Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Franco Parodi

Simmetrizzazione di una categoria

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 223-262

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__223_0>

SIMMETRIZZAZIONE DI UNA CATEGORIA

FRANCO PARODI *)

PARTE II

PROCESSI DI SIMMETRIZZAZIONE

Introduzione

In questa parte II si descrivono due procedimenti duali di simmetrizzazione di una categoria, soddisfacente condizioni opportune. Viene così risolto più in generale il problema già affrontato da Hilton della costruzione della categoria delle corrispondenze in una categoria abeliana.

In particolare si perviene alla categoria delle corrispondenze tra insiemi, ben nota ed alla categoria dei « trasduttori » che ha già avuto applicazioni [1]).

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università di Genova, via L. B. Alberti, 4, 16132 Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei programmi di ricerca matematica del C.N.R. (Contratto di ricerca n. 13).

[1]) Cfr. GABRIELE DARBO, *Aspetti algebrico categoriali della teoria dei dispositivi*, Atti del convegno di Topologia algebrica e algebra omologica, Roma, aprile 1969.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria nella quale supporremo:

2.i) esistenza di fattorizzazione epic-mono per ogni mappa;

2.ii) esistenza di somme dirette finite;

2.iii) esistenza di Push-Out (φ, ψ; ψ', φ') per ogni coppia di mappe

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

2.iv) dato

$$\begin{tikzcd} & P & \\ A \arrow[ur, "\mu'"] & & B \arrow[ul, "\varphi'"'] \\ & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

Push Out con μ monomorfismo, μ' è monomorfismo.

Osservazioni 2.1. Come visto negli esempi della parte I le ipotesi precedenti sono verificate per la categoria degli insiemi, per la categoria degli spazi topologici, per una qualunque categoria abeliana.

Dati A, B oggetti di $\mathcal{C}$ consideriamo le coppie di mappe (φ, ψ) del tipo:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "\varphi"] & & B \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

essendo X un qualunque oggetto di $\mathcal{C}$.

Definiamo fra due tali coppie la seguente relazione di preordine: $(\varphi, \psi) < (\varphi', \psi')$ se esiste μ monomorfismo tale che il diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
 & X' & \\
 & X \arrow[u, "\mu"] & \\
A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[uur, "\varphi'"] & & B \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[uul, "\psi'"']
\end{tikzcd}
$$

commuti.

Consideriamo la relazione di equivalenza generata per simmetria e transitività, dalla relazione data.

Proposizione 2.1. La relazione simmetrizzata della relazione data: $(\varphi_1, \psi_1) \sim (\varphi_2, \psi_2)$ se esistono μ_1, μ_2 monomorfismi tali che il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & & M & & \\
 & X_1 \arrow[ur, "\mu_1"] & & X_2 \arrow[ul, "\mu_2"'] & \\
A \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[urrr, "\varphi_2"'] & & & & B \arrow[ul, "\psi_2"'] \arrow[ulll, "\psi_1"]
\end{tikzcd}
$$

commuti, è una relazione di equivalenza.

Essa è allora la relazione di equivalenza generata dal preordine prima considerato.

Dim. Si ha da provare che la relazione ora definita, la quale è ovviamente riflessa e simmetrica, risulta pure transitiva.

Siano $(\varphi_1, \psi_1) \sim (\varphi_2, \psi_2)$ e $(\varphi_2, \psi_2) \sim (\varphi_3, \psi_3)$, possiamo costruire il seguente diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & & & P & & & \\
 & & M \arrow[ur, "\nu'_2"] & & N \arrow[ul, "\mu'_2"'] & & \\
 & X_1 \arrow[ur, "\mu_1"] & & X_2 \arrow[ul, "\mu_2"'] \arrow[ur, "\nu_2"] & & X_3 \arrow[ul, "\nu_3"'] & \\
A \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[urrr, "\varphi_2"] \arrow[urrrrr, "\varphi_3"'] & & & & & & B \arrow[ul, "\psi_3"'] \arrow[ulll, "\psi_2"'] \arrow[ulllll, "\psi_1"]
\end{tikzcd}
$$

dove μ_1, μ_2, ν_2, ν_3 sono monomorfismi e $(\mu_2, \nu_2; \nu'_2, \mu'_2)$ Push Out.

Grazie all'ipotesi 2.iv) fatta sulla categoria $\mathcal{C}$ ν'_2, μ'_2 sono monomorfismi pertanto $(\varphi_1, \psi_1) \sim (\varphi_3, \psi_3)$, come risulta osservando che $\nu'_2\mu_1$, $\mu'_2\nu_3$ sono monomorfismi (Prop. 1.1.) [2]) e il diagramma è commutativo.

Noteremo φ/ψ la classe di equivalenza [3]) contenente la coppia (φ, ψ) e scriveremo brevemente

$$\varphi/\psi : A \to B$$

in previsione del fatto che queste classi saranno le mappe della categoria simmetrizzata di $\mathcal{C}$ come risulterà nel seguito.

Definizione 2.1. $(\varphi_0, \psi_0) \in \varphi/\psi$ si dice coppia minima di φ/ψ se qualunque sia $(\rho, \sigma) \in \varphi/\psi$, $(\varphi_0, \psi_0) < (\rho, \sigma)$; se dunque è minima nel preordine in φ/ψ.

Proposizione 2.2. Consideriamo (φ_0, ψ_0),

$$\begin{tikzcd} & X_0 & \\ A \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[r, "\iota_A"'] & A+B \arrow[u, "\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle"] & B \arrow[ul, "\psi_0"'] \arrow[l, "\iota_B"] \end{tikzcd}$$

(l'esistenza di $A+B$ è assicurata dall'ipotesi 2.ii) fatta su $\mathcal{C}$), (φ_0, ψ_0) è coppia minima di φ/ψ se e soltanto se $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle$ è epic.

Dim. Sia (φ_0, ψ_0) coppia minima di φ/ψ, consideriamo il diagramma commutativo

---

2) Cfr. [6], parte prima di questo lavoro.

3) Ovviamente questa nozione può essere precisata in una opportuna assiomatica della teoria degli insiemi, o può essere surrogata dalla scelta di un rappresentante privilegiato (vedi [2]).

$$\begin{tikzcd}
 & X_0 \arrow[d, dashed, shift left, "\nu"] & \\
 & X \arrow[u, shift left, "\mu"] & \\
A \arrow[uur, "\varphi_0"] \arrow[ur] \arrow[r, "\iota_A"'] & A+B \arrow[u, "\varepsilon"] & B \arrow[uul, "\psi_0"'] \arrow[ul] \arrow[l, "\iota_B"]
\end{tikzcd}$$

dove $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle = \mu\varepsilon$ è una fattorizzazione epic-mono (l'esistenza di fattorizzazioni epic-mono è assicurata dall'ipotesi 2.i) fatta su $\mathcal{C}$), allora ovviamente $(\varepsilon\iota_A, \varepsilon\iota_B) < (\varphi_0, \psi_0)$ ma poichè (φ_0, ψ_0) è coppia minima, $(\varphi_0, \psi_0) < (\varepsilon\iota_A, \varepsilon\iota_B)$ ovvero esiste ν monomorfismo tale che $\nu\varphi_0 = \varepsilon\iota_A$, $\nu\psi_0 = \varepsilon\iota_B$ dalle due eguaglianze segue $\nu\mu\varepsilon = \varepsilon$ infatti

$$\nu\mu\varepsilon\iota_A = \nu\varphi_0 = \varepsilon\iota_A , \qquad \nu\mu\varepsilon\iota_B = \nu\psi_0 = \varepsilon\iota_B .$$

Allora poichè ε è epic si ha $\nu\mu = 1$ ciò implica che ν è epimorfismo, ma poichè ν è anche monomorfismo risulta ν isomorfismo, per cui pure μ è isomorfismo; segue che $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle = \mu\varepsilon$ è epic.

Viceversa sia $(\varphi_0, \psi_0) \in \varphi/\psi$ tale che sia $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle$ epic, sia $(\rho, \sigma) \in \varphi/\psi$, allora $(\varphi_0, \psi_0) \sim (\rho, \sigma)$ ovvero esistono μ_0, μ monomorfismi tali che sia commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & M & \\
X_0 \arrow[ur, "\mu_0"] & & X \arrow[ul, "\mu"'] \\
A \arrow[u, "\varphi_0"] \arrow[urr, "\rho"] & & B \arrow[ull, "\psi_0"'] \arrow[u, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Se $\langle \rho, \sigma \rangle = \nu\varepsilon$ è una fattorizzazione epic-mono, risulta:

$$\mu_0 \langle \varphi_0, \psi_0 \rangle = \langle \mu_0\varphi_0, \mu_0\psi_0 \rangle = \langle \mu\rho, \mu\sigma \rangle = \mu \langle \rho, \sigma \rangle = \mu\nu\varepsilon.$$

Si hanno così due fattorizzazioni epic-mono di una stessa mappa, esiste allora (Prop. 1.5) un isomorfismo ι tale che $\iota\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle = \varepsilon$, $\mu_0 = \nu\iota$, pertanto è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& & X & & \\
& & Y \arrow[u, "\nu"] & & \\
& & X_0 \arrow[u, "\iota"] & & \\
A \arrow[uuurr, "\rho"] \arrow[urr, "\varphi_0"] \arrow[rr, "\iota_A"'] & & A+B \arrow[u, "\langle\varphi_0{,}\psi_0\rangle"'] & & B \arrow[uuull, "\sigma"'] \arrow[ull, "\psi_0"'] \arrow[ll, "\iota_B"]
\end{tikzcd}$$

allora $(\varphi_0, \psi_0) < (\rho, \sigma)$ essendo $\nu\iota$ monomorfismo.

Corollario. Data (φ, ψ) sia φ oppure ψ epic, allora (φ, ψ) è coppia minima di φ/ψ.

Dim. È conseguenza immediata della proposizione precedente e di ovvie proprietà degli epic.

Proposizione 2.3. Esiste in ogni classe una coppia minima.

Dim. Data φ/ψ, consideriamo (φ, ψ) e sia $\langle \varphi, \psi \rangle = \mu\varepsilon$ fattorizzazione epic-mono, consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
& & X & & \\
& & I \arrow[u, "\mu"] & & \\
A \arrow[uurr, "\varphi"] \arrow[urr] \arrow[rr, "\iota_A"'] & & A+B \arrow[u, "\varepsilon"] & & B \arrow[uull, "\psi"'] \arrow[ull] \arrow[ll, "\iota_B"]
\end{tikzcd}$$

$(\varepsilon\iota_A, \varepsilon\iota_B) \in \varphi/\psi$ infatti $(\varepsilon\iota_A, \varepsilon\iota_B) < (\varphi, \psi)$, ed è coppia minima di φ/ψ in virtù della Prop. 2.2, essendo $\langle \varepsilon\iota_A, \varepsilon\iota_B \rangle = \varepsilon$ epic.

Proposizione 2.4. La coppia minima di una classe è unica a meno di isomorfismi.

DIM. Siano (φ_0, ψ_0) e (φ'_0, ψ'_0) coppie minime di φ/ψ allora: intanto $(\varphi_0, \psi_0) \sim (\varphi'_0, \psi'_0)$ ovvero esistono μ, μ' monomorfismi tali che sia commutativo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
& & M & & \\
& X_0 \arrow[ur, "\mu"] & & X'_0 \arrow[ul, "\mu'"'] & \\
A \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[urrr, "\varphi'_0"'] \arrow[rr, "\iota_A"'] & & A+B \arrow[ul] \arrow[ur] & & B \arrow[ll, "\iota_B"] \arrow[ul, "\psi'_0"'] \arrow[ulll, "\psi_0"]
\end{tikzcd}$$

$$\mu\langle \varphi_0, \psi_0\rangle = \langle \mu\varphi_0, \mu\psi_0\rangle = \langle \mu'\varphi'_0, \mu'\psi'_0\rangle = \mu'\langle \varphi'_0, \psi'_0\rangle$$

sono due fattorizzazioni epic-mono di una stessa mappa infatti per la Prop. 2.2 essendo (φ_0, ψ_0), (φ'_0, ψ'_0) coppie minime risultano $\langle \varphi_0, \psi_0\rangle$, $\langle \varphi'_0, \psi'_0\rangle$ epic.

