso particolare della seguente

$$(4_1) \qquad u(x_1\,,\ x_2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{m_2-1} \sum_{k=1}^{m_2} \int_0^{+\infty} [e^{ix_1\xi} - \sum_{h=0}^{m_1-1} b_{hk}^{+} e^{i\delta_{hk}^{+} x_1 \xi}] \cdot$$

$$\cdot e^{\mu_k(\xi) x_2} (V_{jk}(\xi)/V(\xi)) \widehat{\psi}_j(\xi) d\xi +$$

$$+ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{m_2-1} \sum_{k=1}^{m_2} \int_{+\infty}^{0} [e^{ix_1\xi} - \sum_{h=0}^{m_1-1} b_{hk}^{-} e^{i\delta_{hk}^{-} x_1 \xi}] \cdot$$

$$\cdot e^{\mu_k(\xi) x_2} (V_{jk}(\xi)/V(\xi)) \widehat{\psi}_j(\xi) d\xi,$$

con $\psi_j$ di quadrato sommabile. La $u$ fornita dalla $(4_1)$ si scrive nella forma (4) tutte le volte che $\psi_j$ è la derivata d'ordine $m_1$ di una funzione $\varphi_j$ di quadrato sommabile, tutte le volte, cioè, che $\xi \to \widehat{\psi}_j(\xi)/(i\xi)^{m_1}$ è una funzione di $L^2$. La particolare scelta da noi operata per le densità $\psi_j$, implicita nella (4), ha facilitato la deduzione delle equazioni (10). Si osservi che la convergenza degli integrali che compaiono in $(4_1)$ per $\xi = 0$ segue facilmente dalla (5). Sussiste il seguente

TEOREMA 1. *Per ogni* $\vec{\psi} \in V(R_+)$, *la funzione* $u$ *fornita dalla formula* $(4_1)$ *è tale che* $u \cdot \omega \,|_{R_+^2} \in W^m(R_+^2)$, *per ogni* $\omega \in C_0^\infty(R^2)$.

La dimostrazione è sostanzialmente la stessa fornita nella nota [10] di B. Pini; essa viene pertanto omessa.

Indichiamo con $D^{m_1} + \mathcal{K}$ l'applicazione (v. $(10_1)$):

$$D^{m_1} + \mathcal{K} : \vec{\varphi}(x) \to D^{m_1} \vec{\varphi}(x) + \int_{R_+} (K\vec{\varphi})(x,\ t) dt.$$

Teorema 2. *L'applicazione $D^{m_1}+\mathcal{K}$ è continua da $V'(R_+)$ a $V(R_+)$.* La maggiorazione

$$\| D^{m_1}\varphi;\ V^{\lambda_j} \| \leq c \,\| \varphi;\ V^{\lambda_j+m_1} \|, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(R_+),$$

equivalente alla continuità di $\vec{\varphi} \to D^{m_1}\vec{\varphi}$ da $V'_\alpha$ a $V_\alpha$, è immediata ove si tenga anche conto del Teorema 1 di [2].

Qui e nel seguito s'intende che $c$ indichi una costante positiva opportuna, indipendente dalle funzioni che compaiono nelle varie diseguaglianze e non necessariamente la stessa in ogni formula.

Per dimostrare il Teorema 2, occorre provare che l'applicazione $\vec{\varphi} \to \vec{\varphi}\mathcal{K}$ è continua da $V'$ a $V$.

Tenendo presente la (10), calcoliamo la derivata $D_x^s$ della $r$-esima componente del vettore $\mathcal{K}\vec{\varphi}$:

$$D^s \sum_j \int_{R_+} K_{rj}(x,\ t)\varphi_j(t)dt =$$

$$= (-1)^s \sum_k \left[\lambda_{rj}(\lambda_{rj}+1)\ \dots\ (\lambda_{rj}+s-1)\right]\cdot$$

$$\cdot \int_{R_+} \varphi_j(t) \left\{ \sum_k \omega_k{}^r c_{jk} \sum_h \left[ \frac{(\delta_{hk}^+ b_{hk}^+)^s C_{rj}^+}{(\delta_{hk}^+ x - t)^{\lambda_{rj}+s}} + \frac{b_{hk}^-(\delta_{hk}^-)^s C_{rj}^-}{(\delta_{hk}^- x - t)^{\lambda_{rj}+s}} \right] \right\} dt,$$

$s=0,\ 1,\ \dots,\ m_1-1$, dove, per semplicità, abbiamo scritto $x$ al posto di $x_1$ e $\lambda_{rj}$ al posto di $m_1+m_1/m_2(r-j)+1$.

Per $x \downarrow 0$ ciascuno degli integrali a secondo membro tende a zero, in quanto tende a zero il rispettivo nucleo. Infatti, tenendo conto della (5), si ha che l'ultimo integrale scritto tende a

$$\sum_k \omega_k{}^r c_{jk} \int_{R_+} \varphi_j(t) \left[ \frac{C_{rj}^+}{(-t+i0)^{\lambda_{rj}+s}} + \frac{C_{rj}^-}{(-t+i0)^{\lambda_{rj}+s}} \right] dt,$$

ove si intende che sia $\arg(-t+i0)=\pi$, $\arg(-t-i0)=-\pi$.

Sfruttando ora la (3) si trova che la somma di integrali scritta sopra è senz'altro nulla se $r \neq j$. Se poi $r=j$ essa è ancora nulla in quanto, per $r=j$, si ottiene $\lambda_{rr}=m_1+1 \in N$, quindi le due determinazioni della

potenza $(-t)^{\lambda_{rr}+s}$ coincidono, d'altra parte $C_{rr}^{+}+C_{rr}^{-}=0$.
Per completare la dimostrazione rimane da dimostrare la maggiorazione

$$\| K\vec{\varphi};\ \vec{V} \| \leq c \| \vec{\varphi};\ \vec{V}' \|, \qquad \forall \vec{\varphi} \in \underset{j}{\times}\, C_0^\infty(R_+), \tag{13}$$

o, in forma equivalente,

$$\sum_r \left\| \sum_j \int_{R_+} K_{rj}(\cdot,\ t)\varphi_j(t)dt;\ V^{\lambda_r} \right\| \leq c \sum_r \| \varphi_r\ ;\ V^{\lambda_r+m_1} \|. \tag{13'}$$

A sua volta la (13′) sarà dimostrata se proveremo la maggiorazione

$$\left\| \int_{R_+} K_{rj}(\cdot,\ t)\varphi(t)dt;\ V^{\lambda_r} \right\| \leq c \| \varphi;\ V^{\lambda_j+m_1} \|, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(R_+). \tag{14}$$

per ogni $r,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ m_2-1$.

Ora l'integrale

$$\int_{R_+} K_{rj}(x,\ t)\varphi(t)dt = \int_{R} K_{rj}(x,\ t)\varphi(t)dt$$

è una combinazione lineare di termini del tipo

$$\int_{R_+} \frac{1}{(\delta_{hk}^{\pm}x-t)^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)+1}}\varphi(t)dt,$$

e ciascuno di questi proviene (mediante passaggio al limite sotto il segno di integrale, per $x_2 \to 0+$) da un termine del tipo

$$\int_0^{+\infty} e^{i\delta_{hk}^{+}x\xi} e^{\omega_k \xi^{m_1/m_2} x_2} \xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)} \widehat{\varphi}(\xi)d\xi,$$

e da un termine analogo per $\delta_{hk}^{-}$ (si riveda in proposito il procedimento che ha condotto alla (7)). Ora si può porre

$$\int_0^{+\infty} e^{i\delta_{hk}^{+}x\xi} \xi^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)} \widehat{\varphi}(\xi)d\xi = \gamma \int_0^{+\infty} e^{i\delta_{hk}^{+}x\xi} \mathfrak{F}[D^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}\varphi](\xi)d\xi,$$

$(\mathfrak{F}\varphi=\widehat{\varphi})$ dove $\gamma$ è una potenza convenientemente definita dell'unità immaginaria, $D^{\mu}\varphi$ è la derivata (di Liouville) di ordine $\mu\geq 0$ della funzione $\varphi$. Sempre in virtù del procedimento che ha condotto all'uguaglianza (7), l'ultimo integrale scritto vale

$$i(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_R \frac{1}{\delta_{hk}^{+}x-t}D^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}\varphi(t)dt.$$

La derivata $D^{\mu}\varphi(t)$ è nulla, al pari di $\varphi$, per $t<0$ (v. [9], osservazione C del n. 3).

