RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOINA POP

Étude qualitatif des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension 3

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 273-297

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__273_0>

ETUDE QUALITATIF DES SOLUTIONS DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES EN DIMENSION 3

DOINA POP *)

Le but de cette note est de prouver que les résultats concernant le comportement asymptotique des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension 2, obtenus par Foiaş ei Prodi [2] sont valables également pour une classe de solutions intermédiaires en dimension 3. Les résultats qu'on va obtenir généralisent ceux de Foiaş [1].

§ 1. Préliminaires.

Soit $\Omega \subset R^3$ un domaine borné. Soit $L^p(\Omega)$ l'espace des vecteurs réels $u=(u_j)_{(j=1,2,3)}$, définis et mésurables dans Ω, avec la norme usuelle:

$$| u |_p=(\int_\Omega u(x)^p dx)^{1/p}$$

où $| u(x) |$ désigne le module du vecteur $u(x)$. Soit $H^1(\Omega)$ l'espace des vecteurs $u \in L^2(\Omega)$, tels que $\frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(i, j=1, 2, 3) \in L^2(\Omega)$.
La norme dans $H^1(\Omega)$ est:

$$| u | H^1=(| u |^2+|| u ||^2)^{1/2}$$

où

$$| u |^2=(u, u), \quad || u ||^2=((u, u))$$

*) Indirizzo dell'A.: Doina Pop - Institut de Mathématique de l'Académie de la R.S.R., Calea Griviței, 21 - Bucarest, 12.

et

$$(u, v)=\int_\Omega (\sum_i u_i v_i)\, dx \text{ pour } u, v\in L^2(\Omega)$$

$$((u, v))=\int_\Omega \left(\sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) dx \text{ pour } u, v\in H^1(\Omega).$$

Soit $\mathfrak{N}$ l'espace des vecteurs solenoïdaux, définis dans Ω, avec des composantes indéfiniment différentiables à support compact dans Ω. N, resp. N^1, désigne l'adhérence dans $L^2(\Omega)$, resp. $H^1(\Omega)$, de $\mathfrak{N}$. Dans N^1 la norme $\|\cdot\|$ est équivalente à celle induite par $H^1(\Omega)$.

Pour $u, v, w\in N^1$, soit la forme

$$b(u, v, w)=\int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx. \tag{1}$$

Evidement $b(u, v, w)=-b(u, w, v)$, d'où en particulier résulte $b(u, v, v)=0$. De plus

$$|b(u, v, w)|\leqslant |u|_{L^4} \|v\| \; |w|_{L^4}.$$

Une solution faible des équations de Navier-Stokes est une fonction $u(t)$ telle que:

$$u(t)\in L^2(O, T; N^1(\Omega))\cap L^\infty(0, T; N(\Omega)) \text{ avec } 0<T\leqslant +\infty \tag{2}$$

et qui vérifie:

$$\int_0^T \{-(u(t), v'(t))+\nu((u(t), v(t)))+b(u(t), u(t), v(t))\}dt=\int_0^T (f(t), v(t))dt$$

où $f(t)\in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ fixée et $v(t)$ est arbitraire vérifiant:

1) $v(t)$ est continue à valeurs dans N^1,
2) $v(t)$ est dérivable et $v'(t)\in L(0, T; N^1(\Omega))$,
3) $v(t)$ a support compact dans Ω.

G. Prodi a démontré que la solution faible est unique dans

$$L^4(0,\ T;\ L^4(\Omega)) \cap L^{\frac{2p}{p-3}}(0,\ T;\ L^p(\Omega)),\ 3<p\leqslant+\infty\ [3].$$

En ce qui suit, une solution intermédiaire des équations de Navier-Stokes sera, par définition, une solution faible vérifiant les conditions suivantes:

$$u(t)\in L^4(0,\ T;\ L^4(\Omega)) \tag{3}$$

$$|||\, u\, |||_p = \sup_{\sigma\in(0,\ T)} \left(\int_\sigma^{\sigma+1} |\, u(\tau)\,|_p^{\frac{2p}{p-3}} d\tau \right)^{\frac{p-3}{2p}} < +\infty. \tag{4}$$

Considérons maintenant l'opérateur de Laplace Δ, défini dans $\mathfrak{N}$. Celui-ci engendre dans N un et un seul opérateur auto-adjoint D, dont le domaine $\mathfrak{D}_D$ est inclus dans N^1 et $-D\geqslant 0$. Soit A la racine carrée de $-D$. Alors $\mathfrak{D}_A=N^1$ et $\|\, u\,\|=|\, Au\,|$, $u\in N^1$. D^{-1} (et A^{-1} aussi) est un operateur compact dans N. Il existe alors un systhème orthonormal complet $\{\varphi_n\}$ dans N, tel que $D\varphi_n=-\lambda_n\varphi_n$, où on peut considérer que

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ \dots\ \leqslant\lambda_n\rightarrow+\infty$$

φ_n sont les solutions des équations:

$$\Delta\varphi+\operatorname{grad}\varphi=-\lambda\varphi,\ \operatorname{div}\varphi=0,\ \varphi/\partial\Omega=0.$$

On peut remarquer aussi que $\lambda_1=(C_\Omega)^{-2}$, où

$$|\, u\,|\leqslant C_\Omega\,\|\, u\,\| \qquad (u\in N^1).$$

§ 2. Quelques propriétés des solutions intermédiaires des équations de Navier-Stokes.

En ce qui suit on considère des solutions intermédiaires vérifiant seulement la première des conditions d'intermédiarité, donc des solutions faibles qui sont dans $L^4(0,\ T;\ L^4(\Omega))$.

Un rôle essentiel jouera le théorème suivant, dû à Prodi [3]. Pour toute solution intermédiaire dans $(0,\ T)$, il existe un ensemble de mesure nulle $N(u) \subset (0, T)$, dépendant seulement de u, tel que, pour tout $t \in (0, T)$, $t \notin N(u)$, on ait:

$$(5) \qquad (u(t), v(t)) + \int_s^0 \{-(u(\tau), v'(\tau)) + \nu((u(\tau), v(\tau))) + b(u(\tau), u(\tau), v(\tau))\} d\tau = \int_0^t (f(\tau), v(\tau)) d\tau$$

où la fonction v vérifie les conditions 1 et 2 indiquées dans §1.

LEMME 1. *Toute solution intermédiaire des équations de Navier-Stokes (éventuellement modifiée sur un ensemble de mesure nulle) est faiblement continue de* $(0, T)$ *à valeurs dans* N.