Dalla Prop. 1.5 segue allora che esiste uno ed un solo morfismo $\iota : X'_0 \to X_0$ tale che $\langle \varphi_0, \psi_0\rangle = \iota\langle \varphi'_0, \psi'_0\rangle$ ovvero $\varphi_0 = \iota\varphi'_0$, $\psi_0 = \iota\psi'_0$ ed è ι isomorfismo.

PROPOSIZIONE 2.5. Sia (φ_0, ψ_0) coppia minima di φ/ψ esiste uno ed uno solo morfismo μ tale che commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& & X & & \\
& & X_0 \arrow[u, "\mu"] & & \\
A \arrow[uurr, "\varphi"] \arrow[urr, "\varphi_0"] \arrow[rr, "\iota_A"'] & & A+B \arrow[u, "\langle \varphi_0, \psi_0\rangle"] & & B \arrow[ll, "\iota_B"] \arrow[ull, "\psi_0"'] \arrow[uull, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

ed è μ monomorfismo.

DIM. L'esistenza di un monomorfismo μ che rende commutativo il diagramma è ovvia poichè $(\varphi_0, \psi_0) < (\varphi, \psi)$; l'unicità si prova facilmente; sia $\mu' : X_0 \to X$ una mappa che rende commutativo il diagramma, allora

$$\mu\langle\varphi_0\,,\ \psi_0\rangle=\langle\varphi,\ \psi\rangle=\mu'\langle\varphi_0\,,\ \psi_0\rangle$$

ma essendo per la Prop. 2.2 $\langle\varphi_0\,,\ \psi_0\rangle$ epic, si ha $\mu=\mu'$.

Siano ora $\varphi/\psi : A\to B$, $\varkappa/\lambda : B\to C$, consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & & Z & & \\
 & X \arrow[ur, "\varkappa'"] & & Y \arrow[ul, "\psi'"'] & \\
A \arrow[ur, "\varphi"'] & & B \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\varkappa"'] & & C \arrow[ul, "\lambda"]
\end{tikzcd}$$

dove $(\psi,\ \varkappa;\ \varkappa',\ \psi')$ è Push-Out (l'esistenza è assicurata dall'ipotesi 2.iii) sulla categoria $\mathcal{C}$), possiamo allora considerare $(\varkappa'\varphi,\ \psi'\lambda)$.

PROPOSIZIONE 2.6. Date $\varphi/\psi : A\to B$ e $\varkappa/\lambda : B\to C$, $\varkappa'\varphi/\psi'\lambda : A\to C$, essendo $(\psi,\ \varkappa;\ \varkappa',\ \psi')$ Push Out, dipende solo da φ/ψ e $\varkappa/\lambda$ non dai particolari rappresentanti delle classi.

DIM. È sufficiente provare che se $(\varphi,\ \psi)<(\alpha,\ \beta)$, $(\varkappa,\ \lambda)<(\gamma,\ \delta)$ e sono Push Out $(\psi,\ \varkappa;\ \varkappa',\ \psi')$ e $(\beta,\ \gamma;\ \gamma',\ \beta')$, allora $(\varkappa'\varphi,\ \psi'\lambda)<(\gamma'\alpha,\ \beta'\delta)$; a tale scopo consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & Z' & & & \\
 & & U \arrow[ur, "\nu''"] & & V \arrow[ul, "\mu''"'] & & \\
 & X' \arrow[ur, "\varkappa''"] & & Z \arrow[ul, "\mu'"'] \arrow[ur, "\nu'"] & & Y' \arrow[ul, "\psi''"'] & \\
 & X \arrow[u, "\mu"] \arrow[urr, "\varkappa'"] & & & & Y \arrow[u, "\nu"'] \arrow[ull, "\psi'"'] & \\
A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\varphi"'] & & & B \arrow[ull, "\psi"] \arrow[uull, "\beta"'] \arrow[uurr, "\gamma"] \arrow[urr, "\varkappa"'] & & & C \arrow[ul, "\lambda"] \arrow[uul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

dove sono μ, ν monomorfismi e Push Out i quadrati

$$(\psi,\ \varkappa;\ \varkappa',\ \psi'),\ (\mu,\varkappa';\ \varkappa'',\mu'),\ (\psi',\ \nu;\ \nu',\ \psi''),\ (\mu',\ \nu';\ \nu'',\ \mu'').$$

Per la Proposizione 1.9 $(\beta,\ \gamma;\ \nu''\varkappa'',\ \mu''\psi'')$ è un Push Out e per l'ipotesi 2.iv) fatta sulla categoria $\mathcal{C}$, essendo μ monomorfismo sono μ' e μ'' monomorfismi, analogamente sono ν' e ν'' monomorfismi essendo ν monomorfismo.

Posto $\gamma'=\nu''\varkappa''$, $\beta'=\mu''\psi''$, $\sigma=\nu''\mu'=\mu''\nu'$, σ è monomorfismo ed è commutativo il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd}
 & & & Z' & & & \\
 & X' \arrow[urr, "\gamma'"] & & Z \arrow[u, "\sigma"] & & Y' \arrow[ull, "\beta'"'] & \\
 & & X \arrow[ur, "\varkappa'"] & & Y \arrow[ul, "\psi'"'] & & \\
A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[urr, "\varphi"'] & & & B \arrow[ul, "\psi"] \arrow[uull, "\beta"'] \arrow[uurr, "\gamma"] \arrow[ur, "\varkappa"'] & & & C \arrow[ull, "\lambda"] \arrow[uul, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

ciò prova che $(\varkappa'\varphi,\ \psi'\lambda)<(\gamma'\alpha,\ \beta'\delta)$ essendo $(\psi,\ \varkappa;\ \varkappa',\ \psi')$ e $(\beta,\ \gamma;\ \gamma',\ \beta')$ Push Out.

Definizione 2.2. Date $\varphi/\psi : A \to B$ e $\varkappa/\lambda : B \to C$ definiamo $\varkappa/\lambda \circ \varphi/\psi : A \to C$ nel modo seguente: $\varkappa/\lambda \circ \varphi/\psi = \varkappa'\varphi/\psi'\lambda$ essendo $(\psi,\ \varkappa;\ \varkappa',\ \psi')$ Push Out.

Teorema 2.1. Esiste una categoria $\breve{\mathcal{C}}$ tale che $Ob\breve{\mathcal{C}}=Ob\mathcal{C}$, $\mathrm{Map}_{\breve{\mathcal{C}}}(A,\ B)$ è l'insieme delle classi di equivalenza del tipo φ/ψ, la legge di composizione di mappe consecutive è data dalla Definizione 2.2, mappa identica di A in $\breve{\mathcal{C}}$ è la classe $1_A/1_A$.

Dim. *a*) La legge di composizione assegnata è associativa: siano date $\varphi/\psi : A \to B$, $\varkappa/\lambda : B \to C$, $\rho/\sigma : C \to D$, consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & P & & & \\
 & & R \arrow[ur, "\rho''"] & & S \arrow[ul, "\psi''"'] & & \\
 & X \arrow[ur, "\varkappa'"] & & Y \arrow[ul, "\psi'"'] \arrow[ur, "\rho'"] & & Z \arrow[ul, "\lambda'"'] & \\
A \arrow[ur, "\varphi"] & & B \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[ur, "\varkappa"] & & C \arrow[ul, "\lambda"'] \arrow[ur, "\rho"] & & D \arrow[ul, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

dove sono Push Out i quadrati

$$(\psi,\ \varkappa;\ \varkappa',\ \psi'),\ (\lambda,\ \rho;\ \rho',\ \lambda') \text{ e } (\psi',\ \rho';\ \rho'',\ \psi'');$$

per la proposizione 1.8 $(\psi,\ \rho'\varkappa;\ \rho''\varkappa',\ \psi'')$ è Push Out, pertanto

$$(\rho/\sigma \circ \varkappa/\lambda) \circ \varphi/\psi = \rho'\varkappa/\lambda'\sigma \circ \varphi/\psi = (\rho''\varkappa')\varphi/\psi''(\lambda'\sigma)$$

ancora per la prop. 1.8 $(\psi'\lambda,\ \rho;\ \rho'',\ \psi''\ \lambda')$ è Push Out, pertanto

$$\rho/\sigma \circ (\varkappa/\lambda \circ \varphi/\psi) = \rho/\sigma \circ \varkappa'\varphi/\psi'\lambda = \rho''(\varkappa'\varphi)/(\psi''\lambda')\sigma$$

grazie all'associatività della composizione in $\mathcal{C}$ segue

$$(\rho/\sigma \circ \varkappa/\lambda) \circ \varphi/\psi = \rho''\varkappa'\varphi/\psi''\lambda'\sigma = \rho/\sigma \circ (\varkappa/\lambda \circ \varphi/\psi).$$

b) Dato l'oggetto A, verifichiamo che $1_A/1_A$ è l'identità di A in $\breve{\mathcal{C}}$.

Data $\varphi/\psi : A \to B$, poichè ovviamente $(1,\ \varphi;\ \varphi,\ 1)$ è Push Out

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & X & & \\
 & A \arrow[ur, "\varphi"] & & X \arrow[ul, equal, "1_X"'] & \\
A \arrow[ur, equal, "1_A"] & & A \arrow[ul, equal, "1_A"'] \arrow[ur, "\varphi"] & & B \arrow[ul, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

si ha $\varphi/\psi \circ 1_A/1_A = \varphi 1_A/1_X\psi = \varphi/\psi$.

In modo analogo si prova che data $\rho/\sigma : C \to A$, $1_A/1_A \circ \rho/\sigma = \rho/\sigma$.

TEOREMA 2.2. *a*) $\mathfrak{C}$ è immersa fedelmente in $\breve{\mathfrak{C}}$ dal funtore $\mathfrak{J} : \mathfrak{C} \to \breve{\mathfrak{C}}$ definito: $\mathfrak{J}(A)=A$ per ogni oggetto A di $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{J}(\varphi)=\varphi/1$ per ogni mappa φ di $\mathfrak{C}$.

Possiamo così identificare le mappe di $\mathfrak{C}$ con le corrispondenti in $\breve{\mathfrak{C}}$, e considerare $\mathfrak{C}$ come sottocategoria di $\breve{\mathfrak{C}}$.

b) $\breve{\mathfrak{C}}$ è dotata di un'antinvoluzione « $\sim$ » data per ogni mappa $\Gamma=\varphi/\psi$ di $\breve{\mathfrak{C}}$ da $\tilde{\Gamma}=\psi/\varphi$; diremo $\tilde{\Gamma}$ reciproca di Γ.

c) Se φ e ψ soon mappe di $\mathfrak{C}$ aventi lo stesso codominio allora $\varphi/\psi=\widetilde{\mathfrak{J}(\psi)}\mathfrak{J}(\varphi)=\tilde{\psi}\varphi$.

