Rendiconti
*del*
Seminario Matematico
*della*
Università di Padova

D. Arezzo
L. Robbiano

**Sul completato di un anello rispetto ad un ideale di tipo finito**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 44 (1970), p. 133-154
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__133_0>

# SUL COMPLETATO DI UN ANELLO RISPETTO AD UN IDEALE DI TIPO FINITO

D. AREZZO e L. ROBBIANO *)

In questo lavoro ci proponiamo di dare alcune condizioni perchè sussista l'isomorfismo

$$(1) \qquad \widehat{(A, \mathfrak{a})} \simeq A[[X_1, ..., X_n]]/(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$$

dove $\mathfrak{a} = (a_1, ..., a_n)$ è un ideale dell'anello $A$ generante una topologia separata, $\widehat{(A, \mathfrak{a})}$ è il completato di $A$ rispetto a tale topologia ed $X_1$, ..., $X_n$ sono indeterminate su $A$.

Dopo aver dimostrato nel § 1 che la (1) è sempre valida se $A$ è noetheriano (teor. 1.5), si prova, nel § 2, che essa è falsa in generale, anche quando l'ideale $\mathfrak{a}$ è principale (prop. 2.5).

Nel § 3 si prova che se la successione $\{\mathrm{Ann}\,(a^n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ è stazionaria, la (1) vale per l'ideale principale $(a)$ (teor 3.5). Si perviene a tale risultando sull'ideale $(X-a)$ la topologia $(X)$-adica e quella indotta dalla totato confrontando sull'ideale $(X-a)$ la topologia $(X)$-adica e quella indotta dalla topologia $(X)$-adica di $A[[X]]$, provando che esse coincidono se e solo se la successione $\{\mathrm{Ann}\,(a^n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ è stazionaria (teor. 3.3). Si osservi che il teor. 3.3 fornisce una classe di esempi di anelli (non noetheriani) con ideali principali per i quali non vale la tesi del lemma di Artin-Rees.

L'estensione del teorema 3.5. ad ideali non principali si presenta piuttosto laboriosa e per essa occorrono vari risultati preliminari riguardanti le relazioni fra le topologie generate da due ideali e quella gene-

---

*) Indirizzo degli AA.: Istituto Matematico - Via L. Alberti, 4 - 16132 Genova.
Lavoro eseguito nell'ambito del programma di ricerca matematica del C.N.R. (Contratto di ricerca n. 115.3038.05173).

rata dalla loro somma, e le relazioni fra un anello ed i completamenti fatti successivamente rispetto alle topologie generate da due ideali.

Così nel § 4, si prova ad esempio che, sotto certe ipotesi, un anello è separato e completo rispetto alle topologie generate da due ideali se e solo se lo è rispetto alla loro somma (teor. 4.5), si studiano i suddetti completamenti successivi (prop. 4.9) e si perviene ad una caratterizzazione di certi separati completati di anelli di polinomi (prop. 4.11).

Finalmente, nel § 5, si estende il teorema 3.5 ad ideali non principali ed il teorema 1.5 ad anelli non noetheriani (teor. 5.1), mediante ipotesi su certi completamenti « parziali », ipotesi che sono poi ricondotte ad altre sull'anello $A$ (teor. 5.5).

In questo lavoro supporremo tutti gli anelli commutativi e con identità. Chiameremo $\mathfrak{a}$*-topologia* la topologia generata dall'ideale $\mathfrak{a}$ ed useremo le locuzioni $\mathfrak{a}$*-separato,* $\mathfrak{a}$*-chiuso,* ecc., ... invece di *separato rispetto alla* $\mathfrak{a}$*-topologia, chiuso rispetto alla* $\mathfrak{a}$*-topologia,* ecc..

Indicheremo inoltre con $\widehat{(A, \mathfrak{a})}$ il separato completato di $A$ rispetto alla $\mathfrak{a}$-topologia. Per maggiori dettagli sulle $\mathfrak{a}$-topologie vedansi ad esempio [1] e [3].

§ **1.** In questo numero, dopo aver scritto esplicitamente il teorema di cui si è detto all'inizio della prefazione, dimostreremo che se $A$ è noetheriano, in $A[[X_1, ..., X_n]]$ l'ideale $(X_1-a_1, ..., X_n-a_n)$ è chiuso rispetto alla $(a_1, ..., a_n, X_1, ..., X_n)$-topologia e che quindi si ha l'isomorfismo

$$\widehat{(A, \mathfrak{a})} \simeq [[X_1, ..., X_n]]/(X_1-a_1, ..., X_n-a_n).$$

Per la dimostrazione di questo fatto faremo uso di alcuni risultati di carattere topologico espressi dal coroll. 1.3 e dalla prop. 1.4.

TEOREMA 1.1. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}=(a_1, ..., a_n)$ un ideale di tipo finito di $A$ generante una topologia separata ed $X_1, ..., X_n$ indeterminate su $A$. Allora, si ha l'isomorfismo*

$$(A, \mathfrak{a}) \simeq A[[X_1, ..., X_n]]/(X_1-a_1, ..., X_n-a_n)^*$$

*dove $(X_1-a_1, ..., X_n-a_n)^*$ è la $(a_1, ..., a_n, X_1, ..., X_n)$-chiusura del l'ideale $(X_1-a_1, ..., X_n-a_n)$.*

PROVA. Vedi [2], p. 55, teor. 17.5.

LEMMA 1.2. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ideali di $A$. Allora la $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-chiusura e la $\mathfrak{b}$-chiusura di $\mathfrak{a}$ coincidono.*

PROVA. Si ha infatti

$$\bigcap_{n\in N} (\mathfrak{a}+(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^n)=\bigcap_{n\in N} (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}^n).$$

COROLLARIO 1.3. *Siano $A$ un anello, $a_1, \ldots, a_n$ elementi di $A$ ed $X_1, \ldots, X_n$ indeterminate su $A$. Allora nell'anello $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ la $(a_1, \ldots, a_n, X_1, \ldots, X_n)$-chiusura e la $(X_1, \ldots, X_n)$-chiusura dell'ideale $(X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n)$ coincidono.*

PROVA. Basta osservare che l'ideale $(a_1, \ldots, a_n, X_1, \ldots, X_n)$ coincide con l'ideale $(X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n)+(X_1, \ldots, X_n)$.

Stabiliamo adesso un risultato che sarà utile anche nel resto del lavoro.