Ne viene che

$$\int_R K_{rj}(x,\ t)\varphi(t)dt=$$

$$=\gamma'\sum_{k=1}^{m_2}\omega_k{}^r c_{jk}\sum_{h=0}^{m_1-1}\int_R\left[\frac{b_{hk}^{+}}{\delta_{hk}^{+}x-t}-\frac{b_{hk}^{-}}{\delta_{hk}^{-}x-t}\right]D^{m_1+m_1/m_2(r-j)}\varphi(t)dt=$$

$$=\int_R N_{rj}(x,\ t)D^{m_1+m_1/m_2(r-j)}\varphi(t)dt.$$

Dalle valutazioni fatte poco sopra, segue che il nucleo $N_{rj}$ tende a zero per $x\downarrow 0$ assieme alle derivate parziali rispetto ad $x$ fino all'ordine $m_1-1$. Poniamo

$$T_{rj}:\ \varphi\rightarrow\int_R N_{rj}(x,\ t)D^{m_1+(m_1/m_2)(r-j)}\varphi(t)dt;$$

$(T_{rj}\varphi)(x)$ è così definita per $x>0$. Noi dobbiamo valutare la norma

$$\|\,T_{rj}\varphi;\ V^{\lambda_r}(R_+)\,\|$$

o, ciò che equivale, la norma

$$\|\,T_{rj}\varphi;\ V^{\lambda_r}(R)\,\|,$$

ove s'intende che $T_{rj}\varphi$ sia prolungata con lo zero per $x<0$. Un modo equivalente per effettuare tale prolungamento consiste nel prolungare il nucleo $N_{rj}$ nel modo seguente:

$$N'_{rj}(x,\ t)=\begin{cases} N_{rj}(x,\ t), & \text{se } x>0,\ t>0; \\ -N_{rj}(-x,\ -t), & \text{se } x<0,\ t<0; \\ 0, & xt\leq 0. \end{cases}$$

Si osservi che il nucleo $N'_{rj}$ è omogeneo di grado $-1$ (e non soltanto positivamente omogeneo) ed è continuo per $x=0$ assieme alle derivate $D_x^s N'_{rj}$ per $s=0,\ 1,\ \ldots,\ m_1-1$. È chiaro che, per ogni $\psi$ avente il supporto in $R_+$, si ha

$$\int_R N_{rj}(x,\ t)\psi(t)dt=\int_R N'_{rj}(x,\ t)\psi(t)dt$$

per $x>0$, e la funzione a secondo membro è nulla per $x<0$. Ora la trasformazione

$$T'_{rj}\ :\ \psi\rightarrow\int_R N'_{rj}(x,\ t)\psi(t)dt$$

è continua da $W^{\lambda_r}(R)$ in sè. La dimostrazione è identica a quella fornita da B. Pini [11], n. 2, con l'unica variante che attualmente la diseguaglianza di Hilbert si applica su tutto $R$ anzichè su $R_+$, ciò che è lecito in virtù delle proprietà sopra specifiche di $N'_{rj}$. Si osservi che

$$\lambda_r=m_1-(m_1/m_2)(r+\tfrac{1}{2})\leq m_1-m_1/m_2\Rightarrow[\lambda_r]\leq m_1-1,$$

e questo consente di ripetere tutti i procedimenti della nota citata.

Poniamo per semplicità

$$(m_1/m_2)(r-j)=\gamma_{rj}\ ,$$

e osserviamo che risulta esattamente

$$\lambda_j-\lambda_r=\gamma_{rj}\ , \qquad \forall r,\ j.$$

Si ottiene, per ogni $\varphi\in C_0^\infty(R_+)$,

$$\| T_{rj}\varphi;\ V^{\lambda_r}(R_+) \| = \| T_{rj}\varphi;\ W^{\lambda_r}(R) \| = \| T'_{rj}\varphi;\ W^{\lambda_r}(R) \| \leq$$
$$\leq \| D^{m_1+\gamma_{rj}}\varphi;\ W^{\lambda_r}(R) \| \leq C \| D^{m_1+\gamma_{rj}}\varphi;\ H_{\lambda_r}(R_+) \| \leq$$
$$\leq C \| \varphi;\ H_{\lambda_j+m_1}(R_+) \| = C \| \varphi;\ V^{\lambda_j+m_1}(R_+) \|$$

dove si è sfruttata la (11′) e la coincidenza tra $V^{\lambda}(R_+)$ e $H_{\lambda}(R_+)$.

**3.** Riprendiamo in considerazione il sistema di equazioni integro-differenziali (10):

$$D^{m_1}\varphi_r(x) + \sum_{j=0}^{m_2-1} \int_R K_{rj}(x,\ t)\varphi_j(t)dt = f_r(x), \quad x \in R_+\ ,\ r = 0,\ 1,\ \ldots,\ m_2 - 1.$$

Ci proponiamo di dimostrare che se $f_r = 0$, $\forall r$, tale sistema ammette in $V'(R_+)$ la sola soluzione nulla; in termini equivalenti ciò significa che $\vec{\varphi} \rightarrow D^{m_1}\vec{\varphi} + \mathcal{K}\vec{\varphi}$ è un'applicazione iniettiva da $V'(R_+)$ a $V(R_+)$.

Per quanto farà seguito è necessario valutare il comportamento di $K_{rj}(x,\ 1)$ per $x \downarrow 0$ e $x \uparrow +\infty$. Nel numero precedente abbiamo visto che $K_{rj}$ tende a zero per $x \downarrow 0$ assieme alle derivate rispetto a $x$ fino all'ordine $m_1 - 1$ incluso; ciò in conseguenza delle (5).

Dunque

$$K_{rj}(x,\ 1) = O(x^{m_1}),\ \text{per } x \downarrow 0.$$

D'altra parte la struttura di $K_{rj}$ implica subito

$$K_{rj}(x,\ 1) = O(x^{-(1+m_1+\gamma_{rj})}),\ \text{per } x \uparrow +\infty,$$

ove si è posto $\gamma_{rj} = (m_1/m_2)(r-j)$. Scrivendo $e^x$ al posto di $x$ si ha dunque

$$K_{rj}(e^x,\ 1) = O(\exp(m_1 x)),\ \text{per } x \downarrow -\infty,$$
$$K_{rj}(e^x,\ 1) = O(\exp[-(1+m_1+\gamma_{rj})x]),\ \text{per } x \uparrow +\infty.$$

Tenendo presente che $\arg \delta^+_{hk} \neq 0$, $\forall h,\ k$, detto $\alpha_0 > 0$ un numero tale che $|\arg \delta^+_{hk}| \geq \alpha_0$, $\forall h,\ k$, si ha che la funzione $z \rightarrow K_{rj}(z,\ 1)$ è analitica nella striscia $|Im\ z| < \alpha_0$; in ogni striscia $|Im\ z| \leq \alpha' < \alpha_0$ si hanno le valutazioni

$$K_{rj}(e^z,\ 1)=O(\exp(m_1x)),\ \text{per}\ x=Re\,z\downarrow-\infty,$$

$$K_{rj}(e^z,\ 1)=O(\exp[-(1+m_1+\gamma_{rj})x]),\ \text{per}\ x\uparrow+\infty.$$

Sia $G_{rj}(\xi)$ la trasformata di Fourier di $K_{rj}(\exp(\cdot),\ 1)$ moltiplicata per $(2\pi)^{1/2}$:

$$G_{rj}(\xi)=\int_R e^{-i\xi x}K_{rj}(e^x,\ 1)dx;$$

posto $s=\xi+i\eta$, si ha allora che l'uguaglianza scritta definisce una funzione $s\to G_{rj}(s)$ analitica nella striscia

$$-m_1<\eta<1+m_1+\gamma_{rj},$$

ed in ogni striscia in essa contenuta si ha la valutazione

$$G_{rj}(s)=O(\exp(-\alpha_0\,|\,s\,|\,)),\ \text{per}\ |\,s\,|\uparrow+\infty,$$

(v. E. C. Titchmarsh [13], Teor. 26). Nel numero seguente ritroveremo questo risultato e completeremo lo studio di $G_{rj}$.