DIM. *a*) Consideriamo $\mathfrak{J} : \mathfrak{C} \to \breve{\mathfrak{C}}$ così definito $\mathfrak{J}(A)=A$ per ogni oggetto A di $\mathfrak{C}$, e per ogni $\varphi : A \to B$ mappa di $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{J}(\varphi)=\varphi/1_B$; $\mathfrak{J}$ è un funtore infatti:

$\mathfrak{J}(1_A)=1_A/1_A$ che è mappa identica di A in $\breve{\mathfrak{C}}$, e date $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & C & & \\
 & B \arrow[ur, "\beta"] & & C \arrow[ul, "1_C"'] & \\
A \arrow[ur, "\alpha"] & & B \arrow[ul, "1_B"'] \arrow[ur, "\beta"] & & C \arrow[ul, "1_C"']
\end{tikzcd}$$

$(1_B, \beta; \beta, 1_C)$ è Push Out pertatnto segue:

$$\mathfrak{J}(\beta) \circ \mathfrak{J}(\alpha)=\beta/1_C \circ \alpha/1_B=\beta\alpha/1_C=\mathfrak{J}(\beta\alpha).$$

Il funtore $\mathfrak{J}$ è ovviamente iniettivo e suriettivo sugli oggetti ed è altresì iniettivo sulle mappe, infatti siano $\alpha_1, \alpha_2 : A \to B$; se

$$\alpha_1/1_B=\mathfrak{J}(\alpha_1)=\mathfrak{J}(\alpha_2)=\alpha_2/1_B$$

poichè $(\alpha_1, 1_B)$ e $(\alpha_2, 1_B)$ sono entrambe coppie minime (vedi Corollario Prop. 2.2) per la Prop. 2.4 esiste un isomorfismo ι tale che $\iota\alpha_1=\alpha_2$ e $\iota 1_B=1_B$ si ha allora $\iota=1_B$, $\alpha_1=\alpha_2$.

b) Sia $\Gamma : A \to B$ una mappa di $\breve{\mathfrak{C}}$, $\Gamma=\varphi/\psi$; definito $\tilde{\Gamma}=\psi/\varphi$, $\tilde{\Gamma} : B \to A$ e $\tilde{A}=A$ per ogni A oggetto di $\breve{\mathfrak{C}}$ si ha ovviamente che « $\sim$ »

è un endofuntore controvariante di $\breve{\mathcal{C}}$, involutorio poichè

$$(\tilde{\tilde{\Gamma}}) = \widetilde{\psi/\varphi} = \varphi/\psi .$$

c) Proviamo infine che dato $\varphi/\psi : A \to B$ risulta $\varphi/\psi = \widetilde{\mathfrak{J}(\psi)} \circ \mathfrak{J}(\varphi)$ infatti consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & X & & \\
 & X \arrow[ur, Rightarrow, "1_X"] & & X \arrow[ul, Rightarrow, "1_X"'] & \\
A \arrow[ur, "\varphi"] & & X \arrow[ul, Rightarrow, "1_X"'] \arrow[ur, Rightarrow, "1_X"] & & B \arrow[ul, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

$(1_X , 1_X ; 1_X , 1_X)$ è ovviamente Push Out per cui

$$\widetilde{\mathfrak{J}(\psi)} \circ \mathfrak{J}(\varphi) = 1_X/\psi \circ \varphi/1_X = 1_X\varphi/1_X\psi = \varphi/\psi .$$

Teorema 2.3. Se φ è isomorfismo di $\mathcal{C}$, allora $\tilde{\varphi} = \varphi^{-1}$.

Dim. È commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & B & \\
 & A \arrow[u, "\varphi"] & \\
B \arrow[uur, Rightarrow, "1_B"] \arrow[ur, "\varphi^{-1}"'] & & A \arrow[uul, "\varphi"'] \arrow[ul, Rightarrow, "1_A"]
\end{tikzcd}$$

φ isomorfismo è in particolare un monomorfismo, quindi

$$(\varphi^{-1}, 1_A) \sim (1_B , \varphi).$$

Teorema 2.4. In $\breve{\mathcal{C}}$ non ci sono altri isomorfismi che quelli di $\mathcal{C}$.

Dim. È ovvio che gli isomorfismi di $\mathcal{C}$ sono isomorfismi pure in $\breve{\mathcal{C}}$.

Viceversa sia $\varphi/\psi : A \to B$ isomorfismo di $\breve{\mathcal{C}}$ allora esiste $\alpha/\beta : B \to A$ tale che $\alpha/\beta \circ \varphi/\psi = 1_A/1_A$ e $\varphi/\psi \circ \alpha/\beta = 1_B/1_B$.

In queste ipotesi sono vere le proposizioni seguenti:

a) $\alpha/\beta=\varphi/\psi$, per cui abbiamo le relazioni

$$\psi/\varphi\circ\varphi/\psi=1/1, \qquad \varphi/\psi\circ\psi/\varphi=1/1;$$

b) $\psi/\varphi\circ\varphi/\psi=1/1$ con $(\varphi,\ \psi)$ coppia minima, implica che φ è monomorfismo e ψ epic in $\mathcal{C}$.

Se $(\varphi,\ \psi)$ è dunque coppia minima anche $(\psi,\ \varphi)$ è coppia minima; da *a*) e *b*) si deduce allora: φ mono, ψ epic ed anche ψ mono, φ epic in $\mathcal{C}$.

Da ciò segue per la Prop. 1.3. che φ e ψ sono isomorfismi di $\mathcal{C}$.

Dai Teoremi 2.2., 2.3. si ha allora che $\varphi/\psi=\tilde{\psi}\varphi=\psi^{-1}\varphi$ è un isomorfismo in $\mathcal{C}$.

Dimostriamo ora le proposizioni enunciate:

a) Se $\alpha/\beta\circ\varphi/\psi=1/1$ e $\varphi/\psi\circ\alpha/\beta=1/1$ esistono μ, ν, ρ, σ monomorfismi tali che siano commutativi i diagrammi seguenti:

$$\begin{tikzcd}
& & M & & \\
& & P \arrow[u, "\nu"] & & \\
& X \arrow[ur, "\alpha'"] & & Y \arrow[ul, "\psi'"'] & \\
A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[uuurr, "\mu"] & & B \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[ur, "\alpha"] & & A \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[uuull, "\mu"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & N & & \\
& & Q \arrow[u, "\sigma"] & & \\
& Y \arrow[ur, "\varphi'"] & & X \arrow[ul, "\beta'"'] & \\
B \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[uuurr, "\rho"] & & A \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[ur, "\varphi"] & & B \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[uuull, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

dovo sono $(\psi,\ \alpha;\ \alpha',\ \psi')$ e $(\beta,\ \varphi;\ \varphi',\ \beta')$ Push Out.

Consideriamo le eguaglianze:

$$\nu\alpha'\varphi=\mu=\nu\psi'\beta \qquad \sigma\varphi'\alpha=\rho=\sigma\beta'\psi$$

da esse segue per la Prop. 1.2 che φ, β, α, ψ sono monomorfismi in $\mathcal{C}$ quindi per l'ipotesi 1.iv) fatta sulla categoria $\mathcal{C}$ pure φ', β', α', ψ' sono monomorfismi.

Sempre dalle eguaglianze sopra scritte segue cancellando ν, $\alpha'\psi=\psi'\beta$; e cancellando σ, $\varphi'\alpha=\beta'\psi$.

È allora commutativo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
& & N & & \\
& Y \arrow[ur, "\varphi'"] & & X \arrow[ul, "\beta'"'] & \\
B \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[urrr, "\psi"'] & & & & A \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[ulll, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

per cui $\alpha/\beta = \psi/\varphi$.

b) Se $\psi/\varphi \circ \varphi/\psi = 1/1$ e (φ, ψ) è coppia minima, esistono μ, ν monomorfismi di $\mathcal{C}$ tali che sia commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& & M & & \\
& & P \arrow[u, "\nu"'] & & \\
& X \arrow[ur, "\psi'"] & & X \arrow[ul, "\psi''"'] & \\
A \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[uuurr, "\mu"] & & B \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\psi"'] & & A \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[uuull, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

dove $(\psi, \psi; \psi', \psi'')$ è Push Out.

Vale allora l'eguaglianza $\nu\psi'\beta = \mu = \nu\psi''\varphi$ ed essendo μ monomorfismo φ è monomorfismo, ed esesndo ν monomorfismo $\psi'\varphi = \psi''\varphi$.

Ancora, essendo $(\psi, \psi; \psi', \psi'')$ Push Out, sono (vedi Prop. 1.14.) ψ' e ψ'' coretrazioni, quindi monomorfismi.

Allora per la Prop. 2.5. poichè $\psi'\varphi = \psi''\varphi$, $\psi'\psi = \psi''\psi$, ψ' e ψ'' sono monomorfismi e (φ, ψ) è coppia minima si ha: $\psi' = \psi''$; ed essendo $(\psi, \psi; \psi', \psi')$ Push Out si conclude che ψ è epic (vedi Prop. 1.15.).

TEOREMA 2.5. μ è monomorfismo di $\mathcal{C}$ se e solo se $\tilde{\mu}\mu = 1$.

DIM. Sia μ monomorfismo di $\mathcal{C}$, si consideri il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & B & \\
 & A \arrow[u, "\mu"'] & \\
A \arrow[uur, "\mu"] \arrow[ur, Rightarrow, "1"'] & & A \arrow[uul, "\mu"'] \arrow[ul, Rightarrow, "1"]
\end{tikzcd}
$$

è ovviamente commutativo e μ è monomorfismo in $\mathcal{C}$ per ipotesi, allora $(1_A, 1_A) < (\mu, \mu)$, per cui in $\breve{\mathcal{C}}$ $\tilde{\mu}\mu = 1$. Viceversa se μ è una mappa di $\mathcal{C}$ tale che $\tilde{\mu}\mu = 1$, allora $(1, 1) < (\mu, \mu)$, essendo $(1, 1)$ coppia minima, quindi μ è un monomorfismo di $\mathcal{C}$.

TEOREMA 2.6. ε è epic in $\mathcal{C}$ se e solo se $\varepsilon\tilde{\varepsilon} = 1$.

DIM. Sia ε epic in $\mathcal{C}$, si consideri il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & & B & & \\
 & B \arrow[ur, Rightarrow, "1"] & & B \arrow[ul, Rightarrow, "1"'] & \\
B \arrow[ur, Rightarrow, "1"'] & & A \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon"'] & & B \arrow[ul, Rightarrow, "1"]
\end{tikzcd}
$$

essendo ε epic in $\mathcal{C}$ risulta $(\varepsilon, \varepsilon; 1_B, 1_B)$ Push Out (Prop. 1.15.) pertanto $\varepsilon\tilde{\varepsilon} = 1$ in $\breve{\mathcal{C}}$. Viceversa se ε è una mappa di $\mathcal{C}$ tale che $\varepsilon\tilde{\varepsilon} = 1$, allora $(\varepsilon, \varepsilon; 1, 1)$ è Push Out, quindi ε epic in $\mathcal{C}$ (Prop. 1.15).

COROLLARIO. Se μ è monomorfismo in $\mathcal{C}$ allora μ è in $\breve{\mathcal{C}}$ coretrazione, quindi monomorfismo, e $\tilde{\mu}$ retrazione quindi epimorfismo.

Se ε è epic in $\mathcal{C}$ allora ε è in $\breve{\mathcal{C}}$ retrazione quindi epimorfismo, ed $\tilde{\varepsilon}$ coretrazione quindi monomorfismo.

OSSERVAZIONE 2.2. Mentre gli epic di $\mathcal{C}$ si conservano epic in $\breve{\mathcal{C}}$, i monic di $\mathcal{C}$ possono non essere più monic in $\breve{\mathcal{C}}$ come si vede nel seguente esempio:

ESEMPIO. Consideriamo, nella categoria $\mathcal{C}$ degli spazi topologici, $\mu : \boldsymbol{R}_d \to \boldsymbol{R}$, essendo $\boldsymbol{R}_d$ l'insieme dei numeri reali con topologia discreta ed $\boldsymbol{R}$ l'insieme dei numeri reali con la topologia usuale; μ è ovviamente monic ed epic nella categoria $\mathcal{C}$ e non isomorfismo, allora μ

è epimorfismo in $\breve{\mathcal{C}}$ (Teor. 2.5.), se fosse μ monic in $\breve{\mathcal{C}}$ sarebbe (Prop. 1.3.) isomorfismo in $\breve{\mathcal{C}}$ quindi (Teor. 2.3.) isomorfismo in $\mathcal{C}$.

TEOREMA 2.7. φ mappa di $\mathcal{C}$ sia monomorfismo in $\breve{\mathcal{C}}$, allora φ è monomorfismo in $\mathcal{C}$.

DIM. Intanto φ monic in $\breve{\mathcal{C}}$ implica ovviamente φ monic in $\mathcal{C}$ sottocategoria di $\breve{\mathcal{C}}$; consideriamo in $\mathcal{C}$ il seguente quadrato commutativo con ε epic

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
X'' \arrow[r, "\beta"'] & B
\end{tikzcd}$$

Il quadrato è ovviamente commutativo pure in $\breve{\mathcal{C}}$ ed ε è epic in $\breve{\mathcal{C}}$ (anzi retrazione).