PROPOSIZIONE 1.4. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ideali di $A$ tali che*

*a) $A$ è $\mathfrak{a}$-completo;*

*b) $\mathfrak{b}$ è finitamente generato;*

*c) in $\mathfrak{b}$ la $\mathfrak{a}$-topologia coincide con quella indotta dalla $\mathfrak{a}$-topologia di $A$.*

*Allora $\mathfrak{b}$ è $\mathfrak{a}$-chiuso.*

PROVA. *Poichè* $\mathfrak{b}$ è finitamente generato, esso è $\mathfrak{a}$-completo ([1], p. 52, coroll. 1) dunque è completo anche rispetto alla topologia indotta dalla $\mathfrak{a}$-topologia di $A$; ne segue la tesi.

Siamo ora in grado di provare il seguente teorema 1.5, che probabilmente è noto, ma non è reperibile nella maggiore letteratura sull'argomento; ad esempio in [2], p. 55, cor. 17.6 esso viene stabilito con ipotesi più restrittive.

TEOREMA 1.5. *Siano $A$ un anello noetheriano, $\mathfrak{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ un ideale di $A$ tale che la $\mathfrak{a}$-topologia di $A$ sia separata, $\widehat{A}$ l'$\mathfrak{a}$-completato* *di $A$ ed $X_1, \ldots, X_n$ indeterminate su $A$. Si ha allora*

$$\widehat{A} \simeq A[[X_1, \ldots, X_n]]/(X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n)$$

PROVA. In virtù del teor 1.1 e del coroll. 1.3, ci si riconduce a provare che l'ideale $\mathfrak{n}=(X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n)$ è $(X_1, \ldots, X_n)$-chiuso. Poichè $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ è $(X_1, \ldots, X_n)$-completo ed $\mathfrak{n}$ è finitamente generato, per la prop. 1.4 basta osservare che in $\mathfrak{n}$ la $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia è equivalente a quella indotta dalla $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia di $A$, il che segue, poichè $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ è noetheriano, dal lemma di Artin-Rees (cfr. [3], p. 254, teor. 4).

OSSERVAZIONE 1.6. Se $A$ è noetheriano, il fatto che l'ideale $(X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n)$ sia $(X_1, \ldots, X_n)$-chiuso, si poteva dimostrare anche sfruttando il fatto che in tal caso $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ è un anello di Zariski per la $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia (cfr. [1], p. 70, prop. 8). Abbiamo preferito dar rilievo all'altro procedimento, perchè è quello che seguiremo per le generalizzazioni successive.

COROLLARIO 1.7. *Siano $A$ un anello noetheriano, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ideali di $A$ tali che $A$ sia $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-separato. Allora, posto $\widehat{A}=(\widehat{A,\mathfrak{a}})$ si ha che $\widehat{A}$ è $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\widehat{A}$-separato.*

PROVA. Siano $\tilde{A}=(\widehat{A,\mathfrak{a}+\mathfrak{b}})$, $\mathfrak{a}=(a_1, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{b}=(b_1, \ldots, b_m)$ ed $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ indeterminate su $A$. Per il teorema 1.5 si hanno gli isomorfismi

$$\widehat{A} \simeq A[[X_1, \ldots, X_n]]/(X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n)$$

$$\begin{aligned}\tilde{A} &\simeq A[[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]]/\mathfrak{n} \\ &\simeq \widehat{A}[[Y_1, \ldots, Y_m]]/(Y_1-b_1, \ldots, Y_m-b_m)\end{aligned}$$

dove $\mathfrak{n}$ è l'ideale $(X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n, Y_1-b_1, \ldots, Y_m-b_m)$ dell'anello $A[[X_1, \ldots, \widehat{X}_n, Y_1, \ldots, Y_m]]$.

Si ha quindi un $A$-omomorfismo canonico iniettivo $\varphi : \widehat{A} \rightarrow \tilde{A}$. Inoltre

$\tilde{A}$ è $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\tilde{A}$-separato, quindi $\bigcap_{r\in N} [(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\tilde{A}]^r=(0)$ e si ha allora,

$$\varphi(\bigcap_{r\in N} [(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\hat{A}]^r)\subset \bigcap_{r\in N} [\varphi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\hat{A}]^r\subset \bigcap_{r\in N} [(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\tilde{A}]^r=(0)$$

e quindi poichè $\varphi$ è inietttivo $\bigcap_{r\in N} [(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\hat{A}]^r=(0)$.

Corollario 1.7. *Siano $A$ un anello noetheriano, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ideali di $A$ tali che $A$ sia $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-separato. Allora, posto $\hat{A}=\widehat{(A,\ \mathfrak{a})}$ ed $\tilde{A}=\widehat{(A,\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b})}$ si ha $\tilde{A}\simeq\widehat{(\hat{A},\ \mathfrak{b}\hat{A})}$.*

Prova. Per il corollario 1.6, $\hat{A}$ è $\mathfrak{b}\hat{A}$-separato, quindi la tesi segue dal teorema 1.5 per l'isomorfismo

$$\tilde{A}\simeq\hat{A}[[Y_1,\ \dots,\ Y_m]]/(Y_1-b_1,\ \dots,\ Y_m-b_m).$$

§ **2.** In questo paragrafo dimostreremo con un esempio che l'ideale $(X_1-a_1,\ \dots,\ X_n-a_n)$ non è sempre $(X_1,\ \dots,\ X_n)$-chiuso in $A[[X_1,\ \dots,\ X_n]]$ il che impedisce di stabilire in generale il risultato ottenuto per anelli noetheriani nel § 1. Per costruire il controesempio, occorre premettere alcune considerazioni sulle $\mathfrak{a}$-topologie degli anelli graduati.

Se $A=\bigoplus_{n\in N} A_n$ è un anello graduato, indichiamo con $A_+$ l'ideale omogeneo $\bigoplus_{n>0} A_n$ di $A$ e dimostriamo la seguente

Proposizione 2.1. *Siano $A=\bigoplus_{n\in N} A_n$ un anello graduato ed $\mathfrak{a}$ un ideale di $A$ contenuto in $A_+$. Allora ogni ideale omogeneo $\mathfrak{b}$ di $A$ è $\mathfrak{a}$-chiuso.*

Prova. Basta dimostrare che $\bigcap_{n\in N} (\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^n)\subset\mathfrak{b}$.