Per ogni funzione $\varphi: R_+\to C$, poniamo

$$\Phi(x)=\varphi(e^x), \qquad x\in R.$$

Se $\varphi$ è derivabile $m_1$ volte si trova

$$(15)\qquad (D^{m_1}\varphi)(e^x)=\exp(-m_1x)[\Phi^{(m_1)}(x)+a_1\Phi^{(m_1-1)}(x)+\ \dots\ +a_{m_1-1}\Phi'(x)],$$

dove i coefficienti $a_j$ sono numeri interi. Indichiamo con $P_{m_1}$ il polinomio

$$(iX)^{m_1}+a_1(iX)^{m_1-1}+\ \dots\ +a_{m_1-1}(iX).$$

Si osservi che se $\varphi\in L_2(R_+)$ allora $\Phi^*: x\to\exp(\frac{1}{2}x)\Phi(x)$ è di quadrato sommabile su $R$ e

$$\|\,\Phi^*;\ L_2(R)\,\|=\|\,\varphi;\ L_2(R_+)\,\|.$$

Se $\varphi \in V^{\lambda}(R_{+})$, allora $\Phi$ è di quadrato sommabile su $R$ col peso $\exp[(\frac{1}{2}-\lambda)x]$; ciò è implicito, ad esempio, nel Lemma 1 di A. Cavallucci [3] per $0<\lambda<1$. L'affermazione precedente verrà comunque dimostrata al termine del numero successivo (v. (27)).

Nelle (10) scriviamo $e^x$ ed $e^t$ al posto di $x$ e $t$; si ottiene

$$(10_2) \qquad \exp(-m_1 x)[\Phi_r^{(m_1)}(x)+ \ldots + a_{m_1-1}\Phi'_r(x)] +$$
$$+\sum_{j=0}^{m_2-1}\int_R K_{rj}(e^{x-t},\ 1)\exp[-(m_1+\gamma_{rj})t]\Phi_j(t)dt = F_r(x), \qquad x\in R,$$

dove si è sfruttata la (15) e si sono tenute presenti le proprietà di omogeneità di $K_{rj}$; $F_r$ indica la funzione $x \to f_r(e^x)$.

Moltiplicando entrambi i membri per $\exp(\frac{1}{2}x)$ si ottiene

$$(10_3) \qquad \exp[(\tfrac{1}{2}-m_1)x][\Phi_r^{(m_1)}(x)+a_1\Phi_r^{(m_1-1)}(x)+ \ldots + a_{m_1-1}\Phi'(x)] +$$
$$+\sum_{j=0}^{m_2-1}\int_R K_{rj}(\exp(x-t),\ 1)\exp(\tfrac{1}{2}(x-t))\exp((\tfrac{1}{2}-m_1-\gamma_{rj})t)\Phi_j(t)dt =$$
$$= \exp(\tfrac{1}{2}x)F_r(x), \qquad x\in R,\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ m_2-1.$$

Calcolando la trasformata di Laplace-Fourier di entrambi i membri nel punto $s=\xi-i\lambda_r$ e rammentando che

$$\lambda_r = m_1-(m_1/m_2)(r+\tfrac{1}{2}),$$
$$\lambda_j-\lambda_r = (m_1/m_2)(r-j) = \gamma_{rj},$$

si ottiene il sistema

$$(10_4) \qquad P_{m_1}(\xi+i(\tfrac{1}{2}-m_1-\lambda_r))\widehat{\Phi}_r(\xi+i(\tfrac{1}{2}-m_1-\lambda_r)) +$$
$$+\sum_{j=0}^{m_2-1} G_{rj}(\xi+i(\tfrac{1}{2}-\lambda_r))\widehat{\Phi}_j(\xi+i(\tfrac{1}{2}-m_1-\lambda_j)) = \widehat{F}_r(\xi+i(\tfrac{1}{2}-\lambda_r)),$$

$\xi\in R$, $r=0,\ 1,\ \ldots,\ m_2-1$. Si è così ottenuto un sistema lineare di $m_2$ equazioni nelle $m_2$ incognite $\Phi_j$; la matrice dei coefficienti si scrive (omettendo di specificare gli argomenti)

$$A = P_{m_1}I + [G_{rj}],$$

$I$ essendo la matrice identità di ordine $m_2$. Si osservi che per ogni $r, j=0, 1, \ldots, m_2-1$, si ha

$$-m_1<\tfrac{1}{2}-\lambda_r<1<1+m_1+\gamma_{rj}\,.$$

Dunque il determinante di tale matrice è una funzione analitica in una striscia del piano complesso contenente l'asse reale. Esso vale

$$\det A=P_{m_1}^{m_2}+P_{m_1}^{m_2-1}\Delta_1+P_{m_1}^{m_2-2}\Delta_2+\ \ldots\ +P_{m_1}\Delta_{m-1}+\Delta_m\,,$$

dove $\Delta_k$ è la somma dei minori principali di ordine $k$ della matrice $G_{rj}$; per ciascuno di essi vale la stima

$$\Delta_k(\xi)=O(\exp(-\alpha_0\,|\,\xi\,|)),\ \text{per}\ |\,\xi\,|\uparrow+\infty\,.$$

Ne viene che il determinante in questione è certamente diverso da zero per $|\,\xi\,|$ abbastanza grande, ed ammette al più un'infinità numerabile di zeri. Se $f_r=0$, $\forall r$, da $(10_4)$ segue che $\Phi_j(\xi+i(\frac{1}{2}-m_1-\lambda_j))=0$ q.d., dunque $\exp[(\frac{1}{2}-m_1-\lambda_j)x]\Phi_j(x)=0$ q.d. in $R$ ed infine $\varphi_j=0$ q.d. in $R_+$. Si è dunque dimostrato il

TEOREMA 3. *L'applicazione* $\vec{\varphi}\rightarrow D^{m_1}\vec{\varphi}+\mathcal{K}\vec{\varphi}$ *è iniettiva da* $V'(R_+)$ *a* $V(R_+)$.

**4.** Scopo di questo numero è la costruzione di un inverso destro dell'operatore $\vec{\varphi}\rightarrow D^{m_1}\vec{\varphi}+\mathcal{K}\vec{\varphi}$. Premettiamo alcune osservazioni.