Pertanto essendo φ monomorfismo in $\breve{\mathcal{C}}$, esiste una mappa di $\breve{\mathcal{C}}$ $\Pi : X'' \to A$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
X'' \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, "\Pi"] & B
\end{tikzcd}$$

sia commutativo in $\breve{\mathcal{C}}$.

Sia $\Pi = \tilde{\lambda}\varkappa$ con $\varkappa$, λ mappe di $\mathcal{C}$ e $(\lambda, \varkappa)$ coppia minima, allora $\tilde{\lambda}\varkappa\varepsilon = \Pi\varepsilon = \alpha$, $\varphi\tilde{\lambda}\varkappa = \varphi\Pi = \beta$. Dalla prima delle due eguaglianze, essendo entrambe $(\varkappa\varepsilon, \lambda)$ e $(\alpha, 1)$ coppie minime, sia ha che (Prop. 2.4.) esiste un isomorfismo ι tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & A & & \\
 & & Y \arrow[u, "\iota"] & & \\
 & X'' \arrow[ur, "\varkappa"] & & & \\
X \arrow[uuurr, "\alpha"] \arrow[ur, "\varepsilon"] & & & & A \arrow[uull, "\lambda"'] \arrow[uuull, "1"']
\end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Allora λ è isomorfismo per cui (Teor. 2.4.) $\Pi=\tilde{\lambda}\varkappa=\lambda^{-1}\varkappa$ è una mappa di $\mathcal{C}$.

Definizione 2.3. Un quadrato di $\breve{\mathcal{C}}$ [4])

$$\begin{tikzcd} & D & \\ A \arrow[ur, "\Gamma"] & & B \arrow[ul, "\Delta"'] \\ & C \arrow[ul, "\Phi"] \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

si dice completamente commutativo se è commutativo assieme al quadrato seguente:

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dr, "\tilde{\Delta}"] & \\ A \arrow[ur, "\Gamma"] \arrow[dr, "\tilde{\Phi}"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

(Sono allora ovviamente commutativi pure i quadrati

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "\tilde{\Gamma}"'] \arrow[dr, "\tilde{\Delta}"] & \\ A \arrow[dr, "\tilde{\Phi}"'] & & B \arrow[dl, "\tilde{\Psi}"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "\tilde{\Gamma}"'] & \\ A & & B \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[dl, "\tilde{\Psi}"] \\ & C \arrow[ul, "\Phi"] & \end{tikzcd}$$

).

Teorema 2.8. Un quadrato di $\mathcal{C}$ è completamente commutativo in $\breve{\mathcal{C}}$ se e soltanto se è $\vee$-esatto in $\mathcal{C}$.

Dim. Sia $(\varphi, \psi; \rho, \sigma)$ $\vee$-esatto in $\mathcal{C}$ allora è commutativo, quindi pure commutativo in $\breve{\mathcal{C}}$, inoltre se $(\varphi, \psi, \psi', \varphi')$ è Push Out, è monomorfismo la mappa μ che rende commutativo il diagramma:

---

[4]) La definizione di quadrato completamente commutativo può essere data ovviamente in una qualunque categoria dotata di involuzione.

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
 & P \arrow[u, "\mu"] & \\
A \arrow[uur, "\rho"] \arrow[ur, "\psi'"] & & B \arrow[uul, "\sigma"'] \arrow[ul, "\varphi'"'] \\
 & C \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

quindi $\tilde{\sigma}\rho=\tilde{\varphi}'\psi'=\tilde{\psi}\varphi$.

Viceversa se $(\varphi,\ \psi;\ \rho,\ \sigma)$ quadrato di $\mathfrak{C}$ è completamente commutativo in $\breve{\mathfrak{C}}$, allora è commutativo, ed essendo fedele l'immersione di $\mathfrak{C}$ in $\breve{\mathfrak{C}}$, è pure commutativo in $\mathfrak{C}$; inoltre $\tilde{\sigma}\rho=\psi\tilde{\varphi}$, ciò implica che se $(\varphi,\ \psi;\ \psi',\ \varphi')$ è Push Out, $(\psi',\ \varphi')\sim(\rho,\ \sigma)$ ma poichè $(\psi',\ \varphi')$ risulta coppia minima (Prop. 1.21.). $(\psi'\ \varphi')<(\rho,\ \sigma)$ quindi la mappa μ che rende commutativo il diagramma è monomorfismo e allora $(\varphi,\ \psi;\ \rho,\ \sigma)$ è $\vee$-esatto in $\mathfrak{C}$.

Osservazione 2.3. Osserviamo che dato in $\breve{\mathfrak{C}}$ un diagramma del tipo:

$$\begin{tikzcd}
 & F & & \\
C \arrow[ur, "\Sigma"] & & E \arrow[ul, "\Delta"'] & \\
 & B \arrow[ul, "\Psi"] \arrow[ur, "P"'] & & D \arrow[ul, "\Gamma"'] \\
 & & A \arrow[ul, "\Phi"] \arrow[ur, "\Pi"'] &
\end{tikzcd}$$

dove $(\Phi,\ \Pi;\ P,\ \Gamma)$, $(\Psi,\ P;\ \Sigma,\ \Delta)$ sono completamente commutativi, allora ovviamente il quadrato $(\Psi\Phi,\ \Pi;\ \Sigma,\ \Delta\Gamma)$ è completamente commutativo.

Da questo fatto e dalla Prop. 1.25. si ha che la condizione 2.iv) su $\mathfrak{C}$ è necessaria affinchè in $\breve{\mathfrak{C}}$ siano completamente commutativi i quadrati $\vee$-esatti di $\mathfrak{C}$.

Teorema 2.9. Data una categoria $\mathfrak{C}$ che soddisfa le condizioni 2.i), 2.ii), 2.iii), 2.iv), siano $\mathfrak{C}'$ una categoria e « $\overline{}$ »: $\mathfrak{C}' \to \mathfrak{C}'$ un funtore tali che:

1) $\mathfrak{C}'$ e $\mathfrak{C}$ hanno gli stessi oggetti;

2) « $\overline{}$ » è un funtore controvariante, che conserva gli oggetti ed è involutorio sulle mappe;

3) $\mathfrak{C}$ è immersa fedelmente in $\mathfrak{C}'$ e il funtore di immersione $\mathfrak{J} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ conserva gli oggetti;

4) Per ogni morfismo di $\mathfrak{C}'$ $\Phi : A \to B$, esiste almeno un oggetto X ed una coppia di morfismi di $\mathfrak{C}$

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "\varphi"] & & B \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

tali che $\Phi = \overline{\mathfrak{J}(\psi)}\mathfrak{J}(\varphi)$.

5) $\overline{\mathfrak{J}(\psi)}\mathfrak{J}(\varphi) = \overline{\mathfrak{J}(\psi')}\mathfrak{J}(\varphi')$, essendo φ, ψ, φ', ψ' morfismi di $\mathfrak{C}$, se e soltanto se esistono μ, ν monomorfismi di $\mathfrak{C}$ tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & & M & & \\ & X \arrow[ur, "\mu"] & & X' \arrow[ul, "\nu"'] & \\ A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[urrr, "\varphi'"'] & & & & B \arrow[ul, "\psi'"'] \arrow[ulll, "\psi"] \end{tikzcd}$$

sia commutativo.

6) I quadrati di $\mathfrak{C}$ che immersi in $\mathfrak{C}'$ sono completamente commutativi sono tutti e soli i quadrati $\vee$-esatti.

Allora esiste uno ed un solo funtore $S : \breve{\mathfrak{C}} \to \mathfrak{C}'$ tale che $S\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$ ed $S\sim\, = -S$, ed S è isomorfismo di categorie.

Dim. Se esiste un funtore $S : \breve{\mathfrak{C}} \to \mathfrak{C}'$ tale che $S\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$ e $S\sim\, = -S$ allora S è unico infatti se A è un oggetto di $\breve{\mathfrak{C}}$, $S(A) = S\mathfrak{I}(A) = \mathfrak{J}(A) = A$ per la 3) e se $\Gamma : A \to B$ è una mappa di $\breve{\mathfrak{C}}$ esistono φ, ψ mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Gamma = \widetilde{\mathfrak{I}(\psi)} \circ \mathfrak{I}(\varphi)$, per cui

$$S(\Gamma)=S(\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi))=(S\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)})(S\mathfrak{I}(\varphi))=(\overline{S\mathfrak{I}(\psi)})(S\mathfrak{I}(\varphi))=\overline{\mathcal{J}(\psi)}\mathcal{J}(\varphi).$$

Sia dunque $S:\breve{\mathcal{C}}\to\mathcal{C}'$ così definito: $S(A)=A$ per ogni oggetto di $\breve{\mathcal{C}}$ e quindi anche di $\mathcal{C}'$ grazie a 1), $S(\Gamma)=\overline{\mathcal{J}(\psi)}\mathcal{J}(\varphi)$ per ogni mappa $\Gamma:A\to B$ di $\breve{\mathcal{C}}$ essendo φ, ψ due mappe di $\mathcal{C}$ tali che $\Gamma=\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi)$ (vedi Teorema 2.2). Osserviamo che $S(\Gamma)$ dipende solo da Γ grazie alla condizione 5) imposta alla categoria $\mathcal{C}'$; S è un funtore grazie alla 6).

È poi ovvio che $S\mathfrak{I}=\mathcal{J}$ ed $S(\tilde{\Gamma})=\bar{\Gamma}$ per ogni mappa di $\breve{\mathcal{C}}$.

Possiamo poi definire $T:\mathcal{C}'\to\breve{\mathcal{C}}$: $T(A)=A$ per ogni A oggetto di $\mathcal{C}'$ e quindi di $\breve{\mathcal{C}}$ grazie a 1), $T(\Phi)=\widetilde{\mathfrak{I}(\beta)}\mathfrak{I}(\alpha)$ per ogni mappa di $\mathcal{C}'$ $\Phi:A\to B$ essendo grazie alla 4) α, β mappe di $\mathcal{C}$ tali che $\Phi=\overline{\mathcal{J}(\beta)}\mathcal{J}(\alpha)$; si verifica per la 5) che $T(\Phi)$ dipende solo da Φ e non dal modo di rappresentarla, e che T è un funtore dalla 6); si verifica infine che $TS=I_{\breve{\mathcal{C}}}$ e $ST=I_{\mathcal{C}'}$ infatti è ovvio sugli oggetti e:

$$TS(\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi))=T(\overline{\mathcal{J}(\psi)}\mathcal{J}(\varphi))=\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi)$$

$$ST(\overline{\mathcal{J}(\beta)}\mathcal{J}(\alpha))=S(\widetilde{\mathfrak{I}(\beta)}\mathfrak{I}(\alpha))=\overline{\mathcal{J}(\beta)}\mathcal{J}(\alpha)$$

ciò prova che S è un isomorfismo di categorie.

In ipotesi duali di quelle fino ad ora fatte su $\mathcal{C}$ si può ovviamente eseguire un processo di simmetrizzazione duale di quello fin qui descritto, e precisamente:

Sia $\mathcal{C}$ una categoria nella quale supporremo

2.i*) esistenza di fattorizzazione epi-monic per ogni mappa;

2.ii*) esistenza di prodotti diretti finiti;

2.iii*) esistenza di Pull Back $(\sigma', \rho'; \rho, \sigma)$ per ogni coppia di mappe

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

2.iv*) dato

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\varepsilon"'] \\
 & P \arrow[ul, "\varepsilon'"] \arrow[ur, "\rho'"'] &
\end{tikzcd}$$

Pull Back con ε epimorfismo, ε' è epimorfismo.

Osservazione 2.1*. Come visto negli esempi della parte I le ipotesi precedenti sono verificate per la categoria degli insiemi, per una categoria Abeliana qualunque ma non per la categoria degli spazi topologici.

Dati A e B oggetti di $\mathcal{C}$ si considerino le coppie di mappe (φ, ψ) del tipo

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
 & X \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

essendo X un qualunque oggetto di $\mathcal{C}$.