DÉMONSTRATION. On écrie la relation (5) avec t, $s \in (0, T)$, t, $s \notin N(u)$, $t > s$ et on obtient immédiatement:

$$(6) \qquad (u(t), v(t)) - (u(s), v(s)) = -\int_s^t \{-(u(\tau), v'(\tau)) + \nu((u(\tau), v(\tau)) + b(u(\tau), u(\tau), v(\tau)) - (f(\tau), v(\tau))\} d\tau.$$

Soit maintenant $v(\tau)$ tel que $v(\tau) = w$, $w \in N^1$, constante par rapport à τ. Alors:

$$(u(t) - u(s), w) = -\int_s^t \{\nu((u(\tau), w)) + b(u(\tau), u(\tau), w) - (f(\tau), w)\} d\tau.$$

On fait maintenant t, $s \to t^* \in (0, T)$. Vu la continuité du membre droit par rapport à t et s, on a:

$$(7) \qquad \lim_{\substack{t,\, s \to t^* \\ t,\, s \notin N(u)}} [(u(t) - u(s), w)] = 0.$$

En vertu de (2), $|u(\tau)|$ est borné, d'autre part N^1 est dense dans N. Alors, en utilisant (7), on déduit qu'il existe une fonction $u(\tau)$, faiblement continue de $(0, T)$ à valeurs dans N, telle que:

$$u(\tau)=\tilde{u}(\tau) \qquad \text{pour } \tau \notin N_0, \text{ ensemble de mesure nulle.}$$

Mais alors de (6) on a:

$$(\tilde{u}(t), v(t))-(\tilde{u}(s), v(s))=-\int_s^t \{-(\tilde{u}(\tau), v'(\tau))+$$

$$+\nu((\tilde{u}(\tau), v(\tau))+b(\tilde{u}(\tau), \tilde{u}(\tau), v(\tau))-(f(\tau), v(\tau))\}dt$$

pour $t, s \notin N(u) \cup N_0$; $t>s$; $t, s \in (0, T)$.

Soit maintenant $t, s \in N(u) \cup N_0$. Il existe alors deux suites $\{t_n\}$, et $\{s_n\}$, telles que $t_n, s_n \notin N(u) \cup N_0$ pour tout n et $t_n \to t$, $s_n \to s$ pour $n \to \infty$. Ainsi nous pouvons écrire (6) avec t_n, resp. s_n, au lieu de t et de s et on peut faire $n \to \infty$, en tenant compte des hypothèses faites sur la fonction $v(\tau)$. Donc (6) est vérifiée *pour tout* $t, s \in (0, T)$.

Ainsi $u(\tau)$ peut être identifiée à une fonction faiblement continue de (O, T) à N et vérifiant (6) sur tout l'intervalle $(0, T)$.

§ 3. La relation de l'énergie.

THÉORÈME 1. *Soit $u(t)$ et $u_1(t)$ deux solutions intermédiaires des équations de Navier-Stokes aux membres droits $f(t)$, resp. $f_1(t)$. Soit $B \geqslant 0$ un opérateur linéaire borné dans N, qui commute avec D (ou avec A). Alors, pour tout $s, t \in (0, T)$, $0<s\leqslant t<T\leqslant +\infty$:*

$$\frac{(w(t), Bw(t))-(w(s), Bw(s))}{2}+\int_s^t \{\nu((w(\tau), Bw(\tau)))+ \tag{8}$$

$$+b(u(\tau), w(\tau), Bw(\tau)+b(w(\tau), u_1(\tau), Bw(\tau))\}d\tau=\int_s^t (h(\tau), Bw(\tau))d\tau,$$

où

$$w(\tau)=u(\tau)-u_1(\tau),\ h(\tau)=f(\tau)-f_1(\tau).$$

DÉMONSTRATION. De (6), avec les notations du théorème, on déduit facilement:

$$(9)\quad (w(t),\ v(t))-(w(s),\ v(s))+\int_s^t \{-(w(\tau),\ v'(\tau))+\nu((w(\tau),\ v(\tau)))+$$

$$+b(u(\tau),\ w(\tau),\ v(\tau))+b(w(\tau),\ u_1(\tau),\ v(\tau))d\tau=\int_s^t (h(\tau),\ v(\tau))d\tau$$

pour tout $s,\ t\in(0,\ T)$.

Soit $B\geqslant 0$ défini comme dans le théorème. Alors:

$$|Bu|\leqslant|B|\ |u| \text{ pour } u\in N$$

et

$$\|Bv\|=|ABv|=|BAv|\leqslant B|\ |Av|=|B|\ \|v\| \text{ pour } v\in N^1.$$

Posons:

$$w^*(\tau)=\begin{cases} Bw(\tau) & s\leqslant\tau\leqslant t \\ 0 & \text{dans le cas contraire}\end{cases}$$

et soit $v_\delta(\tau)=\rho_\delta * w^*(\tau)$ où $\rho(\tau)\geqslant 0$ est indéfiniment différentiable telle que: $\rho(\tau)=\rho(-\tau)$, $\int\rho(\tau)d\tau=1$, $\rho(\tau)=0$ pour $|\tau|\geqslant 1$ et $\rho_\delta(\tau)=\frac{1}{\delta}\rho\left(\frac{\tau}{\delta}\right)$ pour $\delta>0$.

Pour δ assez petit, la fonction $v_\delta(\tau)$ vérifie les conditions 1, 2 et 3, donc on peut introduire $v_\delta(\tau)$ dans (9).

Faisons maintenant $\delta\to 0$ en tenant compte que:

$$\int_s^t (w(\tau),\ v'_\delta(\tau))d\tau=0$$

$$(w(t),\ v_\delta(t))\to\frac{1}{2}(w(t),\ Bw(t))$$

$$(w(s),\ v_\delta(s))\to\frac{1}{2}(w(s),\ Bw(s)).$$

Puisque

$$\left|\int_{s}^{t} b(u(\tau),\ w(\tau),\ Bw(\tau))d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} b(u(\tau),\ w(\tau),\ v_\delta(\tau))d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{s-\delta}^{t+\delta} |\ u(\tau)\ |_4\ \|\ w^*(\tau) - v_\delta(\tau)\ \|\ \ |\ w(\tau)\ |_4 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.}\left(\int_{s-\delta}^{t+\delta} \|\ w^*(\tau) - v_\delta(\tau)\ \|^2 d\tau\right)^{1/2} \to 0 \text{ pour } \delta \to 0$$

(8) résulte aussitôt.

La relation de l'énergie est celle obtenue par Foiaş et Prodi [2] pour le cas bidimensionel. Une conséquence immédiate de la relation de l'énergie est la suivant:

Lemme 2. *Toute solution intermédiaire des équations de Navier-Stokes est continue* (*fortément*) *de* $(0,\ T)$ *dans* N.

Démonstration. En effet soit dans (8), $B = I$, $u_1(t) \equiv f_1(t) \equiv 0$. Alors, pour tout s, $t \in (0,\ T)$ nous obtenons la relation de l'énergie de [4], notamment:

$$\frac{1}{2}\ |\ u(t)\ |^2 - \frac{1}{2}\ |\ u(s)\ |^2 + \nu \int_{s}^{t} \|\ u(\tau)\ \|^2 d\tau = \int_{s}^{t} (f(\tau),\ u(\tau))d\tau.$$

Ceci montre que $|\ u(t)\ |$ est continue. Comme $u(t)$ est faiblement continue, la continuité de la solution $u(t)$ découle directement.

Conséquence. Si on prend dans la relation de l'énergie $B = I$, $u_1(t) \equiv f_1(t) \equiv 0$, par dérivation nous avons:

$$\frac{1}{2}\frac{d\ |\ u(t)\ |^2}{dt} + \nu\ \|\ u(t)\ \|^2 = (f(t),\ u(t)).$$

Alors on déduit l'estimation:

$$|\ u(t)\ | \leqslant |\ u(s)\ |\ e^{-\nu\lambda_1(t-s)} + \frac{1}{\lambda_1 \nu} \sup_{\eta \in (s,\ +\infty)} |\ f(\eta)\ |\ .$$

Par conséquent: $\limsup\limits_{t \to \infty} |\ u(t)\ | \leqslant \dfrac{1}{a_1 \nu} \sup\limits_{\eta \in (s,\ +\infty)} |\ f(\eta)\ |\ .$

§ 4. Comportement asymptotique des solutions intermédiaires des équations de Navier-Stokes.