Se si tiene presente il Teorema 1 e le osservazioni che lo precedeno, si comprende come ciò che a noi interessa è la determinazione di un vettore $\vec{\psi}\in V(R_+)$, dipendente con continuità da $\vec{f}\in V(R_+)$, da sostituire nella formula $(4_1)$. Tuttavia, se si vuole che per la soluzione $u$ così determinata le condizioni al contorno non omogenee (2) siano equivalenti al sistema di equazioni (10), è necessario e sufficiente che la $(4_1)$ possa scriversi nella forma (4). È cioè necessario e sufficiente che $\vec{\psi}$ appartenga al sottoinsieme di $V(R_+)$ formato dalle funzioni del tipo $D^{m_1}\vec{\varphi}$ con $\vec{\varphi}\in V'(R_+)$. È chiaro che se $\psi_j$ è una tale funzione, la sua primitiva $\varphi_j$ appartenente a $V^{m_1+\lambda_j}(R_+)$ è unica ed è fornita da

$$(16) \qquad \varphi_j(x)=\frac{1}{(m_1-1)!}\int_0^x (x-t)^{m_1-1}\psi_j(t)dt$$

o, in forma equivalente, da

$$(16_1) \qquad \widehat{\varphi}_j(\xi)=\widehat{\psi}_j(\xi)/(i\xi)^{m_1}.$$

Per ottenere che $\vec{\psi}$ appartenga al sottoinsieme di $V(R_+)$ sopra descritto è necessario ritoccare opportunamente i dati al contorno $f_r$. Sempre tenendo presente il Teorema 1, è chiaro che siamo interessati soltanto al comportamento della soluzione $u$ in un intorno dell'origine; non è dunque restrittivo modificare i dati al contorno $f_r$ per gli $x$ maggiori di un assegnato $x_0>0$. Possiamo dunque moltiplicare tutte le $f_r$ per una medesima funzione $\omega\in C^\infty(\overline{R_+})$, per cui

$$\omega(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\ a]\\ 0, & x\in[2a,\ +\infty],\ a>0.\end{cases}$$

Per i nuovi dati al contorno $\omega f_r$ calcoliamo i primi $m_1$ « momenti »:

$$a_k=\int_{R_+} x^k\omega(x)f_r(x)dx, \qquad k=0,\ 1,\ ...,\ m_1-1.$$

È facile costruire una funzione $g_r\in C_0^\infty(R_+)$, con supp $g_r\subset[2a,\ 3a]$ i cui momenti siano opposti ai momenti di $\omega f_r$. Ad esempio, si può partire da una $K\in C_0^\infty(R_+)$ con supp $K\subset[2a,\ 3a]$, per cui

$$\int_{R_+} x^kK(x)dx=\begin{cases}1, & \text{per } k=0\\ 0, & \text{per } k=1,\ ...,\ m_1-1;\end{cases}$$

la costruzione di una $K$ siffatta è stata suggerita da V. P. Il'in [8]; la funzione

$$g_r(x)=\sum_{h=0}^{m_1-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}D^kK(x)\cdot a_k$$

soddisfa le condizioni richieste. Le funzioni

$$f^*_r(x)=\omega(x)f_r(x)+g_r(x)$$

sono allora nulle per $x>3a$ ed hanno i primi $m_1-1$ momenti nulli. D'ora in avanti supporremo che i dati al contorno $f_r$ verifichino già le condizioni ora specificate

$$(17) \qquad x>3a \Rightarrow f_r(x)=0$$

$$(18) \qquad \int_{R_+} x^k f_r(x)dx=0, \quad \forall k=0,\ 1,\ ...,\ m_1-1,\ \forall r=0,\ 1,\ ...,\ m_2-1.$$

Le (17) e (18) assicurano la funzione

$$(16_2) \qquad h_r(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^{m_1-1}}{(m-1)!} f_r(t)dt, \qquad x\in R^+$$

è nulla per $x>3a$; inoltre la diseguaglianza di Schwarz fornisce

$$\|\, h_r\,;\ L^2(R_+)\,\|\leq c\,\|\, f_r\,;\ L^2(R_+)\,\|$$

dove la costante $c$ dipende da $a$ ma non da $f_r$. Tenendo presente la norma di $V^{\lambda_j}(R_+)$ (v. (11)) si ha allora che l'applicazione $\vec{f}\rightarrow\vec{h}$, definita dalla $(16_2)$, è continua sul sottoinsieme di $V(R_+)$ costituito dalle $\vec{f}$ verificanti (17) e (18), a valori in $V'(R_+)$. Sebbene non sia strettamente necessario per quanto segue, osserviamo che tale risultato può essere esteso agli spazi con peso.

Una prima applicazione della diseguaglianza di Schwarz fornisce infatti

$$\|\, f;\ L^1([0,\ 3a])\,\|\leq c(a)\,\|\, x^{\alpha/2}f(x);\ L^2[0,\ 3a])\,\|$$

donde la sommabilità di $f$ se $f$ stessa è di quadrato sommabile col peso $x^\alpha$. La $(16_2)$ ha dunque senso. La diseguaglianza

$$\|\, x^{\alpha/2}h_r(x);\ L^2(R_+)\,\|\leq c(a)\,\|\, x^{\alpha/2}f_r(x);\ L^2(R_+)\,\|, \quad -1<\alpha<1,$$

si stabilisce subito con una seconda applicazione della diseguaglianza di Schwarz.

Passiamo ora ad una seconda questione preliminare e cioè il completamento dello studio della funzione $G_{rj}$, definita nel numero precedente della formula

$$G_{rj}(s)=\int_{R} e^{-isx}K_{rj}(e^x,\ 1)dx,\quad s=\xi+i\eta;$$

si è già visto che tale funzione è analitica nella striscia

$$\{s\in C;\ \ -m_1<\eta<1+m_1+\gamma_{rj}\}.$$

Rammentiamo che la trasformata di Mellin di $f: R_+ \to C$ è definita formalmente da

$$\mathfrak{M}[f(\cdot)](s)=\int_{R_+} x^{s-1}f(x)dx;$$

sussiste la relazione

$$\mathfrak{M}[f(\cdot)](s)=(2\pi)^{1/2}\mathfrak{F}[f(\exp(\cdot))](is),$$

dove $\mathfrak{F}$ indica, al solito, la trasformata di Laplace-Fourier. Calcoliamo la trasformata di Mellin della funzione

$$x\to\frac{1}{(\delta_{hk}^{\pm}x-1)^{1+m_1+\gamma_{rj}}},\qquad x\in R_+ .$$

Scrivendo semplicemente $\delta$ al posto di $\delta_{hk}^{\pm}$ e $\lambda$ al posto di $1+m_1+$ $+\gamma_{rj}$, si ha

$$\int_{R_+} x^{s-1}\frac{1}{(\delta x-1)^{\lambda}}dx=\frac{1}{(-1)^{\lambda}(-\delta)^{s}}\int_{R_+}\frac{(-\delta)^{s-1}}{[1+(-\delta x)]^{\lambda}}d(-\delta x)=$$
$$=\frac{1}{(-1)^{\lambda}(-\delta)^{s}}\int_{L_\delta}\frac{z^{s-1}}{(1+z)^{\lambda}}dz,$$

ove s'intende che $\arg(-1)=\pi$, $L_\delta=\{z\in C;\ z=-\delta t,\ t\in R_+\}$.

Attualmente $|\arg(-\delta)| \leq \pi - \alpha_0$; se $0 < \xi = Re\, s < \lambda$ un semplice calcolo mostra che il cammino d'integrazione può essere ruotato fino a farlo coincidere con $R_+$, dunque

$$\int_{R_+} x^{s-1} \frac{1}{(\delta x - 1)^\lambda} dx = \frac{1}{(-1)^\lambda (-\delta)^s} \int_{R_+} \frac{x^{s-1}}{(1+x)^\lambda} dx =$$

$$= \frac{1}{(-1)^\lambda (-\delta)^s \Gamma(\lambda)} \Gamma(s) \Gamma(\lambda - s)$$

per ogni $s$ della striscia $0 < \xi < \lambda$ (v. E. C. Titchmarsh [13], § 7.7).