Definiamo fra due tali coppie la relazione di preordine:
$(\psi', \varphi') < (\varphi, \psi)$ se esiste ε epimorfismo tale che commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
 & X \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[ur, "\psi"] & \\
 & X' \arrow[u, "\varepsilon"'] \arrow[uul, "\varphi'"] \arrow[uur, "\psi'"'] &
\end{tikzcd}$$

La relazione simmetrizzata della relazione data: $(\varphi_1, \psi_1) \sim (\varphi_2, \psi_2)$ se esistono ε_1, ε_2 epimorfismi tali che commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A & & & B \\
 & X_1 \arrow[ul, "\varphi_1"] \arrow[urr, "\psi_1"] & X_2 \arrow[ull, "\varphi_2"'] \arrow[ur, "\psi_2"'] & \\
 & & E \arrow[ul, "\varepsilon_1"] \arrow[u, "\varepsilon_2"'] &
\end{tikzcd}$$

è una relazione di equivalenza.

Notiamo $\varphi/\psi : A \to B$ la classe di equivalenza della coppia (φ, ψ).

La classe di equivalenza φ/ψ contiene una coppia (φ_0, ψ_0) massima relativamente al preordine, caratterizzata dall'essere $\{\varphi_0, \psi_0\}$ monic

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\
 & X \arrow[ul, "\varphi_0"] \arrow[u, "\{\varphi_0,\psi_0\}"'] \arrow[ur, "\psi_0"'] &
\end{tikzcd}$$

ed univocamente individuata a meno di isomorfismi. (Prop. 2.1*., 2.2*., 2.3*., 2.4*., 2.5*.).

Siano ora $\varphi/\psi : A \to B$, $\varkappa/\lambda : B \to C$ consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A & & B & & C \\
 & X \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & & Y \arrow[ul, "\varkappa"] \arrow[ur, "\lambda"'] & \\
 & & Z \arrow[ul, "\varkappa'"] \arrow[ur, "\psi'"'] & &
\end{tikzcd}$$

dove $(\varkappa', \psi'; \psi, \varkappa)$ è Pull Back, grazie all'ipotesi 1.ii*) $\varphi\varkappa'/\lambda\psi'$ dipende solo da φ/ψ e $\varkappa/\lambda$ non dai particolari rappresentanti delle classi (Prop. 2.6*).

DEFINIZIONE 2.2*. Dati $\varphi/\psi : A \to B$, $\varkappa/\lambda : B \to C$ definiamo $\varkappa/\lambda \circ \varphi/\psi : A \to C$ nel modo seguente $\varkappa/\lambda \circ \varphi/\psi = \varphi\varkappa'/\lambda\psi'$ essendo $(\varkappa', \psi'; \psi, \varkappa)$ Pull Back.

TEOREMA 2.1*. Esiste una categoria $\widehat{\mathcal{C}}$ tale che $Ob\widehat{\mathcal{C}} = Ob\mathcal{C}$, $\mathrm{Map}_{\widehat{\mathcal{C}}}(A, B)$ è l'insieme delle classi di equivalenza del tipo φ/ψ, la legge di composizione di mappe consecutive è data dalla Def. 1.2*., mappa identica di A in $\widehat{\mathcal{C}}$ è la classe $1_A/1_A$.

TEOREMA 2.2*.

a) $\mathcal{C}$ è immersa fedelmente in $\widehat{\mathcal{C}}$ dal funtore $\mathfrak{I} : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ definito: $\mathfrak{I}(A) = A$ per ogni oggetto A di $\mathcal{C}$, $\mathfrak{I}(\varphi) = 1/\varphi$ per ogni mappa φ di $\mathcal{C}$; possiamo così identificare le mappe di $\mathcal{C}$ con le corrispondenti in $\widehat{\mathcal{C}}$, e considerare $\mathcal{C}$ come sottocategoria di $\widehat{\mathcal{C}}$.

b) $\hat{\mathcal{C}}$ è dotata di un'antivoluzione « $\sim$ » data per ogni mappa $\Gamma=\varphi/\psi$ di $\hat{\mathcal{C}}$ da $\tilde{\Gamma}=\psi/\varphi$, diremo $\tilde{\Gamma}$ reciproca di Γ.

c) Se φ e ψ sono mappe di $\mathcal{C}$ aventi lo stesso codominio allora $\varphi/\psi=\mathfrak{I}(\psi)\widetilde{\mathfrak{I}(\varphi)}=\psi\tilde{\varphi}$.

Teorema 2.3*. Se φ è isomorfismo di $\mathcal{C}$ allora $\tilde{\varphi}=\varphi^{-1}$.

Teorema 2.4*. In $\hat{\mathcal{C}}$ non ci sono altri isomorfismi che quelli di $\mathcal{C}$.

Teorema 2.5*. ε è epimorfismo di $\mathcal{C}$ se e solo se $\tilde{\varepsilon}\varepsilon=1$.

Teorema 2.6*. μ è monic in $\mathcal{C}$ se e solo se $\tilde{\mu}\mu=1$.

Corollario. Se ε è epimorfismo in $\mathcal{C}$, allora ε è in $\hat{\mathcal{C}}$ retrazione, quindi epimorfismo, ed $\tilde{\varepsilon}$ coretrazione quindi monomorfismo.

Se μ è monic in $\mathcal{C}$, allora μ è in $\hat{\mathcal{C}}$ coretrazione quindi monomorfismo, e $\tilde{\mu}$ retrazione quindi epimorfismo.

Teorema 2.7*. φ mappa di $\mathcal{C}$ sia epimorfismo in $\hat{\mathcal{C}}$, allora φ è epimorfismo in $\mathcal{C}$.

Teorema 2.8*. Un quadrato di $\mathcal{C}$ è completamente commutativo in $\hat{\mathcal{C}}$ se e soltanto se è $\wedge$-esatto in $\mathcal{C}$.

Teorema 2.9*. Data una categoria $\mathcal{C}$ che soddisfa le condizioni 2.i*), 2.ii*), 2.iii*), 2.iv*), siano $\mathcal{C}'$ una categoria e « $\overline{}$ » : $\mathcal{C}'\to\mathcal{C}'$ un funtore tali che:

1) $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}$ hanno gli stessi oggetti.

2) « $\overline{}$ » è un funtore controvariante che conserva gli oggetti ed è involutorio sulle mappe.

3) $\mathcal{C}$ è immersa fedelmente in $\mathcal{C}'$ e il funtore di immersione $\mathfrak{J}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ conserva gli oggetti.

4) Per ogni morfismo di $\mathcal{C}'$, $\Phi: A\to B$ esiste almeno un oggetto X ed una coppia di morfismi di $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & X \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

tali che $\Phi=\mathfrak{J}(\psi)\overline{\mathfrak{J}(\varphi)}$.

5) $\mathfrak{J}(\psi)\overline{\mathfrak{J}(\varphi)}=\mathfrak{J}(\psi')\overline{\mathfrak{J}(\varphi')}$, essendo φ, ψ, φ', ψ' morfismi di $\mathfrak{C}$, se e soltanto se esistono ε, η epimorfismi di $\mathfrak{C}$ tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A & & & B \\
& X \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[urr, "\psi"' near start] & X' \arrow[ull, "\varphi'" near start] \arrow[ur, "\psi'"'] & \\
& & E \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[u, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

sia commutativo.

6) I quadrati di $\mathfrak{C}$ che immersi in $\mathfrak{C}'$ sono completamente commutativi sono tutti e soli i quadrati $\wedge$-esatti.

Allora esiste uno ed un solo funtore $S:\widehat{\mathfrak{C}}\to\mathfrak{C}'$ tale che $S\mathfrak{J}=\mathcal{J}$ ed $S\sim=-S$, ed S è isomorfismo di categorie.

Teorema 2.10. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria soddisfacente le condizioni 2.i), 2.ii), 2.iii), 2.iv) allora la categoria opposta (duale) di $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}^0$ soddisfa ovviamente le condizioni 2.i*), 2.ii*), 2.iii*), 2.iv*) e $\widehat{\mathfrak{C}^0}=\check{\mathfrak{C}}$.

Dim. Si osservi che $\widehat{\mathfrak{C}^0}$ e $\sim:\widehat{\mathfrak{C}^0}\to\widehat{\mathfrak{C}^0}$ soddisfano, grazie alle ovvie proprietà della categoria opposta, le ipotesi del Teorema 2.9. dove si consideri quale funtore di immersione $\mathcal{J}:\mathfrak{C}\to\widehat{\mathfrak{C}^0}$ il seguente

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\circ"] \arrow[rrr, bend right, "J"'] & \mathfrak{C}^0 \arrow[r, "\mathfrak{J}"] & \widehat{\mathfrak{C}^0} \arrow[r, "\sim"] & \widehat{\mathfrak{C}^0}
\end{tikzcd}$$

Esempi.

Categoria degli insiemi.

Sia $\mathfrak{S}$ la categoria degli insiemi, come visto negli esempi della parte I la categoria soddisfa tanto le condizioni 2.i), 2.ii), 2.iii), 2.iv) quanto le condizioni 2.i*), 2.ii*), 2.iii*), 2.iv*). Entrambi i procedimenti di simmetrizzazione descritti in questo capitolo possono allora essere eseguiti su tale categoria.

$\widehat{\mathfrak{S}}$, *categoria delle corrispondenze.*

$\widehat{\mathfrak{S}}$ risulta l'usuale categoria delle corrispondenze fra insiemi, come si vede facilmente dal fatto che dati A e B insiemi, ogni mappa

$\Gamma : A \to B$ di $\widehat{\mathcal{S}}$ è caratterizzata da una coppia di applicazioni (φ_0, ψ_0)

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \\
& X \arrow[ul, "\varphi_0"] \arrow[u, "\{\varphi_0, \psi_0\}"] \arrow[ur, "\psi_0"'] &
\end{tikzcd}$$

tale che $\{\varphi_0, \psi_0\}$ è inettiva (coppia massima), quindi da un sottoinsieme di $A \times B$.

Si vede poi facilmente dalla caratterizzazione del Pull Back nella categoria degli insiemi, che la composizione di mappe di $\widehat{\mathcal{S}}$ coincide con la composizione usuale di corrispondenze.

$\check{\mathcal{S}}$ *categoria dei trasduttori.*

Diremo $\check{\mathcal{S}}$ categoria dei trasduttori, è chiaro che dati A e B insiemi ogni mappa $\Gamma : A \to B$ di $\check{\mathcal{S}}$ è caratterizzata da una coppia di applicazioni (φ_0, ψ_0)

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
A \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[r, "\iota_A"'] & A+B \arrow[u, "\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle"] & B \arrow[ul, "\psi_0"'] \arrow[l, "\iota_B"]
\end{tikzcd}$$

tale che $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle$è suriettiva (coppia minima), quindi da una ripartizione dell'insieme $A+B$; diremo trasduttori le mappe di $\check{\mathcal{S}}$.

È suggestiva la seguente interpretazione: pensiamo gli insiemi (finiti) come insiemi di terminali di una morsettiera; le classi della ripartizione di $A+B$ che individua un trasduttore $\Gamma : A \to B$, come le classi di terminali fra loro cortocircuitati.

Il trasduttore composto di due dati $\Gamma : A \to B$, $\Delta : B \to C$ è, in questa interpretazione, caratterizzato dalle classi di terminali di $A+C$ cortocircuitati anche attraverso B.

Proveremo nel seguito che le categorie $\widehat{\mathcal{S}}$, $\check{\mathcal{S}}$ sono diverse essenzialmente.

Categoria degli spazi topologici.

Sia $\mathcal{T}$ la categoria degli spazi topologici, come visto negli esempi della parte I, tale categoria soddisfa le condizioni 2.i), 2.ii), 2.iii), 2.iv) e non le 2.i*), 2.ii*), 2.iii*), 2.iv*) è allora possibile eseguire sulla categoria degli spazi topologici solo il primo dei due procedimenti di simmetrizzazione descritti in questo capitolo, ottenendo la categoria $\breve{\mathcal{T}}$.

Categorie Abeliane.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria abeliana, come visto negli esempi della parte I, sono soddisfatte tanto le condizioni 2.i), 2.ii), 2.iii), 2.iv) quanto le condizioni 2.i*), 2.ii*), 2.iii*), 2,iv*).