Lemme 3. *Soit* $b(u, v, w)$ *la forme définie par* (1). *Alors pour* $\varepsilon>0$ *on a*:

$$|b(u, v, w)| \leqslant \begin{cases} \varepsilon \| v \|^2 + c_1(\varepsilon) \| w \|^2 + c_2(\varepsilon) | u |_p^{\frac{2p}{p-3}} | w |^2 \\ \varepsilon \| v \|^2 + c_1(\varepsilon) \| u \|^2 + c_2(\varepsilon) | w |_p^{\frac{2p}{p-3}} | u |^2. \end{cases}$$

Démonstration. Soit q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$. Alors:

$$|b(u, v, w)| \leqslant \int_\Omega \left| u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \right| dx \leqslant \int_\Omega | u(x) | \left(\sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2} |w(x)| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant | u |_p | w |_q \| v \| \leqslant \varepsilon \| v \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} | u |_p^2 | w |_q^2 \leqslant \varepsilon \| v \|^2 +$$

$$+ \frac{k^{\frac{3(q-2)}{q}}}{4\varepsilon} | u |_p^2 | w |^{\frac{6-q}{q}} \| w \|^{\frac{3(q-2)}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \| v \|^2 + c_1(\varepsilon) \| w \|^2 + c_2(\varepsilon) | u |_p^{\frac{4q}{q-2}} | w |^2 =$$

$$= \varepsilon \| v \|^2 + c_1(\varepsilon) \| w \|^2 + c_2(\varepsilon) | u |_p^{\frac{2p}{p-3}} | w |^2.$$

On a utilisé le fait que si $u \in L^\alpha(\Omega)$, $u \in L^\beta(\Omega)$ où $1 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, alors pour tout q tel que $\alpha \leqslant q \leqslant \beta$, $u \in L^q(\Omega)$ et

$$| u |_q \leqslant | u |_\alpha^{\frac{\alpha(\beta-q)}{q(\beta-\alpha)}} | u |_\beta^{\frac{\beta(q-\alpha)}{q(\beta-\alpha)}} \text{(voir [3]).}$$

k est la constante d'immersion $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ (qui ne dépend pas de Ω et est égale à $4/\sqrt{3}$; pour la démonstration voir [3]). Analoguement pour la deuxième inégalité.

Dans tout ce qui suit nous allons considérer des solutions intermédiaires vérifiant (3) et (4) dans $(0, +\infty)$ or dans $(-\infty, +\infty)$.

Soit maintenant $B=E$ une projection orthogonale dans N. De la relation de l'énergie par dérivation nous avons:

$$\frac{1}{2}\frac{dt}{d}|Ew(t)|^2+\nu\|Ew(t)\|^2+b(u(t),\ w(t),\ Ew(t))+$$
$$+b(w(t),\ u_1(t),\ Ew(t))=(Eh(t),\ Ew(t)).$$

En vertu du lemme 3 on a les estimations:

$$|b(w,\ u_1,\ Ew)|\leqslant|b(Ew,\ u_1,\ Ew)|+|b((I-E)w,\ u_1,\ Ew)|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\|Ew\|^2+c'_1(\varepsilon)|u_1|_p^{\frac{2p}{p-3}}|Ew|^2+\varepsilon\|Ew\|^2+c''_1(\varepsilon)\|(I-E)w\|^2+$$
$$+c''_2(\varepsilon)|u_1|_p^{\frac{2p}{p-3}}|(I-E)w|^2$$
$$|b(u,\ w,\ Ew)|=|b(u,\ Ew,\ (I-E)w)|\leqslant\varepsilon\|Ew\|^2+c_1(\varepsilon)\|(I-E)w\|^2+$$
$$+c_2(\varepsilon)|u|_p^{\frac{2p}{p-3}}|(I-E)w|^2.$$

Après avoir renoté les constantes, on déduit:

$$\frac{d}{dt}|Ew|^2+2\nu\|Ew\|^2\leqslant6\varepsilon\|Ew\|^2+c_1(\varepsilon)\|(I-E)w\|^2+ \tag{10}$$
$$+c_2(\varepsilon)|u|_p^{\frac{2p}{p-3}}|(I-E)w|^2+c_3(\varepsilon)|u_1|_p^{\frac{2p}{p-3}}|(I-E)w|^2+$$
$$+c_4(\varepsilon)|u_1|_p^{\frac{2p}{p-3}}|Ew|^2+2|Ew|\ |Eh|.$$

Soit ε assez petit afin que $\nu-3\varepsilon\geqslant\frac{\nu}{2}$.

Pour $u\in N$ et $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$ on posera:

$pr_0u=0$

$pr_1u=(u,\ \varphi_1)\in R^1$

. . .

$pr_nu=((u,\ \varphi_1),\ \dots,\ (u,\ \varphi_n)))\in R^n$ (φ_i sont introduits dans § 1).

Soit $E=E_n$ où $E_n=(u,\ \varphi_{n+1})\varphi_{n+1}+(u,\varphi_{n+2})\varphi_{n+2}+\dots$

On a évidement:

$$|(I-E_n)\mathrm{w}|=|pr_n w|, \quad \| E_n w \|^2 \geqslant \lambda_{n+1} | E_n w |, \quad \| (I-E_n) w \|^2 \leqslant \lambda_n | pr_n w |^2.$$

Par suite (10) devient:

$$\frac{d}{dt} | E_n w |^2 + (\nu\lambda_{n+1} - \delta - c_4 | u_1 |_p^{\frac{2p}{p-3}}) | E_n w |^2 \leqslant \tag{11}$$

$$\leqslant (c_1\lambda_n + c_2 | \mathrm{u} |_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 | u_1 |_p^{\frac{2p}{p-3}} | pr_n w |^2 + \frac{1}{\delta} | E_n h |^2$$

où $c_i = c_i(\varepsilon)$ sont des constantes qui dépendent seulement d'un ε fixe, vérifiant $\varepsilon \leqslant \frac{\nu}{6}$, et $\delta > 0$ est arbitraire et ensuite fixe.

De (11), pour tout $0 \leqslant s \leqslant t < +\infty$ on déduit l'estimation:

$$| E_n w(t) |^2 \leqslant | E_n w(s) |^2 e^{-\int_s^t (\nu\lambda_{n+1} - \delta - c_4 | u_1(\tau) |_p^{\frac{2p}{p-3}}) d\tau} +$$

$$+ \int_s^t e^{-\int_\sigma^t (\nu\lambda_{n+1} - \delta - c_4 | u_1(\tau) |_p^{\frac{2p}{p-3}}) d\tau} (c_1\lambda_n + c_2 | u(\sigma) |_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 | u_1(\sigma) |_p^{\frac{2p}{p-3}}) | pr_n w(\sigma) |^2 d\sigma$$

$$+ \frac{1}{\delta} \int_s^t e^{-\int_\sigma^t (\nu\lambda_{n+1} - \delta - c_4 | u_1(\tau) |_p^{\frac{2p}{p-3}}) d\tau} | E_n h(\sigma) |^2 d\sigma.$$

Les solutions $u(t)$ et $u_1(t)$ sont des solutions intermédiaires, donc vérifient des relations de type (4), c'est-à-dire:

$$||| u |||_p < +\infty, \quad ||| u_1 |||_p < +\infty.$$

Soit n assez grand pour que:

$$\lambda_{n+1} > \frac{c_4 \; ||| u_1 |||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta}{\nu}. \tag{12}$$