Dunque per la trasformata di Laplace-Fourier di

$$x \to \frac{1}{(\delta_{hk}^{\pm} e^x - 1)^{1+m_1+\gamma_{rj}}}, \qquad x \in R$$

si trova

$$\frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}}{(-1+i0)^{1+m_1+\gamma_{rj}} (-\delta_{hk}^{\pm})^{-is}} \cdot \frac{\Gamma(\eta - i\xi)\Gamma(1+m_1+\gamma_{rj} - \eta + i\xi)}{\Gamma(1+m_1+\gamma_{rj})};$$

la funzione ottenuta è analitica in tutto il piano complesso tranne nei punti

$$\xi = 0, \; \eta = \begin{cases} -k, \\ 1+m_1+\gamma_{rj}+k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

nei quali presenta poli semplici. Per $G_{rj}$ si trova allora

$$G_{rj}(\xi + i\eta) = (2\pi)^{-1} i^{2m_1+1} \Gamma(\eta - i\xi) \Gamma(1+m_1+\gamma_{rj} - \eta + i\xi) \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{m_2} \omega_k{}^r c_{jk} \sum_{h=0}^{m_1-1} \left[ \frac{-b_{hk}^+ \exp(i(\pi/2)\gamma_{rj})}{(-1+i0)^{1+m_1+\gamma_{rj}} (-\delta_{hk}^+)^{\eta - i\xi}} + \right.$$

$$\left. + \frac{b_{hk}^- \exp(i(-\pi/2)\gamma_{rj})}{(-1-i0)^{1+m_1+\gamma_{rj}} (-\delta_{hk}^-)^{\eta - i\xi}} \right].$$

In virtù delle (3) e (5) i poli che i singoli addendi di $G_{rj}$ presentano nei punti

$$\xi = 0, \; \eta = 0, \; -1, \; -2, \; \ldots, \; -m_1 + 1$$

vengono eliminati, in accordo con quanto dimostrato nel numero precedente. Dunque $G_{rj}$ è una funzione analitica nel piano complesso, avente come sole singolarità poli semplici nei punti

$$\xi=0,\ \eta=\begin{cases}-m_1-k\\ 1+m_1+\gamma_{rj}+k, & k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .\end{cases}$$

Determiniamo il comportamento asintotico di $G_{rj}$ per $|\xi|\uparrow+\infty$.

Essendo $-\pi+\alpha_0\leq \arg(-\delta_{hk}^{\pm})\leq\pi-\alpha_0$, $\forall h,\ k$, si trova, per ogni fissato $\eta\in R$,

$$\frac{1}{(-\delta_{hk}^{\pm})^{\eta-i\xi}}=O(\exp[(\pi-\alpha_0)|\xi|]),\ \text{per}\ |\xi|\uparrow+\infty.$$

È noto che, per ogni $x\in R$,

$$\Gamma(x+iy)=O(\exp(-(\pi/2)|y|)),\ \text{per}\ |y|\uparrow+\infty.$$

(vedi, ad esempio, M. A. Evgrafov [4], § 3.2). Se ne deduce

$$G_{rj}(\xi+i\eta)=O(\exp(-\alpha_0|\xi|)),\qquad \forall\eta\in R.$$

Riassumendo: *per ogni* $\eta$ *reale diverso da* $-m_1-k$ *e* $1+m_1+\gamma_{rj}+k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ *la funzione* $\xi\to G_{rj}(\xi+i\eta)$ *è a decrescenza rapida.*

Riprendiamo le notazioni del numero precedente: se $\varphi$, $f$, ... sono funzioni definite su $R_+$, porremo $\Phi(x)=\varphi(e^x)$, $F(x)=f(e^x)$, ..., per $x\in R$. Poichè l'isomorfismo tra $R_+$ ed $R$ stabilito dal logaritmo naturale muta la misura di Haar $dx/x$ su $R$ nella corrispondente misura $dx$ su $R$, alla misura di Lebesgue $dx$ su $R_+$ corrisponde la misura $e^x dx$ su $R$. Avremo dunque in generale

$$(19)\qquad \|x^\lambda\varphi;\ L^2(R_+)\|=\|\exp[(\lambda+\tfrac{1}{2})x]\Phi(x);\ L^2(R)\|.$$

Se si pone, come già in precedenza, $D^{m_1}\varphi=\psi$, alla uguaglianza $\hat{\varphi}(\xi)=\hat{\psi}(\xi)/(i\xi)^{m_1}$ corrisponde l'altra (v. (15))

$$\hat{\Phi}(\xi-im_1)=\hat{\Psi}(\xi)/P_{m_1}(\xi-m_1)$$

e, più generale

$$\widehat{\Phi}(\xi+i\eta)=\frac{\widehat{\Psi}(\xi+i(\eta+m_1))}{P_{m_1}(\xi+i\eta)}, \tag{20}$$

$P_{m_1}$ essendo il polinomio già introdotto nel numero precedente.

Partendo ancora dalla formula (10) del numero precedente, otteniamo

$$\widehat{\Psi}_r(\xi)+\sum_{j=0}^{m_1-1} G_{rj}(\xi)\widehat{\Phi}_j(\xi-i(m_1+\gamma_{rj}))=\widehat{F}_r(\xi);$$

moltiplicando e dividendo per $P_{m_1}(\xi-i(m_1+\gamma_{rj}))$ si ottiene

$$\widehat{\Psi}_r(\xi)+\sum_{j=0}^{m_1-1} G^*_{rj}(\xi)\widehat{\Psi}_j(\xi-i\gamma_{rj})=\widehat{F}_r(\xi) \tag{$10_5$}$$

(v. (20)) ove si è posto

$$G^*_{rj}(\xi-i\eta)=\frac{G_{rj}(\xi+i\eta)}{P_{m_1}(\xi+i(\eta-m_1-\gamma_{rj}))}.$$

La funzione $G^*_{rj}$ così definita ha esattamente le stesse proprietà di $G_{rj}$, salvo un numero finito di poli in più.

In particolare $G^*_{rj}$ è a decrescenza rapida rispetto a $\xi$ per tutti gli $\eta\in R$ tranne un'infinità numerabile. Nella ($10_5$) sostituiamo $\xi$ con $\xi+$ $+i(\eta-\lambda_r)$ per far sì che $\Psi_j$ sia calcolato in corrispondenza del medesimo argomento nelle diverse righe del sistema (cioè per diversi valori di $r$); scriviamo poi ancora $\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r)$ per evitare i poli delle $G^*_{rj}$, con $\alpha$ opportuno, $|\alpha|<1$. Otteniamo in definitiva il sistema

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_r(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))&+\\ +\sum_j G^*_{rj}(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))\widehat{\Psi}_j(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_j))&=\\ =\widehat{F}_r(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r)).&\end{aligned} \tag{$10_6$}$$

Indichiamo con $G^*$ la matrice

$$G^*(\xi+i\eta)=[G^*_{rj}(\xi+i(\eta-\lambda_r))], \qquad r,\ j=0,\ 1,\ \dots,\ m_2-1;$$

per il determinante di $(10_6)$ si ha la stima asintotica

$$\det[I+G(\xi+i\eta)]=1+O(\exp(-\alpha_0|\xi|)), \text{ per } |\xi|\uparrow+\infty,$$

$I$ essendo la matrice unità di ordine $m_2$. Dunque tale determinante è diverso da zero per $|\xi|$ abbastanza grande; esso presenta un'infinità numerabile di poli, ed al più un'infinità numerabile di zeri, essendo una funzione analitica. Dunque, per ogni fissato $\eta\in R$, per tutti gli $\alpha$ appartenenti ad un insieme (dipendente da $\eta$) che è il complementare di un insieme numerabile rispetto a $]-1, 1[$, possiamo affermare che

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\det[I+G(\xi+i(\alpha/2+\eta))]\neq 0, \qquad \forall\xi\in R,\\ &G^*_{rj}((\cdot)+i(\alpha/2+\eta))\in\mathcal{S}. \end{aligned}$$

È importante osservare che, nel seguito, avremo necessità di operare soltanto un numero finito di scelte diverse di $\eta$, e questo ci permette di affermare che i risultati parziali che otteremo sono tutti validi contemporaneamente per gli $\alpha$ appartenenti ad un medesimo insieme del tipo già specificato. Possiamo dunque risolvere il sistema $(10_6)$ ottenendo la formula risolutiva

$$(22)\qquad \widehat{\Psi}_r(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))=$$
$$=\widehat{F}_r(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))+\sum_j \widehat{M}_{rj}(\xi+i(\alpha/2+\eta))\widehat{F}_j(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_j)),$$

avendo indicato con $\widehat{M}$ la matrice

$$\widehat{M}(\xi+i\eta)=[\widehat{M}_{rj}(\xi+i\eta)]=-[I+G^*(\xi+i\eta)]^{-1}G^*(\xi+i\eta)).$$

Ciascuna delle funzioni $\xi\rightarrow\widehat{M}_{rj}(\xi+i(\alpha/2+\eta))$ è a decrescenza rapida

Supponiamo che $f_r\in V^{\lambda_r}_\alpha(R_+)$ verifichi le condizioni supplementari (17) e (18), e sia pertanto $f_r=D^{m_1}h_r$, $h_r\in V^{m_1+\lambda_r}_\alpha(R_+)$; $r=0, 1, \ldots, m_2-1$.