Sia $x\in \bigcap_{n\in N} (\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^n)$ e sia $x=x_0+\dots+x_r$ con $x_i\in A_i$ $(i=0,\ \dots,\ r)$. Poichè $x\in\mathfrak{b}+\mathfrak{a}^{r+1}\subset \bigoplus_{n\geq r+1} A_n$, si ha $x=b-\sum_{h=1}^{k} x_{r+h}$ con $b\in\mathfrak{b}$ ed $x_{r+h}\in A_{r+h}$ per $h=1,\ \dots,\ k$. Quindi $x_0+\dots+x_{r+k}=b\in\mathfrak{b}$. Ora $\mathfrak{b}$ è omogeneo e per ogni $i=0,\ \dots,\ r+k$, $x_i$ è una componente omogenea di $b\in\mathfrak{b}$; quindi $x_0,\ \dots,\ x_r\in\mathfrak{b}$ ed $x=x_0+\dots+x_r\in\mathfrak{b}$.

COROLLARIO 2.2. *Siano $A$ un anello, $X_1, \dots, X_n$ indeterminate su $A$, $B$ l'anello graduato $A[X_1, \dots, X_n]$ ed $\mathfrak{a}$ un ideale omogeneo di $B$. Allora $\mathfrak{a}$ è $(X_1, \dots, X_n)$-chiuso.*

Enunciamo adesso un lemma la cui dimostrazione è immediata.

LEMMA 2.3. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ideali di $A$ ed $\bar{\mathfrak{a}}$ l'immagine di $\mathfrak{a}$ nell'omomorfismo canonico $p: A \to A/\mathfrak{b}$. Allora la $\bar{\mathfrak{a}}$-topologia di $A/\mathfrak{b}$ è separata se e solo se $\mathfrak{b}$ è $\mathfrak{a}$-chiuso.*

Siano ora $k$ un corpo, $Y, X_0, X_1, \dots X_n, \dots$ indeterminate su $k$, $A$ l'anello $k[Y, X_0, X_1, \dots, X_n, \dots]$, $\mathfrak{a}$ l'ideale di $A$ generato dagli elementi $X_0Y, X_1Y^2, \dots, X_nY^{n+1}, \dots$ ed $R$ l'anello quoziente $A/\mathfrak{a}$.

Ci proponiamo di provare (prop. 2.5) che, se y è l'immagine di $Y$ mediante l'omomorfismo canonico di $A$ in $R$, l'ideale $(X-y)$ di $R[[X]]$ non è $(X)$-chiuso, il che fornisce il controesempio desiderato.

Premettiamo il

LEMMA 2.4. *Per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ ed ogni $k \geq n$ si ha $X_kY^n \notin \mathfrak{a}$.*

PROVA. Supponiamo che si abbia

$$X_kY^n = r_0X_0Y + \dots + r_pX_pY^{p+1} \tag{1}$$

con $r_i \in A$ *per* $i=0, \dots, p$. Se scriviamo gli $r_i$ come polinomi in $Y$ e sostituiamo nella (1), uguagliando i coefficienti di $Y^n$ nei due membri, si ottiene una relazione del tipo

$$X_k = a_0X_0 + a_1X_1 + \dots + a_{n-1}X_{n-1}$$

che è assurda, perchè implica che $X_k \in (X_0, \dots, X_{n-1})$ con $k \geq n$.

Adesso, parlando di graduazione su $A$, intenderemo quella ottenuta considerando $A$ come anello di polinomi in $Y$ a coeeficienti in $k[X_0, X_1, \dots, X_n, \dots]$.

Indichiamo con $y, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ le immagini di $Y, X_0, X_1, \dots, X, \dots$ nell'omomorfismo canonico di $A$ in $R$ ed osserviamo che l'ideale $\mathfrak{a}$ è omogeneo; pertanto è $(Y)$-chiuso per il coroll. 2.2 e quindi la (yı-topologia di $R$ è separata per il lemma 2.3.

Proviamo ora la

PROPOSIZIONE 2.5. *Siano $A$, $\mathfrak{a}$, $R$ come sopra ed $X$ una indeterminata su $R$. Allora l'ideale* $(X-y)$ non è $(X)$*-chiuso in* $R[[X]]$.

PROVA. Per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ sia $g_n(X)$ il polinomio

$$x_n y^n + x_n y^{n-1} X + \ldots + x_n X^n.$$

Si ha allora

$$g_n(X)(X-y) = -x_n y^{n+1} + (x_n y^n - x_n y^n) X + \ldots + x_n X^{n+1}$$

e quindi, poichè $x_n y^{n+1} = 0$,

$$g_n(X)(X-y) = x_n X^{n+1}.$$

Consideriamo la successione $\{\sum_{i=0}^{n} x_i X^{i+1}\}_{n \in \boldsymbol{N}}$. Per quanto visto, essa è una successione di elementi dell'ideale $(X-y)$ che converge nella $(X)$-topologia di $R[[X]]$, alla serie $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n X^{n+1}$. Per giungere alla conclusione, basta dimostrare che $S \notin (X-y)$, ed è quanto faremo, ragionando per assurdo.

Supponiamo che esista una serie $T = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots$ con

$$S = (X-y)T$$

cioè tali che

$$x_0 X + x_1 X^2 + \ldots = -a_0 y + (a_0 - a_1 y) X + (a_1 - a_2 y) X^2 + \ldots .$$

Si hanno allora in $R$ le relazioni

$$(1) \qquad y a_0 = 0 \quad \text{ed} \quad a_i - a_{i+1} y - x_i = 0 \qquad \text{per } i \in \boldsymbol{N}.$$

Si osservi ora che $R$ è graduato rispetto alla graduazione indotta da quella di $A$ e quindi ogni $a_i$ si può scrivere in modo unico come somma di componenti omogenee

$$(2) \qquad a_i = \lambda_{i0} + \lambda_{i1} y + \ldots + \lambda_{in_i} y^{n_i}.$$

Ma dalle (1) si deduce che

$$a_i = x_i + a_{i+1}y = x_i + x_{i+1}y + a_{i+2}y^2 = \dots$$

$$\dots = x_i + x_{i+1}y + \dots + x_{i+n_i}y^{n_i} + a_{i+n_i+1}y^{n_i+1}$$

ed anche quest'ultima è una espressione di $a_i$ come somma delle componenti omogenee $x_{i+j}y^j$ e di $a_{i+n_i+1}y^{n_i+1}$.

Confrontando con le (2) si ha allora $a_{i+n_i+1}y^{n_i+1}=0$ ed

$$a_i = x_i + x_{i+1}y + \dots + x_{i+n_i}y^{n_i}\,.$$

Possiamo allora scrivere, per le (1),

$$a_i - a_{i+1}y - x_i = x_i + x_{i+1}y + \dots + x_{i+n_i}y^{n_i} - x_i - x_{i+1}y - \dots$$

$$\dots - x_{i+1+n_{i+1}}y^{1+n_{i+1}} = 0$$

e questo implica, poichè $x_{i+k}y^k \neq 0$ per ogni $k \in \boldsymbol{N}$ (lemma 2.4), che $n_i = n_{i+1}+1$ e quindi in definitiva che la successione $\{n_i\}_{i\in \boldsymbol{N}}$ è strettamente decrescente. Ciò è assurdo, perchè gli $n_i$ sono numeri naturali.