Soit $s+m\leqslant t<s+m+1$ $(m=0,\ 1,\ \ldots)$. Alors on a:

$$\int_s^t \left(c_4 \left| u_1 \right|_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \nu\lambda_{n+1}\right) d\tau \leqslant c_4 \int_s^t \left| u_1 \right|_p^{\frac{2p}{p-3}} d\tau + (\delta - \nu\lambda_{n+1})(t-s) \leqslant$$

$$\leqslant c_4(m+1) \left|\left|\left| u_1 \right|\right|\right|_p^{\frac{2p}{p-3}} + (\delta - \nu\lambda_{n+1})(t-s) \leqslant c_4 \left|\left|\left| u_1 \right|\right|\right|_p^{\frac{2p}{p-3}} +$$

$$+ \left(c_4 \left|\left|\left| u_1 \right|\right|\right|_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \lambda_{n+1}\right)(t-s).$$

Puis on a:

$$\int_s^t e^{-\int_\sigma^t \left(\nu\lambda_{n+1} - \delta - c_4 \left| u_1(\tau) \right|_p^{\frac{2p}{p-3}}\right) d\tau} \left(c_1\lambda_n + c_2 \left| u(\sigma) \right|_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 \left| u_1(\sigma) \right|_p^{\frac{2p}{p-3}}\right) \left| pr_n w(\sigma) \right|^2 d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant e^{c_4 \left|\left|\left| u_1 \right|\right|\right|_p^{\frac{p-3}{2p}}} \sup_{\eta\in[s,\ t]} \left| pr_n w(\eta) \right|^2 \int_s^t e^{-\left(\nu\lambda_{n+1} - \delta - c_4 \left|\left|\left| u_1 \right|\right|\right|_p^{\frac{2p}{p-3}}\right)(t-\sigma)} \left(c_1\lambda_n + c_2 \left| u(\sigma) \right|_p^{\frac{2p}{p-3}} +\right.$$

$$\left. + c_3 \left| u_1(\sigma) \right|_p^{\frac{2p}{p-3}}\right) d\sigma \leqslant e^{c_4 \left|\left|\left| u_1 \right|\right|\right|_p^{\frac{2p}{p-3}}} \sup_{\eta\in[s,\ t]} \left| pr_n w(\eta) \right|^2 \left\{ \frac{c_1\lambda_n}{\nu\lambda_{n+1} - \delta - c_4 \left|\left|\left| u_1 \right|\right|\right|_p^{\frac{2p}{p-3}}} + \right.$$

$$\left. + \int_s^t e^{-\left(\nu\lambda_{n+1} - \delta - c_4 \left|\left|\left| u_1 \right|\right|\right|_p^{\frac{2p}{p-3}}\right)(t-\sigma)} \left(c_2 \left| u(\sigma) \right|_p^{\frac{2p}{p-3}}\right) + c_3 \left| u_1(\sigma) \right|_p^{\frac{2p}{p-3}}\right) d\sigma \right\}$$

Désignons par $C(n) = \nu\lambda_{n+1} - \delta - c_4 \left|\left|\left| u_1 \right|\right|\right|_p^{\frac{2p}{p-3}} > 0$ (conséquence de (12)) et

$$\Psi(\sigma) = e^{-C(n)(t-\sigma)} \left(c_2 \left| u(\sigma) \right|_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 \left| u_1(\sigma) \right|_p^{\frac{2p}{p-3}}\right).$$

Tenant compte de nouveau que les solutions sont intermédiaires on a:

$$\int_s^t \Psi(\sigma) d\sigma \leqslant \left(c_2 \left|\left|\left| u \right|\right|\right|_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 \left|\left|\left| u_1 \right|\right|_p^{\frac{2p}{p-3}}\right) + \int_s^{t-1} \Psi(\sigma) d\sigma \qquad \text{si } t-1 \geqslant s$$

$$\int_s^t \Psi(\sigma)d\sigma \leqslant (c_2 \||| u |||_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 ||| u_1 |||_p^{\frac{2p}{p-3}}) +$$

$$+ (c_2 ||| u |||_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 ||| u_1 |||_p^{\frac{2p}{p-3}}) e^{-C(n)} + \int_s^{t-2} \psi(\sigma)d\sigma \qquad \text{si } t-2 \geqslant s$$

et ainsi de suite on obtient:

$$\int_s^t \psi(\sigma)d\sigma \leqslant (c_2 ||| u |||_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 ||| u_1 |||_p^{\frac{2p}{p-3}})(1 + e^{-C(n)} + \dots + e^{-(n-1)C(n)}) +$$

$$+ \int_s^{t-n} \psi(\sigma)d\sigma \qquad \text{si } t-(n+1) < s \leqslant t-n.$$

Donc:

$$\int_s^t \psi(\sigma)d\sigma \leqslant (c_2 ||| u |||_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 ||| u_1 |||_p^{\frac{2p}{p-3}})(1 + e^{-C(n)})^{-1}.$$

Finalement on a l'estimation:

$$(13) \qquad E_n w(t) |^2 \leqslant | E_n w(s) |^2 e^{c_4 ||| u_1 |||_p^{\frac{2p}{p-3}}} e^{-C(n)(t-s)} +$$

$$+ e^{c_4 ||| u_1 |||_p^{\frac{2p}{p-3}}} \left[\frac{c_1 \lambda_n}{C(n)} + (c_2 ||| u \ ||_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 ||| u_1 |||_p^{\frac{2p}{p-3}})(1 + e^{-C(n)}) \right] \sup_{\eta \in [s,t]} | pr_n w(\eta) |^2 +$$

$$+ \frac{1}{\delta} e^{c_4 ||| u_1 |||_p^{\frac{2p}{p-3}}} \frac{\sup_{\eta \in [s,t]} | E_n h(\eta) |^2}{C(n)}$$

qui jouera un rôle important dans la suite.

On voit maintenant que si nous supposons que $| pr_n w(t) | \to 0$ et $| h(t) | \to 0$ pour $t \to +\infty$, vu que $C(n)$ est une constante positive, il résulte de (13) que $| E_n w(t) | \to 0$. Mais

$$| w(t) |^2 = | pr_n w(t) |^2 + | E_n w(t) |^2$$

donc $|w(t)| \to 0$ quand $t \to +\infty$. En résumant nous avons obtenu le suivant.

THÉORÈME 2. *Soient $u(t)$ et $u_1(t)$ deux solutions intermédiaires des équations de Navier-Stokes aux membres droits correspondants $f(t)$ et $f_1(t)$. Soit n assez grand pour que*

$$\nu\lambda_{n+1} > c_4 |||\, u_1 \,|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta \qquad \text{(voir (12)).}$$

Alors si $f(t) - f_1(t) \to 0$ pour $t + \infty$ (dans L^2) et $pr_n u(t) - pr_n u_1(t) \to 0$ pour $t \to +\infty$ (dans R^n), il résulte:

$$u(t) - u_1(t) \to 0 \ (\textit{dans } N) \ \textit{pour } t \to +\infty.$$

REMARQUE. Soit ε tel que $\varepsilon \leqslant \frac{\nu}{6}$. D'après le lemme 3 on a

$$|\, b(u, u, v) \,| \leqslant \varepsilon \,\|\, u \,\|^2 + c'(\varepsilon) \,|\, v \,|_p^{\frac{2p}{p-3}} \,|\, u \,|^2$$

où $c'(\varepsilon)$ est une constante dépendant seulement de ε. La constante c_4 qui apparait dans la relation (12) est égale à $2c'(\varepsilon)$. δ est à son tour une constante qu'on peut choisir tellement petite que l'on veut.