Ci rimane da provare che $\vec{\psi}\in V(R_+)$ e che esso dipende con continuità da $\vec{f}$. Per ottenere questo risultato, tenendo presente quanto detto all'inizio di questo numero sull'applicazione $\vec{f}\rightarrow\vec{h}$, con $\vec{f}\in V(R_+)$ verificante le condizioni supplementari (17) e (18) e tenendo conto anche della particolare struttura del secondo membro della (22), è chiaro che basta dimostrare, per la funzione $\psi$ definita da

$$\widehat{\Psi}(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))=\sum_{j=0}^{m_2-1}\widehat{M}_{rj}(\xi+i(\alpha/2+\eta))\widehat{F}_j(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_j)),$$

la maggiorazione

$$\|\psi;\ V^{\lambda_r}(R_+)\|\leq c\,\|\vec{h};\ V'(R)\|,\qquad D^{m_1}\vec{h}=\vec{f}.$$

Possiamo anzi limitarci ad un solo addendo, possiamo cioè considerare la funzione $\psi$ definita da

$$\widehat{\Psi}(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))=\widehat{M}(\xi+i(\alpha/2+\eta))\widehat{F}(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_j)) \tag{23}$$

dove $\widehat{M}$ è una qualunque delle $\widehat{M}_{rj}$, e provare per essa la maggiorazione

$$\|\psi;\ V^{\lambda_r}(R_+)\|\leq c\,\|h;\ V^{\lambda_j+m_1}(R_+)\|,\qquad D^{m_1}h=f. \tag{24}$$

Utilizzando l'identità (cfr. (15))

$$\widehat{F}(\xi+i\eta)=P_{m_1}(\xi+i(\eta-m_1))\widehat{H}(\xi+i(\eta-m_1))$$

possiamo riscrivere la (23) nella forma

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}(\xi+i(\alpha/2+\eta-\lambda_r))&=\widehat{M}(\xi+i(\alpha/2+\eta))P_{m_1}(\xi+i(\alpha/2+\eta-m_1-\lambda_j))\cdot\\ &\cdot\widehat{H}(\xi+i(\alpha/2+\eta-m_1-\lambda_j))=\\ &=\widehat{M}^*(\xi+i(\alpha/2+\eta))\widehat{H}(\xi+i(\alpha/2+\eta-m_1-\lambda_j)),\end{aligned} \tag{23$_1$}$$

dove $\widehat{M}^*$ ha le stesse proprietà di $\widehat{M}$.

Per $\eta=\lambda_r$ la (23) fornisce

$$\widehat{\Psi}(\xi+i\alpha/2)=\widehat{M}^*(\xi+i(\alpha/2+\lambda_r))\widehat{H}(\xi+i(\alpha/2-m_1-\gamma_{rj})), \tag{23$_2$}$$

cioè, se si pone $\widehat{M}^*(\xi+i(\alpha/2+\lambda_r))=\widehat{M}^*_\alpha(\xi)$,

$$\exp((\alpha/2)x)\Psi(x)=M^*_\alpha(x)*\exp[(\alpha/2-m_1-\gamma_{rj})x]H(x),$$

ed infine

$$(23_3)\qquad \psi(x)=\int_{R_+} M^*_\alpha(\ln t)\left(\frac{x}{t}\right)^{-m_1-\lambda_{rj}} h(x/t)\frac{dt}{t^{1+\alpha/2}}.$$

Ponendo per un momento $x^{-m_1-\lambda_{rj}}h(x)=l(x)$, cioè $\widehat{H}(\xi+i(\alpha/2-$ $-m_1-\gamma_{rj}))=\widehat{L}(\xi+i\alpha/2)$, si trova che un'applicazione $l\to\psi$ del tipo delle $(23_3)$, cioè

$$(25)\qquad l(x)\to\psi(x)=\int_{R_+} M^*_\alpha(\ln t)l(x/t)\frac{dt}{t^{1+\alpha/2}},$$

od anche

$$(25_1)\qquad \widehat{\Psi}(\xi+i(\alpha/2+\eta))=\widehat{M}^*(\xi+i(\alpha/2+\eta+\lambda_r))\widehat{L}(\xi+i(\alpha/2+\eta)),$$

$M^*$ essendo a decrescenza rapida, è stata studiata da B. Pini [11], n. 5. Nella nota citata si mostra che essa è continua da $\overset{\circ}{W}{}^{\lambda_r}_\alpha(R_+)$ in sè per tutti gli $\alpha$ tranne al più un'infinità numerabile di valori.

Lo stesso risultato sussiste per lo spazio $V^{\lambda_r}_\alpha(R_+)$.

Tenendo presente la norma (11), si tratta infatti di valutare quantità di tipo

$$\|\, x^{\alpha/2-(\lambda_r-[\lambda_r])}D^{[\lambda_r]}\psi(x);\ L_2(R_+)\,\|;$$

ciò equivale a valutare la norma in $L_2(R)$ della funzione (v. $(25_1)$)

$$(25_2)\qquad P_{[\lambda_r]}(\xi+i((\alpha+1)/2-\lambda_r))\widehat{\Psi}(\xi+i((\alpha+1)/2-\lambda_r))=$$
$$=\widehat{M}^*(\xi+i(\alpha+1)/2)P_{[\lambda_r]}(\xi+i((\alpha+1)/2-\lambda_r))\widehat{L}(\xi+i(\alpha+1)/2-\lambda_r),$$

$P_{[\lambda_r]}$ essendo il polinomio di grado $[\lambda_r]$ analogo a $P_{m_1}$. Ma

$$\|\, P_{[\lambda_r]}\widehat{\Psi}\,\|\le c\,\|\, P_{[\lambda_r]}\widehat{L}\,\|, \qquad \forall\xi\in R,$$

da cui la stima richiesta

$$(26)\qquad \|\, x^{\alpha/2-(\lambda_r-[\lambda_r])}D^{[\lambda_r]}\psi(x);\ L^2(R_+)\,\|\le$$
$$\le c\,\|\, x^{\alpha/2-(\lambda_r-[\lambda_r])}D^{[\lambda_r]}l(x);\ L^2(R_+)\,\|.$$

Scegliendo due valori opposti di $\alpha$, $\alpha_1+\alpha_2=0$, ed interpolando (v. Appendice) si ottiene la continuità dell'applicazione $l \rightarrow \psi$ da $V^{\lambda, r}(R_+)$ in sè. Dunque

$$\| \psi;\ V^{\lambda, r}(R_+) \| \leq c \, \| x^{-m_1-\gamma_{rj}} h(x);\ V^{\lambda, r}(R_+) \|.$$