§ 3. In questo paragrafo studieremo il completamento di un anello rispetto ad una topologia separata generata da un ideale principale $(a)$ e stabiliremo una condizione necessaria e sufficiente perchè la $(X)$-topologia dell'ideale $(X-a)$ di $A[[X]]$ coincida con la topologia indotta dalla $(X)$-topologia di $A[[X]]$. Ne seguiranno, in virtù della prop. 1.4, alcune condizioni perchè l'ideale $(X-a)$ sia $(X)$-chiuso in $A[[A]]$ e quindi perchè si abbia l'isomorfismo

$$\widehat{(A, (a))} \simeq A[[X]]/(X-a)$$

(teor. 3.4).

Premettiamo ora alcuni lemmi.

LEMMA 3.1. *Siano $A$ un anello, $a$ un elemento di $A$ tale che la $(a)$-topologia di $A$ sia separata ed $X$ una indeterminata su $A$. Allora l'elemento $X-a$ è regolare in $A[[X]]$.*

PROVA. Supponiamo che sia

$$0=(X-a)\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = -a_0 a + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}a)X^{n+1}.$$

Allora si ha $a_n - a_{n+1}a = 0$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ e quindi

$$a_n = a_{n+1}a = a_{n+2}a^2 = \ldots$$

ed in definitiva $a_n \in \bigcap_{m \in \boldsymbol{N}} (a^m)$, cioè $a_n = 0$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$.

LEMMA 3.2. *Siano $A$ un anello ed $a$ un elemento di $A$. Allora sono fatti equivalenti*

*a) esiste $n \in \boldsymbol{N}$ tale che* $\operatorname{Ann}(a^n) = \operatorname{Ann}(a^{n+1})$;

*b) la successione* $\{\operatorname{Ann}(a^n)\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ *è stazionaria* (rispetto alla inclusione).

PROVA. Se $\operatorname{Ann}(a^n) = \operatorname{Ann}(a^{n+1})$, dimostriamo che per ogni $k \in \boldsymbol{N}$ si ha

$$\operatorname{Ann}(a^{n+k}) = \operatorname{Ann}(a^{n+k+1}).$$

Ora, se $r \in \operatorname{Ann}(a^{n+k+1})$, si ha $ra^{n+k+1} = (ra^k)a^{n+1} = 0$, quindi $ra^k \in \operatorname{Ann}(a^{n+1}) = \operatorname{Ann}(a^n)$, cioè $ra^{n+k} = 0$. Ciò prova che *a)* implica *b)*. Il viceversa è ovvio.

TEOREMA 3.3. *Siano $A$ un anello $a \in A$ un elemento tale che la $(a)$-topologia di $A$ sia separata ed $X$ una indeterminata su $A$. Allora sono fatti equivalenti:*

*a) la successione* $\{\operatorname{Ann}(a^n)\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ *è stazionaria;*

*b) sull'ideale $(X-a)$ di $A[[X]]$ la $(X)$-topologia e quella indotta dalla $(X)$-topologia di $A[[X]]$ coincidono.*

PROVA. *a)* $\Rightarrow$ *b)*. Dobbiamo dimostrare che le successioni di insiemi

$$\{(X-a) \cap (X^n)\}_{n \in \boldsymbol{N}} \text{ ed } \{(X-a)(X^n)\}_{n \in \boldsymbol{N}}$$

sono cofinali rispetto all'inclusione. A tale scopo mostreremo che se $n \in \boldsymbol{N}$ è un intero tale che $\operatorname{Ann}(a^n) = \operatorname{Ann}(a^{n+1})$ si ha

(1) $$(X-a)\cap(X^{n+k})\subset(X-a)(X^k)$$

per ogni $k\in\boldsymbol{N}$.

La (1) è ovvia per $k=0$; procedendo per induzione, supponiamo vera la (1) per $k$ e proviamo che essa vale per $k+1$.

Sia $f(X)\in(X-a)\cap(X^{n+k+1})$. Per l'ipotesi induttiva si ha

$$(X-a)\cap(X^{n+k+1})\subset(X-a)\cap(X^{n+k})\subset(X-a)(X^k)$$

e quindi $f(X)=(X-a)h(X)$ con

$$h(X)=a_kX^k+a_{k+1}X^{k+1}+\ ...\ \in(X^k).$$

Poichè $f(X)\in(X^{n+k+1})$, si ha

(2) $$aa_k=0,\ a_k-aa_{k+1}=\ ...\ =a_{n+k-1}-aa_{n+k}=0.$$

Dalle (2) si deducono le relazioni

$$a^2a_{k+1}=a^3a_{k+2}=\ ...\ =a^{n+1}a_{n+k}=0$$

quindi $a_{n+k}\in\operatorname{Ann}(a^{n+1})=\operatorname{Ann}(a^n)$ e quindi $a_{n+k}a^n=0$; ma allora, moltiplicando l'ultima delle (2) per $a^{n-1}$ si ottiene $a^{n-1}a_{n+k-1}=0$ moltiplicando la penultima per $a^{n-2}$, si ottiene $a^{n-2}a_{n+k-2}=0$ e così via, fino ad ottenere $aa_{k+1}=a_k=0$. Quindi $h(X)\in(X^{k+1})$ e perciò

$$f(X)\in(X-a)(X^{k+1}).$$

$b)\Rightarrow a)$. Supponiamo, per assurdo, che la successione $\{\operatorname{Ann}(a^n)\}_{n\in N}$ non sia stazionaria; allora, per il lemma 3.2, per ogni $n\in\boldsymbol{N}$ si ha $\operatorname{Ann}(a^n)\neq\operatorname{Ann}(a^{n+1})$. Dimostriamo che le due topologie indicate non coincidono provando che per ogni $n\in\boldsymbol{N}$ si ha

$$(X-a)\cap(X^n)\not\subset(X-a)(X).$$

Per ogni $m\in\boldsymbol{N}$ sia $a_m$ un elemento di $\operatorname{Ann}(a^{m+1})$ non appartenente ad $\operatorname{Ann}(a^m)$ e sia $g_n(X)$ il polinomio

$$g_n(X)=a^{n-1}a_{n-1}+a^{n-2}a_{n-1}X+\ ...\ +aa_{n-1}X^{n-1}.$$

Allora

$$f_n(X)=(X-a)g_n(X)\in(X-a)\cap(X^n),$$

poichè

$$f_n(X) = -a_{n-1}a^n + (a_{n-1}a^{n-1} - a_{n-1}a^{n-1})X + \dots + aa_{n-1}X^n = aa_{n-1}X^n.$$

D'altra parte

$$f_n(X) \notin (X-a)(X);$$

infatti, in caso contrario, si avrebbe

$$(X-a)g_n(X) = (X-a)\cdot X \cdot g'_n(X)$$

e quindi, poichè $X-a$ è regolare in $A[[X]]$ (lemma 3.1),

$$g_n(X) = X \cdot g'_n(X) \in (X)$$

il che è assurdo perchè $a_{n-1}a^{n-1} \neq 0$ essendo $a_{n-1} \notin \operatorname{Ann}(a^{n-1})$.