Eseguendo i due procedimenti di simmetrizzazione descritti in questo capitolo si ottengono le categorie $\tilde{\mathcal{C}}$, $\breve{\mathcal{C}}$ le quali sono isomorfe (vedi [4]).

Studiamo ora l'esistenza di fattorizzazioni nelle categorie costruite con i procedimenti descritti in questa seconda parte.

Sia $\mathcal{C}$ una categoria soddisfacente le condizioni 2.i), 2.ii), 2.iii), 2.iv).

DEFINIZIONE 2.3. Diremo che una mappa $\Gamma : A \to B$ di $\breve{\mathcal{C}}$ ammette fattorizzazione in quattro, epic-mono-mono-epic, se esistono quattro mappe di $\mathcal{C}$, μ, ν monomorfismi, ε, η epic tali che sia $\Gamma = \tilde{\eta}\nu\tilde{\mu}\varepsilon$.

PROPOSIZIONE 2.7. Se $\Gamma : A \to B$ mappa di $\breve{\mathcal{C}}$ ammette fattorizzazione in quattro, allora ammette anche fattorizzazione epic-mono.

DIM. Se Γ ammette fattorizzazione in quattro, esistono μ, ν monomorfismi di $\mathcal{C}$, ε, η epic di $\mathcal{C}$ tali che $\Gamma = \tilde{\eta}\nu\tilde{\mu}\varepsilon = (\tilde{\eta}\nu)(\tilde{\mu}\nu)$ e per i teoremi 2.5., 2.6. sono $\tilde{\eta}\nu$ monomorfismo di $\breve{\mathcal{C}}$, $\tilde{\mu}\varepsilon$ epic in $\breve{\mathcal{C}}$.

PROPOSIZIONE 2.8. Se $\Gamma : A \to B$ mappa di $\breve{\mathcal{C}}$ ammette fattorizzazione in quattro, allora la fattorizzazione è univocamente individuata a meno di isomorfismi.

Dim. Sia $\tilde{\eta}\nu\tilde{\mu}\varepsilon = \Gamma = \tilde{\eta}'\nu'\tilde{\mu}'\varepsilon'$ con μ, ν, μ', ν' monomorfismi di $\mathcal{C}$ ed ε, η, ε', η' epic di $\mathcal{C}$, allora esiste una ed una sola traslazione

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon'"] & X'_1 \arrow[r, "\tilde{\mu}'"] & X'_2 \arrow[r, "\nu'"] & X'_3 \arrow[r, "\tilde{\eta}'"] & B \\ A \arrow[u, equal] \arrow[r, "\varepsilon"'] & X_1 \arrow[u, "\iota_1"'] \arrow[r, "\tilde{\mu}"'] & X_2 \arrow[u, "\iota_2"'] \arrow[r, "\nu"'] & X_3 \arrow[u, "\iota_3"'] \arrow[r, "\tilde{\eta}"'] & B \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

tra le due sequenze che subordini l'identità su A e su B, e tale traslazione è isomorfismo.

Infatti per quanto visto nella Prop. 2.7. e per l'unicità della fattorizzazione epic-mono in ogni categoria (Prop. 1.5.) esiste una unica mappa $\iota_2 : X_2 \to X'_2$ tale che $\iota_2\tilde{\mu}\varepsilon = \tilde{\mu}'\varepsilon'$ e $\tilde{\eta}'\nu'\iota_2 = \tilde{\eta}\nu$ e tale mappa è isomorfismo di $\breve{\mathcal{C}}$, quindi per il Teorema 2.4 isomorfismo di $\mathcal{C}$.

Dalla relazione $\iota_2\tilde{\mu}\varepsilon = \tilde{\mu}'\varepsilon'$ segue grazie al Teorema 2.3. essendo ι_2 isomorfismo $\tilde{\mu}\varepsilon = \tilde{\iota}_2\tilde{\mu}'\varepsilon' = \widetilde{(\mu'\iota_2)}\varepsilon'$ ma allora poichè tanto (ε, μ) quanto $(\varepsilon', \mu\iota_2)$ sono coppie minime (Coroll. Prop. 2.2) di una stessa mappa di $\breve{\mathcal{C}}$ esiste per Prop. 2.4. una unica mappa di $\mathcal{C}$ $\iota_1 : X_1 \to X'_1$ tale che $\iota_1\varepsilon = \varepsilon'$ e $\iota_1\mu = \mu'\iota_2$, ed è ι_1 isomorfismo; l'eguaglianza $\iota_1\mu = \mu'\iota_2$ è poi equivalente, essendo ι_1, ι_2 isomorfismi, alla $\mu\tilde{\iota}_2 = \tilde{\iota}_1\mu'$ e passando ai reciproci ancora equivalente a $\iota_2\tilde{\mu} = \tilde{\mu}'\iota_1$.

Inoltre poichè $\tilde{\eta}'\nu'\iota_2 = \tilde{\eta}\nu$, e tanto $(\nu'\iota_2, \eta')$ quanto (ν, η) sono coppie minime (Coroll. Prop. 2.2.) di una stessa mappa di $\mathcal{C}$, esiste (Prop. 2.4.) una unica mappa di $\mathcal{C}$ $\iota_3 : X_3 \to X_3'$ tale che $\iota_3\nu = \nu'\iota_2$ e $\iota_3\eta = \eta'$, ed è ι_3 isomorfismo; l'eguaglianza $\iota_3\eta = \eta'$ è poi equivalente alla $\eta = \tilde{\iota}_3\eta'$ essendo ι_3 isomorfismo, e passando ai reciproci ancora equivalente a $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}'\iota_3$.

Proposizione 2.9. Se una mappa di $\breve{\mathcal{C}}$ $\Gamma : A \to B$ ammette fattorizzazione in quattro, allora $\Gamma\Gamma\Gamma = \Gamma$.

Dim. Sia $\Gamma = \tilde{\eta}\nu\tilde{\mu}\varepsilon$ con μ, ν monomorfismi ed ε, η epic in $\mathcal{C}$, tenendo conto che $\eta\tilde{\eta} = 1$, $\varepsilon\tilde{\varepsilon} = 1$, $\tilde{\mu}\mu = 1$, $\tilde{\nu}\nu = 1$, risulta:

$$\Gamma\tilde{\Gamma}\Gamma=(\tilde{\eta}\nu\tilde{\mu}\varepsilon)(\tilde{\varepsilon}\mu\tilde{\nu}\eta)(\tilde{\eta}\nu\tilde{\mu}\varepsilon)=\tilde{\eta}\nu\tilde{\mu}(\varepsilon\tilde{\varepsilon})\mu\tilde{\nu}(\eta\tilde{\eta})\nu\tilde{\mu}\varepsilon=$$

$$=\tilde{\eta}\nu(\tilde{\mu}\mu)(\tilde{\nu}\nu)\tilde{\mu}\varepsilon=\tilde{\eta}\nu\tilde{\mu}\varepsilon=\Gamma.$$

Se facciamo l'ipotesi che ogni mappa di $\breve{\mathcal{C}}$ ammetta fattorizzazione in quattro si hanno allora grazie alla Prop. 2.9, le seguenti caratterizzazioni

PROPOSIZIONE. 2.10. Γ è monic in $\breve{\mathcal{C}}$ se e solo se $\tilde{\Gamma}\Gamma=1$, quindi è coretrazione, quindi monomorfismo.

PROPOSIZIONE 2.11. Γ è monomorfismo di $\breve{\mathcal{C}}$ se e solo se se esistono μ monomorfismo di $\mathcal{C}$, ε epic in C tali che $\Gamma=\tilde{\varepsilon}\mu$.

DIM. La proposizione segue immediatamente dalla Prop. 2.10 e dal ragionamento fatto al punto *b*) della dimostrazione del Teor. 2.4.

PROPOSIZIONE 2.12. Γ è epic in $\breve{\mathcal{C}}$ se e solo se $\Gamma\tilde{\Gamma}=1$ quindi retrazione, quindi epimorfismo.

PROPOSIZIONE 2.13. Γ è epimorfismo di $\breve{\mathcal{C}}$ se e solo se esistono μ monomorfismo di $\mathcal{C}$, ε epic in $\mathcal{C}$ tali che $\Gamma=\tilde{\mu}\varepsilon$.

DIM. La proposizione segue immediatamente dalla Prop. 2.12 e dal ragionamento fatto al punto *b*) della dimostrazione del Teor. 2.4.

Ha interesse allora studiare sotto quali condizioni su $\mathcal{C}$, qualunque mappa Γ di $\breve{\mathcal{C}}$ risulta fattorizzabile in quattro.

TEOREMA 2.11. Condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni mappa di $\mathcal{C}$ ammetta fattorizzazione in quattro epic-mono-mono-epic è che:
comunque data una coppia ρ, σ di monomorfismi di $\mathcal{C}$ del tipo

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "\rho"] & & B \arrow[ul, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

esista una coppia μ, ν di monomorfismi di $\mathcal{C}$ del tipo

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & Y \arrow[ul, "\mu"] \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

tale che il quadrato $(\mu, \nu; \rho, \sigma)$ sia $\vee$-esatto.

Dim. Supponiamo che qualunque mappa Γ di $\breve{\mathcal{C}}$ ammetta fattorizzazione in quattro epic-$\widetilde{\text{mono}}$-mono-$\widetilde{\text{epic}}$, consideriamo una mappa $\Gamma=\sigma\rho$ con ρ e σ monomorfismi, per l'ipotesi fatta esistono μ, ν monomorfismi di $\mathcal{C}$, ε, η epic di $\mathcal{C}$ tali che valga l'eguaglianza $\tilde{\sigma}\rho=\tilde{\eta}\hat{\nu}\tilde{\mu}\varepsilon$ quindi esistono ι, j monomorfismi tali che commuti il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d, "j"] & & \\
 & & M & & \\
 & & P \arrow[u, "\iota"'] & & \\
 & X_1 \arrow[ur, "\nu'"] & & X_3 \arrow[ul, "\mu'"'] & \\
A \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[uuuurr, "\rho"] & & X_2 \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[ur, "\nu"] & & B \arrow[ul, "\eta"'] \arrow[uuuull, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

essendo $(\mu, \nu; \nu', \mu')$ Push Out.

Poichè allora $\iota\nu'\varepsilon=j\rho$ monomorfismo e $\iota\mu'\eta=j\sigma$ monomorfismo, devono essere (Prop. 1.2) ε ed η monomorfismi quindi, essendo anche epic, isomorfismi (Prop. 1.3).

Allora $\tilde{\sigma}\rho=\tilde{\eta}\nu\tilde{\mu}\varepsilon=(\eta^{-1}\nu)\widetilde{(\varepsilon^{-1}\mu)}$ per cui posto $\alpha=\eta^{-1}\nu$, $\beta=\varepsilon^{-1}\mu$ si ha $\tilde{\sigma}\rho=\alpha\tilde{\beta}$ ed α e β sono monomorfismi di $\mathcal{C}$.

Allora se $(\alpha, \beta; \beta', \alpha')$ è Push Out si ha $\tilde{\sigma}\rho=\beta\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}'\beta'$, ma per le Prop. 1.21, 2.2 risulta (β', α') coppia minima, per cui esiste un monomorfismo ξ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & Q \arrow[u, "\xi"] & \\
A \arrow[uur, "\rho"] \arrow[ur, "\beta'"'] & & B \arrow[uul, "\sigma"'] \arrow[ul, "\alpha'"] \\
 & X_2 \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Il quadrato $(\alpha, \beta; \rho, \sigma)$ è allora $\vee$-esatto.

È poi ovvio che la condizione data è sufficiente ad assicurare la fattorizzazione in quattro di ogni mappa di $\breve{\mathcal{C}}$.