Per completare il teorema che abbiamo in vista, cioè per dimostrare la diseguaglianza (24), ci rimane di provare che

$$\| x^{-m_1-\gamma_{rj}} h(x);\ V^{\lambda, r}(R_+) \| \leq c \, \| h;\ V^{m_1+\lambda_j}(R_+) \|.$$

In forma equivalente, dobbiamo provare che

$$\| x^{-\gamma} h(x);\ V^{\lambda}(R_+) \| \leq c \, \| h;\ V^{\lambda+\gamma}(R_+) \|, \tag{27}$$

od infine, convenendo come in precedenza che uno stesso simbolo stia ad indicare una funzione definita su $R_+$ ed il suo prolungamento con lo zero per $x<0$,

$$\| x^{-\gamma} h(x);\ H_{\lambda}(R) \| \leq c \, \| h;\ H_{\lambda+\gamma}(R) \|, \qquad \lambda \geq 0,\ \gamma > 0.$$

È sufficiente provare la nostra diseguaglianza per $\lambda$ intero e $\gamma$ qualunque, il caso $\lambda$ non intero potendosi ottenere per interpolazione. Ora se $h \in H_{\gamma}(R)$ e $h=0$ per $x<0$, la rappresentazione integrale

$$h(x) = \frac{1}{(\gamma-1)!} \int_0^x (x-t)^{\gamma-1} D^{\gamma} h(t)\, dt$$

valida per $\gamma$ intero, si scrive, per $\gamma>0$ qualunque

$$h(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x (x-t)^{\gamma-1} D^{\gamma} h(t)\, dt,$$

a patto d'intendere che $D^{\gamma}$ sia la derivata di Liouville (v. P. I. Lizorkin [9]). Dunque

$$\frac{h(x)}{x^{\gamma}} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x \frac{(x-t)^{\gamma-1}}{x^{\gamma}} D^{\gamma} h(t)\, dt = \int_{R_+} N(x,\ t) D^{\gamma} h(t)\, dt,$$

ove si è posto

$$N(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{(x-t)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)x^{\gamma}}, & \text{per } 0\leq t\leq x,\\[2ex] 0 & , \text{per } t>x\geq 0.\end{cases}$$

Il nucleo $N$ essendo omogeneo di grado $-1$, l'applicazione $f\to Nf$ è continua da $L^2(R_+)$ in sè (v. Hardy-Littlewood-Pólya [7], Th. 319) dunque

$$(27_0)\qquad \| x^{-\gamma}h(x);\ L^2(R_+)\|\leq c\,\| D^{\gamma}h;\ L^2(R_+)\|= \\ =c\,\| D^{\gamma}h;\ H_0(R_+)\|\leq c\,\| h;\ H_{\gamma}(R)\|.$$

Si è già osservato, nel corso della dimostrazione del Teorema 2, che $D^{\gamma}h$ è nulla al pari di $h$ per $x<0$.

Esaminiamo il caso $\lambda=1$.

Si deve valutare la norma in $L_2$ della funzione

$$D\left(\frac{h(x)}{x^{\gamma}}\right)=\frac{h'(x)}{x^{\gamma}}-\gamma\frac{h(x)}{x^{\gamma+1}};$$

ma la $(27_0)$ fornisce

$$\| x^{-\gamma}h'(x);\ H_0(R)\|\leq c\,\| h';\ H_{\gamma}(R)\|\leq c\,\| h;\ H_{1+\gamma}(R)\|,$$

donde

$$(27_1)\qquad \| x^{-\gamma}h(x);\ H_1(R)\|\leq c\,\| h;\ H_{1+\gamma}(R)\|.$$

Con analogo procedimento la maggiorazione si dimostra per ogni $\lambda$ intero.

Abbiamo così provato che

$$\|\vec{\psi};\ V(R_+)\|\leq c\,\|\vec{h};\ V'(R_+)\|\leq c(a)\,\|\vec{f};\ V(R_+)\|.$$

La $\vec{\psi}$ considerata è la derivata di ordine $m_1$ della $\vec{\varphi}$ che compare come vettore incognito in $(10_1)$. Così come dalla $(10_2)$ abbiamo dedotto la $(10_5)$, e da essa la formula risolutiva (22) che fornisce $\psi$, dalla stessa $(10_2)$

possiamo dedurre il sistema

$$P_{m_1}(\xi-im_1)\widehat{\Phi}_r(\xi-im_1)+\sum_j G_{rj}(\xi)\widehat{\Phi}_j(\xi-i(m_1+\gamma_{rj}))=\widehat{F}_r(\xi)=$$
$$=P_{m_1}(\xi-im_1)\widehat{H}_r(\xi-im_1).$$

Con gli stessi passaggi che hanno condotto alla (22) otteniamo la formula risolutiva

$$\widehat{\Phi}_r(\xi+i(\alpha/2-m_1-\lambda_r))=\widehat{H}_r(\xi+i(\alpha/2-m_1-\lambda_r))+$$
$$+\sum_j \widehat{M}'_{rj}(\xi+i(\alpha/2-\lambda_r))\widehat{H}_j(\xi+i(\alpha/2-m_1-\lambda_j)),$$

essendo $\widehat{M}'=[\widehat{M}'_{rj}]=-[P_{m_1}I+G]^{-1}G,\ G=[G_{rj}]$.

Basta studiare uno degli addendi a secondo membro cioè basta porre

$$\widehat{\Phi}(\xi+i(\alpha/2-m_1-\lambda_r))= \tag{28}$$
$$=\widehat{M}'(\xi+i(\alpha/2-\lambda_r))\widehat{\mathrm{H}}(\xi+i(\alpha/2-m_1-\lambda_j)),$$

dove $h\in V^{m_1+\lambda_j}(R_+)$ e $h=0$ per $x\geq 3a$. La stessa formula, scrivendo $\xi+i(m_1+\lambda_r)$ al posto di $\xi$, fornisce una formula analoga alla $(23_3)$:

$$\varphi(x)=\int_{R_+} M'_\alpha(\ln t)(x/t)^{-\gamma_{rj}}h(x/t)\,\frac{dt}{t^{1+\alpha/2}}$$

essendo $\widehat{M}'(\xi+i(\alpha/2+m_1))=\widehat{M}'_\alpha(\xi)$.

Da questa deduciamo

$$\|\, x^{\alpha/2}\varphi;\ L_2(R_+)\,\|\leq c_\alpha\,\|\, x^{\alpha-\gamma_{rj}}h(x);\ L(_2R_+)\,\|.$$

Interpolando tra valori opposti di $\alpha$ si ottiene

$$\|\,\varphi;\ L_2(R_+)\,\|\leq c_\alpha\,\|\, x^{-\gamma_{rj}}h(x);\ L(R)\,\|.$$

Una formula analoga a quella trovata poco sopra per $\varphi$, sussiste per le derivate $D^s\varphi$, $s=1, 2, \dots, m_1$, a patto di far comparire sotto il segno di integrale la derivata $D^s(x^{-\gamma_{rj}}h(x))$. Infatti la (28) scrivendo $\xi+$

$+i(m_1+\lambda_r-s)$ al posto di $\xi$, fornisce

$$\hat{\Phi}(\xi+i(\alpha/2-s))=\hat{M}'(\xi+i(\alpha/2+m_1-s))\hat{H}(\xi+i(\alpha/2+\gamma_{rj}-s)),$$

da cui

$$P_s(\xi+i(\alpha/2-s))\hat{\Phi}(\xi+i(\alpha/2-s))=$$
$$=\hat{M}'(\xi+i(\alpha/2+m_1-s))P_s(\xi+i(\alpha/2-s))\hat{H}(\xi+i(\alpha/2-\gamma_{rj}-s)),$$

ed infine

$$D^s\varphi(x)=\int_{R_+}M'_{\alpha,s}(\ln t)D^s[(x/t)^{-\gamma_{rj}}h(x/t)]\frac{dt}{t^{1+\alpha/2}}. \tag{28$_s$}$$