OSSERVAZIONE 3.4. Esempi di anelli con ideali per i quali non vale la tesi del lemma di Artin-Rees esistono nella letteratura (cfr. ad esempio [1], p. 116, es. 1); ma mediante il teorema 3.3 si determina tutta una classe di anelli aventi ideali principali siffatti. A tale classe appartiene per esempio l'anello $R$ considerato nella prop. 2.5.

TEOREMA 3.5. *Siano $A$ un anello, $a \in A$ un elemento tale che*

*a) la $(a)$-topologia di $A$ è separata;*

*b) la successione $\{\operatorname{Ann}(a^n)\}_{n\in N}$ è stazionaria.*

*Allora, se $X$ è una indeterminata su $A$, si ha l'isomorfismo*

$$\widehat{(A, (a))} \simeq A[[X]]/(X-a).$$

PROVA. Per il teor. 1.1, e per il coroll. 1.3, ci si riconduce a provare che l'ideale $(X-a)$ è $(X)$-chiuso. Ciò segue dalla prop. 1.4, poichè per le ipotesi fatte e per il teor. 3.3, sull'ideale $(X-a)$ la $(X)$-topologia e quella indotta dalla $(X)$-topologia di $A[[X]]$ coincidono.

OSSERVAZIONE 3.6. Il teorema 3.5 mostra che le condizioni equivalenti del teorema 3.3 implicano che l'ideale $(X-a)$ è $(X)$-chiuso. Non è noto se è vero anche il viceversa.

Dal teorema 3.5 seguono subito i seguenti corollari:

COROLLARIO 3.7. *Siano $A$ un anello ed $a \in A$ un elemento tale che*

*a) è $(a)$-separato e completo;*

*b) la successione $\{\mathrm{Ann}(a^n)\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ è stazionaria.*

*Allora, se $X$ è una indeterminata su $A$ si ha l'isomorfismo*

$$A \simeq A[[X]]/(X-a).$$

COROLLARIO 3.8. *Siano $A$ un anello ed $a \in A$ un elemento tale che la $(a)$-topologia di $A$ è separata. Supponiamo che sia verificata una delle seguente ipotesi:*

*a) $A$ è noetheriano;*

*b) $a$ è regolare;*

*c) se $ab=0$ e $b^2=0$, allora $b=0$;*

*d) $A$ è ridotto.*

*Allora, se $X$ è una indeterminata su $A$ si ha l'isomorfismo*

$$\widehat{(A, (a))} \simeq A[[X]]/(X-a).$$

PROVA. In tutti i casi, per il teor. 3.5, sarà sufficiente dimostrare che la successione $\{\mathrm{Ann}(a^n)\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ è stazionaria.

*a)* ovvio;

*b)* se a è regolare, si ha $\mathrm{Ann}(a^n)=(0)$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$;

*c)* se vale l'ipotesi *c)*, si ha $\mathrm{Ann}(a)=\mathrm{Ann}(a^2)$; infatti, se $x \in \mathrm{Ann}(a^2)$ si ha $a^2x=0$ e quindi, posto $b=ax$, si ha $ab=0$ e $b^2=0$, quindi $b=0$ ed $x \in \mathrm{Ann}(a)$;

*d)* se $A$ è ridotto è verificata l'ipotesi *c)*, da cui la tesi.

COROLLARIO 3.9. *Siano $A$ un anello ed $a \in A$ un elemento tale che*

*a) la $(a)$-topologia di $A$ è separata,* *b) la successione* $\{\mathrm{Ann}\,(a^n)\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ *è stazionaria.*

*Siano poi* $X$ *una indeterminata su* $A$ *ed* $f\in A[[X]]$ *un elemento tale che in* $(\widehat{A, (a)})$ *si abbia* $f(a)=0$.

*Allora* $f$ *appartiene all'ideale* $(X-a)$ *di* $A[[X]]$.

PROVA. È una conseguenza immediata del teorema 3.5.

ESEMPIO 3.10. Siano $A$ un anello, $X$ ed $Y$ indeterminate su $A$. Allora, poichè $X$ è regolare in $A[X]$, si ha l'isomorfismo

$$A[[X]]\simeq(A[X])[[Y]]/(Y-X).$$

§ **4.** Questo numero è dedicato all'esposizione di alcuni risultati riguardanti le topologie generate da un ideale, i più notevoli dei quali sono quelli espressi dal teorema 4.5 e dalla proposizione 4.9. Il primo stabilisce una condizione perchè si abbia l'equivalenza fra l'essere un anello separato e completo rispetto a due ideali ed esserlo rispetto alla loro somma; se l'anello è noetheriano, si dimostra che tale condizione è superflua (coroll. 4.6). La proposizione 4.9 esprime alcune proprietà dell'anello che si ottiene completando successivamente un anello $A$ rispetto a due suoi ideali. Il paragrafo si chiude con un risultato su certi separati completati degli anelli di polinomi, espresso dalla prop. 4.11.

LEMMA 4.1. *Siano* $A$ *un anello,* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *ideali di* $A$. *Allora, se* $A$ *è* $\mathfrak{a}$*-completo e* $\mathfrak{b}$*-completo, è anche* $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$*-completo.*

PROVA. Cominciamo con l'osservare che le filtrazioni $\{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^n\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ ed $\{\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ di $A$ sono equivalenti, avendosi per ogni $n\in \boldsymbol{N}$

$$\mathfrak{a}^{2n}+\mathfrak{b}^{2n}\subset(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{2n}\subset\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n.$$

Sia $\{x_n\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ una successione che tende a zero nella $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-topologia di $A$ e proviamo che $\{\sum_{i=0}^{n} x_i\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ converge.