Sia Γ una mappa di $\breve{\mathcal{C}}$, esistono φ, ψ mappe di $\mathcal{C}$ tali che $\Gamma=\tilde{\psi}\varphi$; se $\varphi=\rho\varepsilon$, $\psi=\sigma\eta$ sono fattorizzazioni epic-mono di φ, ψ allora si ha $\Gamma=(\widetilde{\sigma\eta})(\rho\varepsilon)=\tilde{\eta}\tilde{\sigma}\rho\varepsilon$. Poichè la condizione data assicura l'esistenza di μ, ν monomorfismi tali che $\tilde{\sigma}\rho=\nu\tilde{\mu}$ si conclude $\Gamma=\tilde{\eta}\nu\mu\varepsilon$.

Corollario. Se $\mathcal{C}$ è categoria dotata di Pull Back, allora la condizione necessaria è sufficiente di fattorizzabilità in epic-mono-mono-epi si esprime semplicemente così: ogni Pull Back di monomorfismi è $\vee$-esatto.

(La dimostrazione di ciò è ovvia conseguenza della Prop. 1.16).

Enunciamo i risultati duali di quelli ora dimostrati: Sia $\mathcal{C}$ una categoria soddisfacente le condizioni 2.i*), 2.ii*), 2.iii*), 2.iv*).

Definizione 2.3*. Diremo che una mappa $\Gamma : A \to B$ di $\widehat{\mathcal{C}}$ ammette fattorizzazione in quattro monic-epi-epi-monic se esistono quattro mappe di $\mathcal{C}$, μ, ν monic, ε, η epimorfismi tali che sia $\Gamma=\nu\tilde{\eta}\varepsilon\tilde{\mu}$.

Proposizione 2.7*. Se $\Gamma : A \to B$ mappa di $\widehat{\mathcal{C}}$ ammette fattorizzazione in quattro, allora ha anche fattorizzazione epi-monic.

Proposizione 2.8*. Se $\Gamma : A \to B$ mappa di $\widehat{\mathcal{C}}$ ammette fattorizzazione in quattro, allora la fattorizzazione è univocamente individuata a meno di isomorfismi.

Proposizione 2.9*. Se $\Gamma : A \to B$ mappa di $\widehat{\mathcal{C}}$ ammette fattorizzazione in quattro, allora $\Gamma\tilde{\Gamma}\Gamma = \Gamma$.

Nell'ipotesi che ogni mappa di $\widehat{\mathcal{C}}$ ammetta fattorizzazione in quattro, si hanno grazie alla Prop. 2.9* le seguenti caratterizzazioni:

Proposizione 2.10*. Γ è epic in $\widehat{\mathcal{C}}$ se e solo se $\Gamma\tilde{\Gamma} = 1$ quindi è retrazione, quindi epimorfismo.

Proposizione 2.11*. Γ è epimorfismo di $\widehat{\mathcal{C}}$ se e solo se esistono ε epimorfismo di $\mathcal{C}$, μ monic in $\mathcal{C}$ tali che $\Gamma = \varepsilon\tilde{\mu}$.

Proposizione 2.12*. Γ è monic in $\widehat{\mathcal{C}}$ se e solo se $\tilde{\Gamma}\Gamma = 1$, quindi è coretrazione, quindi monomorfismo.

Proposizione 2.13*. Γ è monomorfismo di $\widehat{\mathcal{C}}$ se e solo se esistono ε epimorfismo di $\mathcal{C}$, μ monic in C tali che $\Gamma = \mu\tilde{\varepsilon}$.

Il Teorema seguente da una condizione su $\mathcal{C}$ affinchè qualunque mappa Γ di $\widehat{\mathcal{C}}$ risulti fattorizzabile in quattro.

Teorema 2.10*. Condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni mappa di $\widehat{\mathcal{C}}$ ammetta fattorizzazione in quattro monic-epi-epi-monic è che:
comunque data una coppia ρ, σ di epimorfismi di $\mathcal{C}$, del tipo

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & X \arrow[ul, "\rho"] \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

esista una coppia ε, η di epimorfismi di $\mathcal{C}$ del tipo

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ A \arrow[ur, "\varepsilon"] & & B \arrow[ul, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

tale che il quadrato $(\rho, \sigma; \varepsilon, \eta)$ sia $\wedge$-esatto.

COROLLARIO. Se $\mathcal{C}$ è categoria dotata di Push Out allora la condizione necessaria e sufficiente di fattorizzabilità in monic-epi-epi-monic si esprime semplicemente così: ogni Push-Out di epimorfismi è $\wedge$-esatto.

Esempi.

Categoria degli insiemi. $\mathcal{S}$.

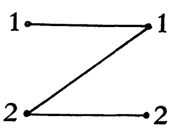
Nella categoria degli insiemi, mentre ogni Pull Back di monomorfismi è $\vee$-esatto, come si verifica immediatamente dalla caratterizzazione del Pull Back nella categoria, non ogni Push Out di epimorfismi e $\wedge$-esatto come mostrato in un esempio della parte I (Esempio di quadrato $\vee$-esatto anzi Push-Out e non $\wedge$-esatto).

Si deduce allora dai Teoremi 2.10, 2.10* che:

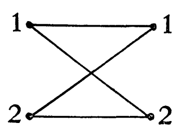
— *la categoria dei traduttori* $\breve{\mathcal{S}}$ è tale che ogni mappa ammette fattorizzazione in quattro, allora qualunque sia Γ trasduttore $\Gamma\tilde{\Gamma}\Gamma=\Gamma$ con le conseguenze mostrate nelle Prop. 2.10 ... 2.13.

— *la categoria delle corrispondenze* $\widehat{\mathcal{S}}$ è tale che non ogni mappa ammette fattorizzazione in quattro; notiamo che non per ogni corrispondenza vale la proprietà $\Gamma\tilde{\Gamma}\Gamma=\Gamma$ come si vede nell'esempio seguente:

consideriamo la corrispondenza $Z:\{1,\ 2\}\to\{1,\ 2\}$ individuata da $\{(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)\}$ che rappresenteremo:



vale ovviamente la seguente $ZZZ=\mathbb{X}$ dove $\mathbb{X}:\{1,\ 2\}\to\{1,\ 2\}$ è la corrispondenza totale individuata da $\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)\}$



ed ovviamente $Z\neq\mathbb{X}$.

Non potremo quindi applicare alla categoria delle corrispondenze i risultati delle Prop. 2.10* ... 2.13* che risultano anzi non vere, come si vede in opportuni esempi.

La corrispondenza Z sopra descritta costituisce inoltre un esempio di corrispondenza che non ammette fattorizzazione epi-monic come si vede con facili considerazioni.

Categoria degli Spazi Topologici.

Nella categoria degli spazi topologici $\mathcal{T}$ non ogni Pull Back di monomorfismi è $\vee$-esatto infatti siano A_1, A_2 sottospazi di uno spazio topologico A, è ovvio che il quadrato di monomorfismi

$$\begin{tikzcd} & A_1 \cup A_2 & \\ A_1 \arrow[ur] & & A_2 \arrow[ul] \\ & A_1 \cap A_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

è Pull Back. Dalla caratterizzazione del Push Out nella categoria degli spazi topologici si ha poi che il quadrato:

$$\begin{tikzcd} & P & \\ A_1 \arrow[ur] & & A_2 \arrow[ul] \\ & A_1 \cap A_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

dove P è l'incollamento di A_1 e A_2 è Push Out.

È ben noto che insiemisticamente P coincide con $A_1 \cup A_2$, ma è dotato in generale di una topologia più fine; si possono allora fare facilmente esempi in cui la mappa canonica $P \to A_1 \cup A_2$ non è monomorfismo.

Per quanto detto, allora non tutte le mappe di $\breve{\mathcal{T}}$ ammettono fattorizzazione in quattro; non valgono così per $\breve{\mathcal{T}}$ le Prop. 2.10 ... 2.13.

Categorie Abeliane.

In $\mathcal{C}$ categoria Abeliana tanto ogni Pull Back di monomorfismi è $\vee$-esatto, quanto ogni Push Out di epimorfismi è $\wedge$-esatto, valgono pertanto in $\breve{\mathcal{C}}$ e in $\overset{\frown}{\mathcal{C}}$ le proprietà provate nelle Prop. 2.10 ... 2.13, come mostrato in [4].

Abbiamo visto due esempi di Categorie verificanti sia le condizioni 2.i), 2.ii), 2.iii), 2.iv) che le 2.i*), 2.ii*), 2.iii*), 2,iv*): la categoria degli insiemi $\mathfrak{S}$ e una qualunque categoria Abeliana $\mathfrak{C}$. Abbiamo mostrato, rilevando che hanno fattorizzazioni le mappe di $\check{\mathfrak{S}}$, ma non le mappe di $\widehat{\mathfrak{S}}$, che $\check{\mathfrak{S}} \neq \widehat{\mathfrak{S}}$ mentre $\check{\mathfrak{C}} = \widehat{\mathfrak{C}}$ se $\mathfrak{C}$ è una categoria abeliana (vedi [4]).

Sia data una categoria $\mathfrak{C}$ che verifica sia le condizioni 2.i), 2.ii), 2.iii), 2.iv) che le 2.i*), 2.ii*), 2.iii*), 2.iv*) si pone ora il problema di vedere sotto quali ulteriori condizioni su $\mathfrak{C}$, risulta $\check{\mathfrak{C}} = \widehat{\mathfrak{C}}$; si perviene al risultato seguente:

Teorema 2.12. Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $\widehat{\mathfrak{C}}$ isomorfa a $\check{\mathfrak{C}}$ è che ogni Pull Back di $\mathfrak{C}$ sia $\vee$-esatto e ogni Push Out di $\mathfrak{C}$ sia $\wedge$-esatto.

Dim. Sia $\check{\mathfrak{C}} = \widehat{\mathfrak{C}}$ ovvero esistano $S : \check{\mathfrak{C}} \to \widehat{\mathfrak{C}}$, $T : \widehat{\mathfrak{C}} \to \check{\mathfrak{C}}$ funtori covarianti tali che dette $\mathfrak{I} : \mathfrak{C} \to \check{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{J} : \mathfrak{C} \to \widehat{\mathfrak{C}}$ le immersioni e $\sim : \check{\mathfrak{C}} \to \check{\mathfrak{C}}$, $- : \widehat{\mathfrak{C}} \to \widehat{\mathfrak{C}}$ le antiinvoluzioni, sia:

$$TS = I_{\check{\mathfrak{C}}} \quad ST = I_{\widehat{\mathfrak{C}}} \quad S\mathfrak{I} = \mathfrak{J} \quad T\mathfrak{J} = \mathfrak{I} \quad S\sim\, = -S \quad T- = \sim S.$$

Consideriamo allora un morfismo $\Gamma : A \to B$ della categoria $\check{\mathfrak{C}}$, esistono φ, ψ mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Gamma = \widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi)$ deve essere:

$$S(\Gamma) = S(\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi)) = S(\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)})S(\mathfrak{I}(\varphi)) = \overline{S\mathfrak{I}(\psi)}S\mathfrak{I}(\varphi) =$$
$$= \overline{\mathfrak{J}(\psi)}\mathfrak{J}(\varphi) = \mathfrak{J}(\varphi')\overline{\mathfrak{J}(\psi')}$$

se $(\psi', \varphi'; \varphi, \psi)$ è Pull Back

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, "\varphi"] & & B \arrow[ul, "\psi"'] \\
 & P \arrow[ul, "\psi'"] \arrow[ur, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Analogamente dato un morfismo $\Phi : A \to B$ della categoria $\hat{\mathfrak{C}}$ esistono ρ, σ mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Phi = \mathfrak{J}(\sigma)\overline{\mathfrak{J}(\rho)}$ e deve essere, se

$$
\begin{tikzcd}
& Q & \\
A \arrow[ur, "\sigma'"] & & B \arrow[ul, "\rho'"'] \\
& Y \arrow[ul, "\rho"] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}
$$

è Push Out, $T(\Phi) = T(\mathfrak{J}(\sigma)\overline{\mathfrak{J}(\rho)}) = \widetilde{\mathfrak{I}(\rho')}\mathfrak{I}(\sigma')$.

Questo prova l'unicità della coppia di funtori S, T che soddisfano le condizioni richieste.