§ 5. La dépendance continue des solutions intermédiaires par rapport aux données initiales et aux membres droits. Caractérisation de l'ensemble des solutions intermédiaires.

On va démontrer maintenant que les solutions intermédiaires des équations de Navier-Stokes sont continuement déterminées par leurs valeurs initiales et par leurs membres droits. En effet, nous avons la propriété suivante:

LEMME 4. *Soit $u(t)$ et $u_1(t)$ deux solutions intermédiares des équations de Navier-Stokes aux membres droits $f(t)$ et $f_1(t)$, selon le cas; $u(t)$ vérifie seulement la condition* (3) *d'intermédiarité tandis que $u_1(t)$ vérifie toutes les deux conditions* (3) *et* (4), *donc $|||\, u_1 \,|||_p < +\infty$. Alors pour tout $t \in [s, s+T]$ on a*

$$(14)\qquad |u(t)-u_1(t)|^2 \leqslant c_1 |u(s)-u_1(s)|^2 + c_2 \int_s^{s+T} |f(\sigma)-f_1(\sigma)|^2 d\sigma$$

où c_1 et c_2 sont des constantes qui dépendent seulement de T, Ω et de $|||u_1|||_p$. T est fixe, $s<T<+\infty$.

DÉMONSTRATION. Soit dans la relation de l'énergie $B=I$. Après dérivation:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu \|w(t)\|^2 + b(w(t), u_1(t), w(t)) = (h(t), w(t)).$$

En s'appuyant de nouveau sur le lemme 3, il vient:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu \|w(t)\|^2 \leqslant \varepsilon \|w(t)\|^2 + c_1(\varepsilon) |u_1(t)|_p^{\frac{2p}{p-3}} |w(t)|^2 + \frac{\delta}{2}|w(t)|^2 + \frac{1}{2\delta}|h(t)|^2$$

ε peut être choissi tel que $\nu-\varepsilon \geqslant \frac{\nu}{2}$. Tenant compte du fait que $N^1 \subset N$

$$(15)\qquad \frac{d}{dx}|w(t)|^2 + \left(\frac{\nu}{C_\Omega} - c|u_1|_p^{\frac{2p}{p-3}} - \delta\right)|w(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\delta}|h(t)|^2$$

où C_Ω est la constante d'immersion $N^1 \subset N$ et c est une constante dépendant seulement de ε. De (15) il s'ensuit que, pour tout $t \geqslant s$, s, $t \in (0, +\infty)$:

$$(16)\qquad |w(t)|^2 \leqslant |w(s)|^2 e^{\int_s^t (c|u_1(\tau)|_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \frac{\nu}{C_\Omega}) d\tau} + \\ + \frac{1}{\delta}\int_s^t e^{\int_\sigma^t (c|u_1(\tau)|_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \frac{\nu}{C_\Omega}) d\tau} |h(\sigma)|^2 d\sigma.$$

Soit $t \in [s, s+T]$ et $s+m \leqslant t < s+m+1$; $m=0, 1, \dots$. Alors:

$$\int_s^t \left(c|u_1(\tau)|_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \frac{\nu}{C_\Omega}\right) d\tau \leqslant c\int_s^t |u_1(\tau)|_p^{\frac{2p}{p-3}} d\tau + \left(\delta - \frac{\nu}{C_\Omega}\right)(t-s) \leqslant$$

$$\leqslant c(m+1)) \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \left(\delta - \frac{\nu}{C_\Omega} \right)(t-s) \leqslant$$

$$\leqslant c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \left(c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \frac{\nu}{C_\Omega} \right)(t-s).$$

Premier cas:

$$c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \frac{\nu}{C_\Omega} > 0.$$

Alors on a:

$$e^{c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + (c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \frac{\nu}{C_\Omega})(t-s)} \leqslant e^{c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}}} e^{(c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \frac{\nu}{C_\Omega})T}.$$

Second cas:

$$c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \frac{\nu}{C_\Omega} \leqslant 0.$$

Alors:

$$e^{c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + (c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta - \frac{\nu}{C_\Omega})(t-s)} \leqslant e^{c \||| u_1 \|||_p^{\frac{2p}{p-3}}}.$$

Avec ces estimations on voit aisément que (14) est vérifiée pour tout $t \in [s, s+T]$ ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 5. *Soit* $u_i(t)$ $(i=1, 2, ...)$ *des solutions intermédiaires des équations de Navier-Stokes aux membres droits correspondants* $f_i(t)$. *Alors si*

$$\sup_{i=1,2,\dots} \||| u_i \|||_p < +\infty \qquad \textit{et} \qquad \sup_{\substack{\eta \in [s, s+T] \\ i=1,2,\dots}} | f_i(\eta) | < +\infty.$$

T positif, fini, fixé, alors pour tout $t \in [s, s+T]$, l'ensemble $\{u_i(t)\}$ est relativement compact dans N.

DÉMONSTRATION. Écrivons la relation de l'énergie dans le cas

$B = E_n$, $u_1(t) \equiv 0$, $f_1(t) \equiv 0$, $u = u_i (i=1, 2, ...)$ et $f = f_i (i=1, 2, ...)$.

En dérivant:

$$(17)\qquad \frac{1}{2}\frac{dt}{d}\,|\,E_n u_i(t)\,|^2+\nu\,\|\,E_n u_i(t)\,\|^2+b(u_i(t),\ u_i(t),\ E_n u_i(t))= =(E_n f_i(t),\ E_n u_i(t)).$$

En s'appuyant sur le lemme 3, après avoir pris ε tel que $\nu-\varepsilon\geqslant\frac{\nu}{2}$ (17) devient:

$$(18)\qquad \frac{d}{dt}\,|\,E_n u_i(t)\,|^2+(\nu\lambda_{n+1}-\delta)\,|\,E_n u_i(t)\,|^2\leqslant$$
$$\leqslant(2\varepsilon\lambda_n+c\,|\,u_i(t)\,|_p^{\frac{2p}{p-3}})\,|\,pr_n u_i(t)\,|^2+\frac{1}{\delta}|\,E_n f_i(t)\,|^2$$

où c est une constante dependant de ε. De (18), avec des estimations semblables aux celles utilisées au cours de la démonstration du théorème 2, nous avons:

$$(19)\quad |\,E_n u_i(t)\,|^2\leqslant|\,E_n u_i(s)\,|^2 e^{(\delta-\nu\lambda_{n+1})T}+\frac{1}{\delta(\nu\lambda_{n+1}-\delta)}\sup_{\eta\in[s,\ s+T]}|\,E_n f_i(\eta)\,|+$$
$$+\left(2\varepsilon\frac{\lambda n}{\nu\lambda_{n+1}-\delta}+\frac{c\,|||\,u_i\,|||_p^{\frac{2p}{p-3}}}{1+e^{-(\nu\lambda_{n+1}-\delta)}}\right)\sup_{\eta\in[s,\ s+T]}|\,pr_n u_i(\eta)\,|^2$$

pour tout $t\in[s,s+T]$.