Per l'osservazione fatta sopra, esiste una successione $\{n_i\}_{i\in \boldsymbol{N}}$ di numeri naturali tendente all'infinito tale che $x_i=a_i+b_i$ con $a_i\in \mathfrak{a}^{n_i}$ e $b_i\in \mathfrak{b}^{n_i}$.

Allora la successione $\{a_i\}_{i\in \boldsymbol{N}}$ tende a zero nella $\mathfrak{a}$-topologia di $A$ e la successione $\{b_i\}_{i\in \boldsymbol{N}}$ tende a zero nella $\mathfrak{b}$-topologia di $A$.

Siano ora $a$ un limite della successione $\{\sum_{i=0}^{n} a_i\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ nella $\mathfrak{a}$-topologia, $b$ un limite della successione $\{\sum_{i=0}^{n} b_i\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ nella $\mathfrak{b}$-topologia e dimostriamo che $a+b$ è un limite della successione $\{\sum_{i=0}^{n} x_i\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ nella $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-topologia.

Poniamo $A_n=\sum_{i=0}^{n} a_i$, $B_n=\sum_{i=0}^{n} b_i$ ed $X_n=\sum_{i=0}^{n} x_i$; allora, per ogni $n\in \boldsymbol{N}$, si ha $A_n+B_n=X_n$. Per ogni $p\in \boldsymbol{N}$, esiste $n_p\in \boldsymbol{N}$ tale che $A^n-a\in \mathfrak{a}^p$, $B_n-b\in \mathfrak{b}^p$ per ogni $n>n_p$; allora si ha

$$X_n-(a+b)=(A_n-a)+(B_n-b)\in \mathfrak{a}^p+\mathfrak{b}^p\subset(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^p$$

per ogni $n>n_p$.

LEMMA 4.2. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ideali di $A$ tali che esiste $n\in \boldsymbol{N}$ con $\mathfrak{c}\supset \mathfrak{a}^n$. Allora, la $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-chiusura e la $\mathfrak{b}$-chiusura di $\mathfrak{c}$ coincidono. In particolare, per ogni $n\in \boldsymbol{N}$ si ha: $\mathfrak{a}^n$ è $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-chiuso se e solo se è $\mathfrak{b}$-chiuso.*

PROVA. Si ha infatti $\bigcap_{m\in \boldsymbol{N}} (\mathfrak{c}+(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^m)=\bigcap_{m\in \boldsymbol{N}} (\mathfrak{c}+\mathfrak{b}^m)$.

PROPOSIZIONE 4.3. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideali di $A$ tali che $\mathfrak{a}^n$ è $\mathfrak{b}$-chiuso per ogni $n\in \boldsymbol{N}$. Allora se $A$ è $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-completo, $A$ è anche $\mathfrak{a}$-completo.*

PROVA. Dopo avere osservato che, per il lemma 4.2, si ha anche che $\mathfrak{a}^n$ è $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-chiuso per ogni $n\in \boldsymbol{N}$, si procede come in [3], pag. 275, teor. 14.

PROPOSIZIONE 4.4. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideali di $A$ tali che $\mathfrak{a}^n$ è $\mathfrak{b}$-chiuso per ogni $n\in \boldsymbol{N}$. Allora se $A$ è $\mathfrak{a}$-separato, $A$ è anche $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-separato.*

PROVA. Dobbiamo dimostrare che $\bigcap_{n\in \boldsymbol{N}} (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^n=\bigcap_{n\in \boldsymbol{N}} (\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)=(0)$. Sia $c\in \bigcap_{n\in \boldsymbol{N}} (\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n))$; allora si ha

$$c=a_1+b_1=a_2+b_2= \ldots =a_n+b_n= \ldots \quad a_i\in \mathfrak{a}^i,\ b_i\in \mathfrak{b}^i$$

da cui per ogni $i \in \boldsymbol{N}$, si ottiene $b_i \in \mathfrak{a}^i + \mathfrak{b}^m$ per ogni $m > i$, cioè $b^i \in \bigcap_{m \in \boldsymbol{N}} (\mathfrak{a}^i + \mathfrak{b}^m) = \mathfrak{a}^i$. Ne segue che $c \in \bigcap_{i \in \boldsymbol{N}} \mathfrak{a}^i$ e quindi che $c = 0$.

Sfruttando i precedenti lemmi si ottiene il

TEOREMA 4.5. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideali di $A$ tali che per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, $\mathfrak{a}^n$ è $\mathfrak{b}$-chiuso e $\mathfrak{b}^n$ è $\mathfrak{a}$-chiuso. Allora sono fatti equivalenti:*

*a) $A$ è $\mathfrak{a}$-separato e completo e $\mathfrak{b}$-separato e completo.*

*b) $A$ è $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-separato e completo.*

PROVA. *a)* $\Rightarrow$ *b)* per il lemma 4.1 e la prop. 4.4. *b)* $\Rightarrow$ *a)* per la prop. 4.3.

COROLLARIO 4.6. *Siano $A$ un anello noetheriano, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideali di $A$. Allora sono fatti equivalenti:*

*a) $A$ è $\mathfrak{a}$-separato e completo e $\mathfrak{b}$-separato e completo.*

*b) $A$ è $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-separato e completo.*

PROVA. Segue dal fatto che se $A$ è un anello noetheriano e $\mathfrak{c}$ un ideale tale che $A$ è $\mathfrak{c}$-completo, ogni ideale di $A$ è $\mathfrak{c}$-chiuso. (cfr. [3], p. 262, teor. 9).

LEMMA 4.7. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ideali di $A$ tali che $\mathfrak{b}$ è $\mathfrak{a}$-chiuso, $\widehat{A} = \widehat{(A, \mathfrak{a})}$ e $\varphi : A \to \widehat{A}$ l'omomorfismo canonico. Allora si ha $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{b})\widehat{A}) = \mathfrak{b}$.*

PROVA. Essendo $\mathfrak{a}$-chiuso, $\mathfrak{b}$ contiene $\bigcap_{n \in \boldsymbol{N}} \mathfrak{a}^n$; quindi si può supporre che $A$ sia $\mathfrak{a}$-separato e quindi metrico.

Inoltre, il completamento dell'insieme $\mathfrak{b}$ rispetto alla topologia indotta dalla $\mathfrak{a}$-topologia di $A$, coincide con la chiusura $\overline{\varphi(\mathfrak{b})}$ di $\varphi(\mathfrak{b})$ in $\widehat{A}$.

Si verifica poi facilmente che $\overline{\varphi(\mathfrak{b})}$ coincide con la chiusura $\overline{\varphi(\mathfrak{b})\widehat{A}}$ di $\varphi(\mathfrak{b})\widehat{A}$ in $\widehat{A}$.