Consideriamo ora un diagramma commutativo del tipo:

$$
\begin{tikzcd}
& X & \\
& Q \arrow[u, "\mu"] & \\
A \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, "\alpha''"'] & & B \arrow[uul, "\beta"'] \arrow[ul, "\beta''"] \\
& P \arrow[ul, "\beta'"] \arrow[ur, "\alpha'"'] &
\end{tikzcd}
$$

dove $(\beta', \alpha'; \alpha, \beta)$ è Pull Back e $(\beta', \alpha'; \alpha'', \beta'')$ è Push Out, si ha

$$T(\overline{\mathfrak{J}(\beta)}\mathfrak{J}(\alpha)) = T(\mathfrak{J}(\alpha')\overline{\mathfrak{J}(\beta')}) = \widetilde{\mathfrak{I}(\beta'')}\mathfrak{I}(\alpha'')$$

per quanto visto sopra, tenendo conto che $\mathfrak{J}(\beta)\mathfrak{J}(\alpha) = \mathfrak{J}(\alpha')\mathfrak{J}(\beta')$ poichè $(\beta', \alpha'; \alpha, \beta)$ è Pull Back (Def. 2.2*); inoltre

$$T(\overline{\mathfrak{J}(\beta)}\mathfrak{J}(\alpha)) = T(\overline{\mathfrak{J}(\beta)})T(\mathfrak{J}(\alpha)) = \widetilde{T\mathfrak{J}(\beta)}T\mathfrak{J}(\alpha) = \widetilde{\mathfrak{I}(\beta)}\mathfrak{I}(\alpha)$$

allora $\widetilde{\mathfrak{I}(\beta'')}\mathfrak{I}(\alpha'') = \widetilde{\mathfrak{I}(\beta)}\mathfrak{I}(\alpha)$, ma essendo (α'', β'') coppia minima (Prop.

2.2, 1.21) la mappa μ che rende commutativo il diagramma è monomorfismo, quindi il Pull Back (β', α'; α, β) risulta $\vee$-esatto.

Analogamente consideriamo un diagramma commutativo del tipo:

$$\begin{tikzcd}
 & R & \\
C \arrow[ur, "\delta'"] & & D \arrow[ul, "\gamma'"'] \\
 & S \arrow[ul, "\gamma''"] \arrow[ur, "\delta''"'] & \\
 & Y \arrow[uul, "\gamma"] \arrow[uur, "\delta"'] \arrow[u, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

dove (γ, δ; δ', γ') è Push Out e (γ'', δ''; δ', γ') Pull Back la mappa ε è un epimorfismo, quindi il Push Out (γ, δ; δ', γ') e $\wedge$-esatto.

Viceversa se ogni Pull Back è $\vee$-esatto ed ogni Push Out è $\wedge$-esatto allora esiste una unica coppia di funtori:

$$T : \hat{\mathfrak{C}} \to \check{\mathfrak{C}}, \qquad S : \check{\mathfrak{C}} \to \hat{\mathfrak{C}}$$

tali che:

$$TS = I_{\check{\mathfrak{C}}} \quad ST = I_{\hat{\mathfrak{C}}} \quad S\mathfrak{I} = \mathfrak{J} \quad T\mathfrak{J} = \mathfrak{I} \quad S\sim\, = -S \quad T- = \sim S.$$

L'unicità è già stata provata col ragionamento precedente, basterà ora far vedere che è un funtore S così definito: $S(A)=A$ per ogni A oggetto di $\check{\mathfrak{C}}$, e per ogni mappa di $\check{\mathfrak{C}}$ $\Gamma : A \to B$ date φ, ψ mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Gamma = \widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi)$ e (ψ', φ'; φ, ψ) Pull Back, $S(\Gamma) = \mathfrak{J}(\varphi')\overline{\mathfrak{J}(\psi')}$.

È intanto ovvio (Prop. 1.17*) che $S(\Gamma)$ non dipende dal modo porticolare di rappresentare Γ.

Siano ora $\Gamma : A \to B$, $\Delta : B \to C$ mappe di $\check{\mathfrak{C}}$, $\Gamma = \widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi)$, $\Delta = \widetilde{\mathfrak{I}(\lambda)}\mathfrak{I}(x)$ con φ, ψ, x, λ mappe di $\mathfrak{C}$ consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & & P & & & \\
 & X \arrow[urr, "\varkappa'"] & & & & Y \arrow[ull, "\psi'"'] & \\
 & & & Q \arrow[ull, "\psi''"'] \arrow[urr, "\varkappa''"] & & & \\
A \arrow[uur, "\varphi"] & & & B \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[uull, "\psi"] \arrow[uurr, "\varkappa"'] & & & C \arrow[uul, "\lambda"'] \\
 & R \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[uurr, "\beta"] & & & & S \arrow[uull, "\gamma"'] \arrow[ur, "\delta"] & \\
 & & & T \arrow[ull, "\gamma'"'] \arrow[urr, "\beta'"] & & & \\
 & U \arrow[uuul, "\alpha\eta"] \arrow[uu, "\eta"] \arrow[uuurr, "\xi"] & & & & V \arrow[uuull, "\zeta"] \arrow[uu, "\vartheta"'] \arrow[uuur, "\delta\vartheta"'] & \\
 & & W \arrow[ul, "\gamma''"] \arrow[uur, "\eta'"] & & Z \arrow[uul, "\vartheta'"'] \arrow[ur, "\beta''"'] & & \\
 & & & O \arrow[ul, "\vartheta''"] \arrow[uuu, "\varepsilon'"'] \arrow[ur, "\eta''"'] & & &
\end{tikzcd}$$

dove sono:

$(\psi, \varkappa; \varkappa', \psi')$ Push Out, $(\psi'', \varkappa''; \varkappa', \psi')$ Pull Back e quindi ε epimorfismo per l'ipotesi che i Push Out siano $\wedge$-esatti,

$(\alpha, \beta; \varphi, \psi'')$, $(\gamma, \delta; \varkappa'', \lambda)$, $(\gamma', \beta', \beta, \gamma)$ Pull Back e quindi

$(\alpha\gamma', \delta\beta'; \varkappa'\varphi, \psi'\lambda)$ Pull Back per la Prop. 1.9*,

$(\eta, \xi; \beta, \varepsilon)$ Pull Back quindi η epimorfismo per l'ipotesi 1.iv*) e

$(\alpha\eta, \xi; \varphi, \psi)$ Pull Back per la Prop. 1.8;

$(\gamma'', \eta'; \eta, \gamma')$ Pull Back quindi η' epimorfismo per 2.iv*)

$(\vartheta', \beta''; \beta', \vartheta)$ Pull Back quindi ϑ' epimorfismo per 2.iv*), infine

$(\vartheta'', \eta''; \eta'\ \vartheta')$ Pull Back quindi ϑ'' ed η'' epimorfismi e

$(\gamma''\vartheta'', \beta''\eta''; \beta\eta, \gamma\vartheta)$ Pull Back per la prop. 1.9*, allora, grazie alla prop. 1.16*

$(\gamma''\vartheta'', \beta''\eta''; \xi, \zeta)$ è Pull Back e posto $\varepsilon'=\eta'\vartheta''=\vartheta'\eta''$, ε' è epimorfismo allora:

$$S[\widetilde{\mathfrak{I}(\lambda)}\mathfrak{I}(\varkappa))(\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi))]=S[\widetilde{\mathfrak{I}(\psi'\lambda)}\mathfrak{I}(\varkappa'\varphi)]=\mathfrak{J}(\delta\beta')\overline{\mathfrak{J}(\alpha\gamma')}$$

$$S[\widetilde{\mathfrak{I}(\lambda)}\mathfrak{I}(\varkappa)]\,S[\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi)]=(\mathfrak{J}(\delta\vartheta)\overline{\mathfrak{J}(\zeta)})(\mathfrak{J}(\xi)\overline{\mathfrak{J}(\alpha\eta)})=$$
$$=\mathfrak{J}(\delta\vartheta\beta''\eta'')\overline{\mathfrak{J}(\alpha\eta\gamma''\vartheta'')}.$$

Ora poichè $(\alpha\eta\gamma''\vartheta'', \delta\vartheta\beta''\eta'')<(\alpha\gamma', \delta\beta')$ essendo ε' epimorfismo tale che il diagramma commuti, si ha:

$$S[(\widetilde{\mathfrak{I}(\lambda)}\mathfrak{I}(\varkappa))(\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi))]=S[\widetilde{\mathfrak{I}(\lambda)}\mathfrak{I}(\varkappa)]\,S[\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi)]$$

quindi come volevano provare:

$$S(\Gamma\Delta)=S(\Gamma)S(\Delta),$$

S è un funtore.

Si prova con ragionamento duale che è un funtore T così definito: $T(A)=A$ per ogni oggetto A di $\widehat{\mathfrak{C}}$, e per ogni mappa $\Phi: A\to B$ di $\mathfrak{C}$, date ρ, σ mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Phi=\mathfrak{J}(\sigma)\overline{\mathfrak{J}(\rho)}$ e $(\rho, \sigma; \sigma', \rho')$ Push Out, $T(\Phi)=\widetilde{\mathfrak{I}(\rho')}\mathfrak{I}(\sigma')$.

Proviamo ora che $TS=I_{\breve{\mathfrak{C}}}$, infatti sia $\Gamma: A\to B$ mappa di $\breve{\mathfrak{C}}$ e φ, ψ mappe di $\mathfrak{C}$ tali che $\Gamma=\widetilde{\mathfrak{I}(\psi)}\mathfrak{I}(\varphi)$ allora $S(\Gamma)=\mathfrak{J}(\varphi')\overline{\mathfrak{J}(\psi')}$ essendo $(\psi', \varphi'; \varphi, \psi)$ Pull Back, $T(S(\Gamma))=\widetilde{\mathfrak{I}(\psi'')}\mathfrak{I}(\varphi'')$ essendo $(\psi', \varphi'; \varphi'', \psi'')$ Push Out

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & Q \arrow[u, "\mu"'] & \\
A \arrow[uur, "\varphi"] \arrow[ur, "\varphi''"'] & & B \arrow[uul, "\psi"'] \arrow[ul, "\psi''"] \\
 & P \arrow[ul, "\psi'"] \arrow[ur, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Poichè per ipotesi ogni Pull Back è $\vee$-esatto la mappa μ che rende commutativo il diagramma è monomorfismo quindi $TS(\Gamma)=\Gamma$.

Si prova analogamente che $ST=I_{\widehat{\mathfrak{C}}}$.

Le rimanenti verifiche sono poi ovvie.

Osservazione 2.4. L'enunciato del Teorema precedente può essere formulato in modo equivalente così: condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $\widehat{\mathfrak{C}}$ isomorfo a $\check{\mathfrak{C}}$ e che ogni quadrato $\wedge$-esatto di $\mathfrak{C}$ sia esatto ed ogni quadrato $\vee$-esatto sia esatto.

Esempi.

Categoria degli insiemi.

Nella categoria degli insiemi $\mathfrak{S}$ non è verificata come visto negli esempi della parte I la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $\widehat{\mathfrak{S}}=\check{\mathfrak{S}}$; ci sono infatti nella categoria Pust Out non $\wedge$-esatti e Pull Back non $\vee$-esatti.

Categorie Abeliane.

In una qualunque categoria Abeliana $\mathfrak{C}$ è verificata la condizione necessaria e sufficiente affinchè $\widehat{\mathfrak{C}}=\check{\mathfrak{C}}$ (vedi [4]).

BIBLIOGRAFIA

[1] Arduini P.: *Monomorphism and epimorphism in abstract categories,* Rend. Sem. Mat. Università di Padova (1969), Volume XLII.

[2] Bourbaki N.: *Théorie des ensembles,* Chap. III, ed. Hermann, Paris.

[3] Cartan H., Eilemberg S.: *Homological Algebra,* Princenton University Press (1956).

[4] Hilton P.: Correspondences and exact squares Proc. of the Conf. on Categ. Alg., La Jolla (1965).

[5] MITCHELL B.: *Theory of categories,* Academic Press, New York and London (1965).

[6] PARODI F.: *Simmetrizzazioni di una Categoria,* Parte I, *Premesse generali,* Rend. Sem. Mat. Università di Padova, volume XLIV.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 maggio 1970.