D'autre part Ω étant un domaine borné, pour tout $u\in L^q$ $(q\geqslant 2)$ on a $|\,u\,|_2\leqslant$ const. $|\,u\,|_q$. Les solutions $u(t)$ vérifient:

$$|||\,u_i\,|||_p=\sup_{\sigma\in(a,\ b)}\left(\int_{\sigma-1}^{\sigma}|\,u_i(\tau)\,|_p^{\frac{2p}{p-3}}d\tau\right)^{\frac{2p}{p-3}}\leqslant C<+\infty$$

où $(a,\ b)$ est l'intervalle où on considère les équations de Navier-Stokes. On a donc:

$$(20)\qquad \int_{\sigma-1}^{\sigma}|\,u_i(\tau)\,\,|_2^{\frac{2p}{p-3}}d\tau\leqslant C_p^{\frac{2p}{p-3}}=C_1<+\infty$$

pour tout $\varepsilon \in (a, b)$. Puis, en vertu d'une remarque faite à la fin de § 3:

$$(21) \qquad |u_i(t)| \leqslant C_2 |u_i(s)| + C_3$$

pour tout $t \in [s, s+T]$. En particulier (21) est vérifiée pour $t \in [\sigma-1, \sigma]$. Par suite, de (20) et de (21) on déduit:

$$|u_i(\sigma)|^{\frac{2p}{p-3}} \leqslant C_4 \int_{\sigma-1}^{\sigma} |u_i(s)|_p^{\frac{2p}{p-3}} ds + C_5 \leqslant C_6 < +\infty$$

d'où résulte que $|u_i(t)|$ est bornée sur tout (a, b).

Utilisant ce fait dans (19) où on fixe t, comme $\lambda_{n+1} \to +\infty$, et ε peut être assez petit, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe un entier positif $N(\varepsilon, \varepsilon')$, tel que, pour tout $n \geqslant N(\varepsilon, \varepsilon')$ on ait:

$$|E_n u_i(t)|^2 \leqslant \varepsilon'.$$

Par conséquent $u_i(t)$ admet la représentation:

$$u_i(t) = (I - E_n) u_i(t) + E_n u_i(t) = \sum_{h=1}^{n} (u_i, \varphi_h) \varphi_h + E_n u_i(t)$$

où

$$|E_n u_i(t)| \leqslant \varepsilon' \text{ et } |pr_n u_i(t)| = |(I - E_n) u_i(t)| \leqslant K$$

pour tout $t \in [s, s+T]$. $K = K(t)$ est une constante indépendante de $i = 1, 2, \ldots$.

Dans R^n la boule de rayon $\sqrt{K}$ est compacte, donc il existe un systhème $v_l = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{hl} \varphi_h$ $(l = 1, 2, \ldots)$ tel que pour tout $\sum_{h=1}^{n} (u_i, \varphi_h) \varphi_h$ on ait un v_j vérifiant:

$$\left| \sum_{h=1}^{n} (u_i, \varphi_h) \varphi_h - v_j \right| \leqslant \varepsilon'$$

De cette manière, pour tout $u_i(t)$ il existe un v_j jouissant de la propriété:

$$|u_i(t) - v_j| \leqslant \varepsilon'.$$

Il résulte alors que la famille $\{u_i(t)\}$ est totalement bornée, donc relativement compacte dans N.

Nous pouvons maintenant donner le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Soit* $\{u_i(t)\}$*une suite de solutions intermédiaires des équations de Navier-Stokes aux membres droits correspondants* $f_i(t)$*, telles que*

$$\sup_{i \to +\infty} ||| u_i |||_p \leqslant C < +\infty. \tag{22}$$

Si la suite $\{f_i(t)\}$ *converge dans* L^2 *uniformément sur tout intervalle compact de* $(0, +\infty)$ *alors il existe une sous-suite* $\{u_{i_j}\}$*de* $\{u_i\}$*, uniformément convergente sur tout intervalle compact de* $(0, +\infty)$ *vers une solution intermédiaire des équations de Navier-Stokes au membre droit*

$$f(t) = \lim_{i \to +\infty} f_i(t).$$

Si $\{f_i\}$ *converge dans* L^2*, uniformément sur tout intervalle* $[\varepsilon, +\infty) \subset \subset (0, +\infty)$ *et de plus,* $\{pr_n u_i\}$ *converge uniformément dans* R^n *(n choissi assez grand pour que* (12) *ait lieu), alors la convergence uniforme de la suite* $\{u_i(t)\}$ *vers la solution* $u(t)$ *des équations de Navier-Stokes au membre droit* $f(t)$*, a lieu sur* $[\varepsilon, +\infty) \subset (0, +\infty)$.

DÉMONSTRATION. Pour prouver la première affirmation on utilise le lemme 5 et la relation (14). En effet, pour un s quelconque de $(0, +\infty)$, l'ensemble $\{u_i(s)\}$ est relativement compact dans N, donc il existe une sous-suite $\{u_i(s)\}$ convergente (dans N) vers un $u_0 \in N$.

La relation (14) montre que $\{u_{i_j}(s)\}$ est uniformément convergente et soit $v(t)$ la fonction limite. (22) se mentient après avoir fait $j \to +\infty$ (voir [1]).

Soit maintenant $u(t)$ la solution intermédiaire dans $(s, +\infty)$ à valeur initiale u_0 et dont le membre droit est $f(t) = \lim f_i(t)$. Alors, de (14) par l'intermédiaire du lemme 4, on obtient:

$$| u(t) - u_{i_j}(t) |^2 \leqslant C'_1 | u_0 - u_{i_j}(s) |^2 + C'_2 \int_s^{s+T} | f(\sigma) - f_{i_j}(\sigma) |^2 d\sigma$$

pour $t \in [s, s+T]$. C'_1 et C'_2 dépendent de $||| u_{i_j} |||_p$, de T et de Ω. En tenant compte du fait que (19) montre que si $\{pr_n u_i(t)\}$ est unifor-de la suite $\{u_{i_j}\}$ est en effet une solution intermédiaire des équations de Navier-Stokes au membre droit $f(t)$.

La deuxième affirmation résulte par les mêmes considérations en tenant compte du fait que (19) montre que si $\{pr_n u_i(t)\}$ est uniformément convergente, alors $\{E_n u_i(t)\}$ est de même, donc la suite $\{u_i(t)\}$ converge uniformément sur tout intervalle $[\varepsilon, +\infty) \subset (0, +\infty)$.

§ 6. La presque-périodicité asymptotique des solutions intermédiaires.

Par le même argument que celui utilisé dans [2] on peut démontrer aussi le résultat concernant la propriété de presque-périodicité asymptotique, obtenue pour les solutions faibles en dimension 2. Une fonction $v(t)$, définie sur $[0, +\infty)$ est appelée asymptotiquement presque-périodique (a.p.p) si de toute suite $\{v(t+h_m)\}$ de translations par $h_m > 0$ de $v(t)$, on peut extraire une sous-suite $\{v(t+h_{m_j})\}$, uniformément convergente sur $(0, +\infty)$ (dans la topologie de l'espace des valeurs de $v(t)$).