Si ha quindi

$$\mathfrak{b} = \varphi^{-1}(\overline{\varphi(\mathfrak{b})}) = \varphi^{-1}(\overline{\varphi(\mathfrak{b})\widehat{A}}) \supset \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{b})\widehat{A}) \supset \mathfrak{b}$$

e quindi la tesi.

Osservazione 4.8. Nel § 1 abbiamo dimostrato che se $A$ è noetheriano e se $A$ è $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-separato, allora $\widehat{A}=\widehat{(A, \mathfrak{a})}$ è $\mathfrak{b}\widehat{A}$-separato e che $\widehat{(A, \mathfrak{a}+\mathfrak{b})}\simeq\widehat{(\widehat{A}, \mathfrak{b}\widehat{A})}$. Non ci è noto se ciò è vero in generale.

Si può però dimostrare la seguente

Proposizione 4.9. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideali si $A$ tali che $A$ è $\mathfrak{a}$-separato ed $\widehat{A}=\widehat{(A, \mathfrak{a})}$ è $\mathfrak{b}\widehat{A}$-separato, e sia $B$ l'anello $\widehat{(\widehat{A}, \mathfrak{a}\widehat{A})}$. Si hanno allora i seguenti fatti:*

*a)* $(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)B \cap A=(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)A$ *per ogni* $n \in \boldsymbol{N}$;

*b)* *$A$ è $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})B$-denso in $B$;*

*c)* *in $A$ la topologia indotta dalla $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-topologia di $B$ e la $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-topologia coincidono.*

Prova. *a)* Poichè $(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)A$ è $\mathfrak{a}$-chiuso ed $(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)\widehat{A}$ è $\mathfrak{b}\widehat{A}$-chiuso, per il lemma 4.7 si ha

$$(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)B \cap A=(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)B \cap \widehat{A} \cap A=(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)\widehat{A} \cap A=(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)A.$$

Ciò prova la *a*).

Consideriamo poi in $A$ come base di aperti per la topologia indotta gli intorni del tipo $(x+(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)B) \cap A$ con $x \in B$ ed $n \in \boldsymbol{N}$ e come base di aperti per la $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$-topologia gli intorni del tipo $y+(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)A$ con $y \in A$ ed $n \in \boldsymbol{N}$.

*b)* Consideriamo in $B$ un intorno del tipo $V=y+(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)B$ e dimostriamo che $V \cap A \neq \emptyset$. Sia $\{y_i\}_{i \in \boldsymbol{N}}$ una successione di elementi di $A$ che tende ad $y$ nella $\mathfrak{b}B$-topologia; allora esiste $r \in \boldsymbol{N}$ con $y-y_r \in \mathfrak{b}^n B$. Sia poi $\{a_{r_j}\}_{j \in \boldsymbol{N}}$ una successione di elementi di $A$ tendente ad $y_r$ nella $\mathfrak{a}\widehat{A}$-topologia; allora esiste $s \in \boldsymbol{N}$ con $y_r-a_{rs} \in \mathfrak{a}^n\widehat{A}$ e quindi

$$y-a_{rs}=y-y_r+y_r-a_{rs} \in (\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)B.$$

Ciò prova *b*) e prova anche che $V=a_{rs}+(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)B$ e quindi che gli intorni della base scelta per la topologia indotta sono tutti e solo quelli del tipo $(z+(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)B) \cap A$ con $z \in A$ ed $n \in \boldsymbol{N}$.

*c*) Poichè $(z+(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)B)\cap A=z+(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)A$, come segue subito da *a*), si ha la tesi.

Dimostriamo ora il seguente

LEMMA 4.10. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$ un ideale di $A$, $X$ un insieme di indeterminate su $A$, ed* $A[\widetilde{[X]}]=\widehat{(A[X], (X))}$ [1]).

*Si ha allora*

*a*) $\widehat{(A[\widetilde{[X]}], \mathfrak{a}A[\widetilde{[X]}])}\simeq\widehat{(A, \mathfrak{a})}[\widetilde{[X]}]$.

*Inoltre, se $B$ è l'anello $A[X]$ oppure l'anello $A[\widetilde{[X]}]$, si ha*

*b*) $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\mathfrak{a}, X)^nB=(\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\mathfrak{a}^n)B.$

PROVA. *a*) Si ha infatti

$$\widehat{(A[\widetilde{[X]}], \mathfrak{a}^e)}=\varprojlim A[\widetilde{[X]}]/(\mathfrak{a}^e)^n\simeq$$

$$\simeq\varprojlim((A/\mathfrak{a}^n)[\widetilde{[X]}])\simeq(\varprojlim(A/\mathfrak{a}^n))[\widetilde{[X]}]$$

l'ultimo isomorfismo essendo conseguenza della definizione di limite inverso.

*b*) Sia $S\in\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\mathfrak{a}^e, X)^n=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}((\mathfrak{a}^e)^n, X^n)$ e scriviamo $S=\Sigma S_i$ con $S_i$ forma di grado $i$. Poichè $S\in((\mathfrak{a}^e)^n, X^n)$ per ogni $n\in\boldsymbol{N}$, si ha $S_i\in(\mathfrak{a}^e)^j$ con $j>i$ e quindi i coefficienti di $S_i$ sono in $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\mathfrak{a}^n$.

PROPOSIZIONE 4.11. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$ un ideale di $A$, $X$ un insieme di indeterminate su $A$, $A[\widetilde{[X]}]=\widehat{(A[X], (X))}$. Allora si ha l'isomorfismo*

$$\widehat{(A[X], (\mathfrak{a}, X))}\simeq\widehat{(A, \mathfrak{a})}[\widetilde{[X]}].$$

---

1) $A[\widetilde{[X]}]$ è l'anello delle serie formali aventi per ciascun grado un numero finito di addendi.

PROVA. Per il lemma 4.10 *b*), si ha

$$A[X]/\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\mathfrak{a},X)^n=A[X]/(\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\mathfrak{a}^n)^e\simeq(A/\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\mathfrak{a}^n)[X]$$

quindi si può supporre che $A$ sia $\mathfrak{a}$-separato.