Dall'ultima formula deduciamo

$$\|D^s\varphi;\ L_2(R_+)\|\leq c\,\|D^s[x^{-\gamma_{rj}}h(x)];\ L_2(R_+)\|,\qquad s=1,\ \ldots,\ m_1\,.$$

Ne viene

$$\|\varphi;\ V^{m_1}(R_+)\|\leq c\,\|x^{-\gamma_{rj}}h(x);\ V^{m_1}(R_+)\|.$$

Si tenga presente che la norma di $V^{m_1}(R_+)$ contiene due soli termini, coincidendo con quella di $W^{m_1}(R_+)$. Se $\gamma_{rj}\geq$ (cioè $r\geq j$) abbiamo

$$\|x^{-\gamma_{rj}}h(x);\ V^{m_1}(R_+)\|\leq c\,\|h;\ V^{m_1+\gamma_{rj}}(R_+)\|\leq c'\,\|h;\ V^{m_1+\gamma_j}(R_+)\|;$$

lo stesso risultato sussiste se $\gamma_{jr}<0$, ove la costante $c$ dipenda da $a>0$. Infatti, essendo $h=0$ per $x>3a$, si hanno maggiorazioni del tipo

$$\|x^{-\gamma}h(x);\ L_2(R_+)\|\leq c(a,\ \gamma)\,\|h;\ L_2(R_+)\|.$$

In definitiva

$$\|\varphi;\ V^{m_1}(R_+)\|\leq c(a)\,\|h;\ V^{m_1+\lambda_j}(R_+)\|.$$

Combinando il risultato ottenuto con gli altri precedenti otteniamo il

TEOREMA 4. *Per ogni* $\vec{f}\in V(R_+)$, *le cui funzioni componenti verifichino le condizioni supplementari* (17) *e* (18), *esiste un vettore di* *densità* $\vec{\psi} \in V(R_+)$ *del tipo* $\vec{\psi} = D^{m_1}\vec{\varphi}$, $\vec{\varphi} \in V'(R_+)$, *per cui*

$$\| \vec{\varphi};\ V'(R_+) \| \leq c(a) \| \vec{f};\ V(R_+) \|.$$

*Il vettore* $\vec{\varphi}$ *è soluzione del sistema* (10); *in forma equivalente, la funzione u, fornita da* (4) *in corrispondenza della* $\vec{\psi}$ *determinata, verifica le condizioni al contorno* (2).

## Appendice.

Riprendiamo la questione relativa all'interpolazione tra valori opposti dell'esponente $\alpha$. Le formule (17), ($17_r$) e analoghe contenute nella nota [11] di B. Pini, n. 5, sui cui è basata la dimostrazione della continuità da $W_\alpha^{\lambda_j}$ in sè di una trasformazione come la (25)-($25_1$) della presente nota, si possono scrivere sinteticamente

*a*) $\varphi(x) = T(\varphi)(x)$,

*b*) $D^r\varphi(x) = T_r(D^r\varphi)(x), \qquad r = 1, 2, \ldots, [\lambda_j]$,

*c*) $\Delta(t)D^r(x) = T'_r(\Delta D^r f)(x, t)$,

dove si è omesso l'indice *k*, dato che attualmente *x* è una singola variabile reale. Per tutti gli $\alpha \in ]-1, 1[$, tranne un'infinità numerabile, si tratta di trasformazioni

$$C_0(\Omega) \ni f \rightarrow \tau(f) \in L^2_{\mu_\alpha}(\Omega)$$

continue munendo $C_0(\Omega)$ della norma di $L^2_{\mu_\alpha}(\Omega)$, essendo

$$\begin{cases} \Omega = R_+\,, & \mu_\alpha(x) = x^\alpha,\ a) \text{ e } b); \\ \Omega = R_+\,, & \mu_\alpha(x, t) = x^\alpha t^{-1-2\beta}, \text{ per } c), \text{ con } \beta = \lambda_j - [\lambda_j]. \end{cases}$$

Analogamente, la maggiorazione (26) relativa alla trasformazione (25)-(25) si può intepretare come la continuità di *b*) in $L_{\mu_\alpha}(\Omega)$ con

$$\Omega = R_+\,, \qquad \mu_\alpha(x) = x^{\alpha - 2\beta}, \qquad \beta = \lambda_j - [\lambda_j], \qquad r = [\lambda_j].$$

Interpolando tra $\mu_{\alpha'}$ e $\mu_{\alpha''}$, con $\alpha'$ e $\alpha''$ valori ammissibili dell'indice $\alpha$ si ottiene (v. E. Stein (12)):

$$\| \tau(f)\sqrt{\mu_{\alpha'}^{\theta}\mu_{\alpha''}^{1-\theta}},\ L^2 \| \leq C_\theta \| f\sqrt{\mu_{\alpha'}^{\theta}\mu_{\alpha''}^{1-\theta}},\ L^2 \|, \qquad 0<\vartheta<1.$$

Scegliendo, come'è lecito, $\alpha'+\alpha''=0$, per $\theta=1/2$ si ottiene

$$\| \tau(f);\ L^2(R_+) \| \leq C_{1/2} \| f;\ L^2(R_+) \|,$$

per *a*) e *b*), e per la *b*) con $r=[\lambda_j]$

$$\| x^{-2\beta}\tau(f);\ L^2(R_+) \| \leq C_{1/2} \| x^{-2\beta}f;\ L^2(R_+) \|.$$

Infine per *c*)

$$\| t^{-\frac{1}{2}-\beta}\tau(f);\ L^2(R_+^2) \| \leq C_{1/2} \| t^{-\frac{1}{2}-\beta}f;\ L^2(R_+^2) \|.$$

## BIBLIOGRAFIA


[1] Barozzi, G. C.: *Sul multi-indice degli operatori quasi-ellittici*, Boll. U.M.I., Vol. 19 (1964), 289-299.

[2] Cavallucci, A.: *Alcuni teoremi di immersione per spazi con peso*, Annali di Mat. Pura Appl. (IV), Vol. LXXX (1968), 143-172.

[3] Cavallucci, A.: *Caratterizzazione delle tracce per spazi con peso*, Annali di Mat. Pura Appl. (IV), Vol. LXXXIII (1969), 337-362.

[4] Evgrafov, M. A.: *Stime asinotiche e funzioni intere*, 2ª ed., Mosca (1962), (in russo).

[5] Gel'fand, I. M. e Shilov, G. E.: *Generalized functions*, Vol. 1, New York (1963).

[6] Grisvard, P.: *Caractérisation de quelques espaces d'interpolation*, J. Rat. Mech. An., Vol. 25 (1967), 40-63.

[7] Hardy, G. H., Littlewood, J. E. e Pólya, G.: *Inequalities*, Cambridge (1934).

[8] Il'in, V. P.: *Rappresentazioni integrali delle funzioni differenziabili e loro applicazione ai problemi di prolungamento delle funzioni di classe $W_p^l(G)$*, Sib. Mat. Zhurnal, VIII (1967), 573-586 (in russo).

[9] Lizorkin, P. I.: *Derivazione generalizzata secondo Liouville e spazi $L_p^r(E_n)$. Teoremi di immersione*, Mat. Sbornik, T. 60 (1963), 325-353 (in russo).

[10] Pini, B.: *Proprietà al contorno delle funzioni di classe* $H^{p_1,\dots,p_n}$ *per regioni dotate di punti angolosi*, Annali di Mat. Pura Appl. (IV), Vol. LXXIII (1966), 33-54.

[11] Pini, B.: *Sulla rappresentazione delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche in una regione angolosa*, Annali di Mat. Pura Appl. (IV), Vol. LXXX (1968), 359-372.

[12] Stein, E.: *Interpolation of linear operators*, Transactions A.M.S., Vol. 83 (1956), 482-492.

[13] Titchmarsh, E. C.: *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford (1937).

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 gennaio 1970.