THÉORÈME 4. *Soit $u(t)$ une solution intermédiaire dans* $[0, +\infty)$ *des équations de Navier-Stokes au membre droit $f(t)$ a.p.p. Soit n assez grand pour que* (12) *ait lieu. Alors $pr_n u(t)$ est aussi a.p.p. il résulte que $u(t)$ est a.p.p.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{u(t+h_m\}$ une suite de translations de $u(t)$. En vertu de l'hypothèse on peut supposer dès le début que les suites $\{f(t+h_m)\}$ et $\{pr_n u(t+h_m)\}$ sont uniformément convergentes sur $[0, +\infty)$. On peut supposer aussi que $0 < h_m \to +\infty$.

Grâce au lemme 5, de la sous-suite $\{h_m\}$ nous pouvons extraire une sous-suite $\{h_{m_p}\}$ telle que $u(h_{m_p}) \to u_0$, $u_0 \in N$. Soit $v(t)$ la solution intermédiaire des équations de Navier-Stokes au membre droit $g(t) = \lim_{p \to +\infty} f(t+h_{m_p})$ et à donnée initiale u_0. On voit aisément que $u(t+h_{m_p}) \to v(t)$ dans N pour $p \to +\infty$, uniformément sur tout intervalle compact $[0, \sigma]$ (théorème 3), en particulier dans $[0, s]$. Il reste à prouver la convergence dans $[s, +\infty)$.

Désignons par $u_h(t) = u(t+h)$. En s'appuyant de nouveau sur (13)

$$| E_n u_{h_{m_p}}(t) - E_n u_{h_{m_q}}(t) |^2 \leqslant C_1 e^{C(n)(t-s)} | E_n u_{h_{m_p}}(s) - E_n u_{h_{m_q}}(s) |^2 +$$

$$+ C_2 \sup_{\sigma \in [s,\, t]} | pr_n u_{h_{m_p}}(\sigma) - pr_n u_{h_{m_q}}(\sigma) |^2 + C_3 \sup_{\sigma \in [s,\, t]} | E_n f_{h_{m_p}}(\sigma) - E_n f_{h_{m_q}}(\sigma) |^2$$

où

$$C_1 = e^{c_4 |||u_{h_{m_q}}|||^{\frac{2p}{p-3}}}$$

$$C_2 = C_1 (c_2 ||| u_{h_{m_p}} |||_p^{\frac{2p}{p-3}} + c_3 ||| u_{h_{m_q}} |||_p^{\frac{2p}{p-3}})(1 + e^{C(n)}) + \frac{c_1 \lambda_n}{C(n)}$$

$$C_3 = \frac{1}{c(n)\delta} C$$

$$C(n) = \nu \lambda_{n+1} - \delta - c_4 ||| u_{h_{m_q}} |||_p^{\frac{2p}{p-3}} > 0 \text{ (en vertu des hypothèses).}$$

Mais les hypothèses faites sur les suites $\{pr_n u(t+h_m)\}$ et $\{f(t+h_m)\}$ entraînent que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un n_ε tel que si p, $q \geqslant n_\varepsilon$ on ait:

$$| pr_n u_{h_{m_p}}(\sigma) - pr_n u_{h_{m_q}}(\sigma) |^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{C_2}$$

$$| f_{h_{m_p}}(\sigma) - f_{h_{m_q}}(\sigma) |^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{C_3}$$

d'où découle l'estimation:

$$| E_n u(t+h_{m_p}) - E u(t+h_{m_q}) |^2 \leqslant C_1 e^{-C(n)(t-s)} | E_n u(s+h_{m_p}) - E_n u(s+h_{m_q}) |^2 + 2\varepsilon.$$

Mais alors faisant $q \to +\infty$, on a:

$$| E_n u(t+h_{m_p}) - E v(t) |^2 \leqslant C_1 e^{-C(n)(t-s)} | u(s+h_{m_p}) - v(s) |^2 + 2\varepsilon$$

donc $E_n u(t+h_{m_p}) \to E v(t)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

§ 7. La presque-périodicité des solutions intermédiaires.

Supposons maintenant que l'intervalle sur lequel on considère les équations de Navier-Stokes est $(-\infty, +\infty)$.

THÉORÈME 5. *Soit* $u_1(t)$ et $u_2(t)$ *deux solutions intermédiaires des équations de Navier-Stokes au membre droit* $f(t)$. *Soit* n *assez grand pour que* (12) *ait lieu. Alors, si* $pr_n u_1 = pr_n u_2$, il résulte $u_1 = u_2$.

DÉMONSTRATION. Au cours de la démonstration du lemme 4 on a montré que si $u(t)$ est une solution des équations de Navier-Stokes, $|u(t)|$ est borné sur tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Si on désigne $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$, par la même voie on a que $|w(t)|$ est borné sur tout $(-\infty, +\infty)$.

On utilise l'inégalité (13) qui devient dans ce cas:

$$|E_n w(t)|^2 \leqslant e^{c_4 |||u_2|||_p^{\frac{2p}{p-3}}} e^{-C(n)(t-s)} |E_n w(s)|^2$$

où

$$C(n) = \nu\lambda_{n+1} - \delta - c_4 |||u_2|||_p^{\frac{2p}{p-3}} > 0.$$

En faisant $s \to -\infty$ il vient tout de suite $E_n w(t) \equiv 0$, donc $w(t) \equiv 0$ qui achève la démonstration.

Rappellons la suivante définition: Une fonction $v(t)$ définie sur $(-\infty, +\infty)$ est presque-périodique si de toute suite de translations de $v(t)$, $\{v(t+h_m)\}$ par $h_m \geqslant 0$, on peut extraire une sous-suite uniformément convergente (convergence dans la topologie de l'espace de valeurs de $v(t)$).

THÉORÈME 6. *Soit* $u(t)$ *une solution intermédiaire sur* $(-\infty, +\infty)$ *des équations de Navier-Stokes au membre droit* $f(t)$ *presque-périodique. Soit* n *choissi tel que* (12) *ait lieu. Alors si* $pr_n u(t)$ *est presque-périodique, il en résulte de même pour* $pr_n u(t)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\{u(t+h_m)\}$ une suite de translation. Grâce aux hypothèses on peut supposer que

(23) $f(t+h_m) \to f^*(t)$ dans L^2, uniformément sur $(-\infty, +\infty)$

(24) $pr_n u(t+h_m) \to a(t)$ dans R^n, uniformément sur$(-\infty, +\infty)$.

Supposons maintenant que la suite $\{u(t+h_m)\}$ ne converge pas uniformément dans $(-\infty, +\infty)$. Alors pour un $\varepsilon > 0$, fixe, il existeraient deux sous-suites $\{u(t_p+h_{m'_p})\}$ et $\{u(t_p+h_{m''_p})\}$ telles que

$$(25)\qquad |u(t_p+h_{m'_p})-u(t_p+h_{m''_p})|\geqslant\varepsilon.$$

D'autre part de (23) nous avons:

$$(26)\qquad |f(t+t_p+h_{m'_p})-f(t+t_p+h_{m''_p})|\leqslant|f(t+t_p+h_{m'_p})-f^*(t+t_p)|+$$
$$+|f^*(t+t_p)-f(t+t_p+h_{m''_p})|\to 0$$

dans L^2, uniformément sur $(-\infty, +\infty)$, pour $p\to\infty$.

Soit maintenant dans le lemme 5, $s=-1$, $t=0$ et $u_i(t)=u(t+t_i+h_{m'_i})$ ou $u(t+t_i+h_{m''_i})$. Alors $\{u(t_i+h_{m'_i})\}$ et $\{u(t_i+h_{m''_i})\}$ sont des ensembles relativement compacts dans N, donc on peut extraire une sous-suite $\{u(t_i^1+h^1_{u'_i})\}$ resp. $\{u(t_i^1+h^1_{u''_i})\}$ convergent. On applique le lemme 5 cette fois-ci pour $s=-2$ et $t=-1$ et $u_i(t)=u(t+t_i^1+h^1_{m'_i})$ où $u_i(t)=u(t+t_i^1+h^1_{m''_p})$ et ainsi de suite. Par le procédé le diagonal on extrait deux sous-suites $\{u(t+t_p^p+h^p_{m'_p})\}$ et $\{u(t+t_p^p+h^p_{u''_p})\}$ qui vérifient la relation (25) et qui sont convergentes dans N en tous les points $t=0, -1, -2, \ldots$

Alors, si on applique le théorème 3, il résulte que

$$\lim_{p\to\infty} u(t+t_p^p+h^p_{m'_p})=u_1(t)$$

et

$$\lim_{p\to\infty} u(t+t_p^p+h^p_{m''_p})=u_2(t)$$

existent et sont des solutions intermédiaires des équations de Navier-Stokes au même membre droit (grâce à (26)).

D'autre part, en utilisant (24), de la même manière que nous avons déjà utilisée pour obtenir (26), nous déduisons:

$$pr_n u(t+t_p+h_{m'_p})-pr_n u(t+t_p+h_{m''_p})\to 0$$

uniformément sur $(-\infty, +\infty)$. Il en découle que $pr_n u_1(t)\equiv pr_n u_2(t)$.

Du théorème 5 on a tout de suite:

$$u_1(t)\equiv u_2(t)$$

et en particulier $u_1(0)=u_2(0)$, en contradiction avec (25), donc la supposition que $\{u(t+h_{m_p})\}$ n'est pas uniformément convergente est fausse.

REMARQUE. Le cas où $n=0$ a été traité aussi dans [1]. Toute fois, même ce cas particulier de notre théorème améliore le résultat de [1].

§ 8. Solutions intermédiaires stationnaires.

THÉORÈME 7. *Soit $u(t)$ une solution intermédiaires des équations de Navier-Stokes au membre droit $f(t)$. Soit n assez grand pour que*

$$\lambda_{n+1} > \frac{c\,|||\,u\,|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta}{\nu}$$

Si

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = F \ (\text{dans } L^2)$$

et

$$\lim_{t\to\infty} pr_n u(t) \ \textit{existe dans } R^n$$

alors

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = U \ (\text{dans } N)$$

existe également et est solution intermédiaire stationnaire des équations de Navier-Stokes au membre droit F.

DÉMONSTRATION. Soit $u_h(t)=u(t+h)$ et $f_h(t)=f(t+h)$. $u_h(t)$ est solution intermédiaire des équations de Navier-Stokes au membre droit $t_h(t)$.

Par hypothèse: $\lim_{t\to\infty} f(t)=F$ (dans L^2). C'est-à-dire, pour tout $\eta>0$ il existe un δ_n tel que si $t>\delta_n$ on ait:

$$|\,f(t)-F\,|<\eta.$$

Soit maintenant $\varepsilon>0$ et considérons que t varie dans l'intervalle $[\varepsilon, +\infty)\subset(0, +\infty)\cdot h\to+\infty$, donc on peut faire $h>\delta_\eta-\varepsilon$. Alors pour tout $\eta>0$ il existe un $\xi_{\eta,\varepsilon}(=\delta_\eta-\varepsilon)$ tel que si $h>\xi_{\eta,\varepsilon}$ on ait:

$$|f_h(t)-F|<\eta.$$

pour t quelconque dans $[\varepsilon, +\infty)$. Cela veut dire que la suite $\{f_h\}$ est uniformément convergente sur tout $[\varepsilon, +\infty)\subset(0, +\infty)$, pour $h\to+\infty$, vers F (dans L^2). Alors, si on applique le théorème 3, la suite $\{u_h\}$ converge uniformément (dans N) vers une solution intermédiaire $U_0(t)$ au membre droit F.

On utilise de noveau (13):

$$(27)\qquad |E_nu_h(t)-E_nu(t)|^2\leqslant C_1e^{-C(n)(t-s)}|E_nu_h(s)-E_nu(s)|^2+$$
$$+C_2\sup_{\sigma\in[s,\,t]}|pr_nu_h(\sigma)-pr_nu(\sigma)|^2+C_3\sup_{\sigma\in[s,\,t]}|f_h(\sigma)-f(\sigma)|^2$$

où C_1, C_2, C_3 et $C(n)$ sont des constantes introduites dans § 4. $C(n)>0$ par hypothèses. Mais toujours des hypothèses on a:

$$\lim_{t\to+\infty}[\sup_{h>0}|f_h(t)-f(t)|^2]=0$$

$$\lim_{t\to+\infty}[\sup_{h>0}|pr_nu_h(t)-pr_nu(t)|^2]=0.$$

Alors (27) donne:

$$\lim_{t\to+\infty}[\sup_{h>0}|E_nu_h(t)-E_nu(t)|^2]=0$$

ou bien

$$\lim_{t\to+\infty}[\sup_{h>0}|u_h(t)-u(t)|^2]=0$$

ce qui assure l'existence de $\lim_{h\to+\infty}u(t)=U$ (dans N), U fonction indépendante de t.

D'autre part d'ici découle que $\lim u_h(t)=U$ et celà uniformément dans tout $[\varepsilon, +\infty)\subset(0, +\infty)$. Mais alors $U_0(t)=U$, donc U est solution intermédiaire stationnaire des équations de Navier-Stokes au membre droit F.

Le théorème 7 a le suivant

COROLLAIRE. *Si $f(t)=F$ ne dépend pas de t et si u_1 et u_2 sont deux solutions intermédiaires stationnaires telles que $pr_n u_1 = pr_n u_2$ (pour n assez grand) alors il résulte $u_1 = u_2$.*

§ 9. Remarques.

Rappellons que la condition (12) imposée à n est

$$\lambda_{n+1} > \frac{c \, |||\, u \,|||_p^{\frac{2p}{p-3}} + \delta}{\nu}$$

dans les théorèmes 4, 5, 6 et 7. δ est une constante qu'on peut choissir assez petite. c est une costante qui dépend d'un $\varepsilon < 0$, fixe et vérifiant $\varepsilon \leqslant \frac{\nu}{6}$. La costante c ne dépend pas de u (voir § 4).

Si $|||\, u \,|||_p$ est assez petite alors la relation (12) est vérifiée pour $n=0$. Donc les théorèmes mentionnés constituent des critères de stabilité, de presque- périodicité asymptotique, d'unicité et de presque-périodicité.

Avant de finir il faut mentionner que la plupart des théorèmes obtenus içi ont des correspondants dans [1], [2] et [4] et leurs démonstrations sont partiellement calquées sur l'argumentation de ces théorèmes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FOIAS C.: *Essais dans l'étude des solutions des équations de Navier-Stokes. L'unicité et la presque-périodicité des solutions « petites »*. Rend. Sem Mat. Univ. Padova, *32*, 1962, 261-294.

[2] FOIAŞ C., PRODI G.: *Sur le comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension* 2. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, *39*, 1967, 1-34.

[3] PRODI G.: *Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes.* Ann. Mat. pura appl., *48*, 1959, 173-182.

[4] PRODI G.: *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, *30*, 1965, 1-15.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 giugno 1970.