Per il lemma 4.10 *a*) posto $\hat{A}=(A\widehat{,}\,\mathfrak{a})$ si ha

$$\widehat{\hat{A}[[X]]}=((A[X]\widehat{,}\,(X))\widehat{,}\,\mathfrak{a}^e),$$

quindi $\widehat{\hat{A}[[X]]}$ è $\mathfrak{a}$-completo, e poichè è $(X)$-completo, per il lemma 4.1 è anche $(\mathfrak{a}, X)$-completo. Inoltre per il lemma 4.10 *b*) $\widehat{\hat{A}[[X]]}$ è anche $(\mathfrak{a}, X)$-separato. Segue poi dalla prop. 4.9, che $A[X]$ è $(\mathfrak{a}, X)$-denso in $\widehat{\hat{A}[[X]]}$ e che la $(\mathfrak{a}, X)$-topologia di $A[X]$ coincide con quella indotta dalla $(\mathfrak{a}, X)$-topologia di $\widehat{\hat{A}[[X]]}$.

§ 5. La prima parte di questo paragrafo è dedicata alla dimostrazione del teorema 5.1 che estende il teorema 3.5 ad ideali non principali ed il teorema 1.5 ad anelli non noetheriani, facendo uso di ipotesi su certi completati dell'anello $A$. Nella seconda parte si riconducono queste ipotesi ad altre sull'anello $A$.

TEOREMA 5.1. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}=(a_1, \dots, a_n)$ un ideale di tipo finito di $A$ tale che, posto $\mathfrak{a}_i=(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ ed $A_i=(A\widehat{,}\,\mathfrak{a}_i)$, si abbia*

1) *$A$ è $\mathfrak{a}$-separato;*

2) *$A_i$ è $a_iA_i$-separato per ogni $i=1, \dots, n$;*

3) *la successione $\{\mathrm{Ann}_{A_i}(a_i^m)\}_{m\in\boldsymbol{N}}$ è stazionaria per ogni $i=1, \dots, n$;*

4) *esiste $j\in\{1, \dots, n\}$ tale che $a_j^m A_j$ è $\mathfrak{a}_j A_j$-chiuso per ogni $m\in\boldsymbol{N}$.*

*Allora, se $X_1, \dots, X_n$ sono indeterminate su $A$, si ha:*

$$(A\widehat{,}\,\mathfrak{a})\simeq A[[X_1, \dots, X_n]]/(X_1-a_1, \dots, X_n-a_n).$$

PROVA. Ragioniamo per induzione sul numero $n$ dei generatori di $\mathfrak{a}$. Il teorema è vero per $n=1$ per il teorema 3.5; infatti in tal caso le ipotesi 2) e 4) sono vuote e le ipotesi 1) e 3) coincidono rispettivamente con le $a$) e $b$) del teorema 3.5.

Supponiamo che il teorema sia vero per $n-1$ e poniamo

$$B=A[[X_1, \dots, X_n]]/(X_1-a_1, \dots, X_n-a_n)$$

$$B_i=A[[X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n]]$$

$$\mathfrak{b}_i=(X_1-a_1, \dots, X_{i-1}-a_{i-1}, X_{i+1}-a_{i+1}, \dots, X_n-a_n)$$

$$\tilde{B}_i=B_i/\mathfrak{b}_i .$$

Allora si hanno gli isomorfismi

$$B\simeq\tilde{B}_i[[X_i]]/(X_i-a_i)\simeq(\widehat{A_i, (a_i)}) \qquad \text{per } i=1, \dots, n \tag{1}$$

per l'induzione e per le ipotesi 2) e 3) che permettono di applicare il teorema 3.5.

Quindi $B$ è $a_iB$-completo per ogni $i=1, \dots, n$ e quindi è $\mathfrak{a}B$-completo per il lemma 4.1.

Inoltre, se $j\in\{1, \dots, n\}$ è tale che $a_j^mA_j$ è $\mathfrak{a}_jA_j$-chiuso per ogni $m\in\boldsymbol{N}$ (ipotesi 4)), si ha:

$a$) $B$ è $a_jB$-separato per la (1);

$b$) per ogni $m\in\boldsymbol{N}$ si ha che per il lemma 2.3, $A_j/a_j^mA_j$ è $\overline{\mathfrak{a}_jA_j}$-separato e quindi

$$B/a_j^mB\simeq A_j/a_j^mA_j$$

è $\overline{\mathfrak{a}_jB}$-separato e quindi $a_j^mB$ è $\mathfrak{a}_jB$-chiuso.

Ciò prova, per la prop. 4.4, che $B$ è anche $\mathfrak{a}B$-separato.

Per l'ipotesi 2) e per la (1) si ha che $A_i$ è $a_iA_i$-separato e $B\simeq$ $\simeq(\widehat{A_i, a_iA_i})$; si può quindi applicare la prop. 5.3, per ottenere che la $\mathfrak{a}$-topologia di $A$ è quella indotta dalla $\mathfrak{a}B$-topologia di $B$ e che $A$ è $\mathfrak{a}B$-denso in $B$. La prova che $B\simeq(\widehat{A, \mathfrak{a}})$ è così completa.

Osservazione 5.2. Il teorema 5.1 è una generalizzazione del teorema 1.5, in quanto, se $A$ è un anello noetheriano ed $\mathfrak{a}=(a_1, \ldots, a_n)$ è un ideale di $A$ generante una topologia separata, l'ipotesi 2) del teorema 5.1 è verificata per il corollario 1.6, mentre la 3) è verificata perchè $A_i$ è noetheriano per $i=1, \ldots, n$ e la 4) perchè $(A_i, \mathfrak{a}_i A_i)$ è un anello di Zariski per $i=1, \ldots, n$.

Lemma 5.3. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ ideali di $A$ generanti topologie separate e tali che $\mathfrak{a}^n$ è $\mathfrak{b}$-chiuso per ogni $n\in\boldsymbol{N}$. Allora, posto $\widehat{A}=\widehat{(A, \mathfrak{a})}$ ed $\tilde{A}=\widetilde{(A, \mathfrak{b})}$, si ha*

*a) $\widehat{A}$ è $\mathfrak{b}\widehat{A}$-separato;*

*b) Se $\mathfrak{a}$ è di tipo finito, $\mathfrak{a}^n\tilde{A}$ è $\mathfrak{b}\tilde{A}$-chiuso per ogni $n\in\boldsymbol{N}$.*

Prova. *a)* Sia $c\in\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}(\mathfrak{b}\widehat{A})^n$ e sia $\{c_i\}_{i\in\boldsymbol{N}}$ una successione di elementi di $A$ tendente a $c$ nella $\mathfrak{a}\widehat{A}$-topologia.

Esiste allora una successione $\{n_i\}_{i\in\boldsymbol{N}}$ di numeri naturali tendente all'infinito tale che $c-c_i\in(\mathfrak{a}\widehat{A})^{n_i}$; del resto $c\in(\mathfrak{b}\widehat{A})^r$ per ogni $r\in\boldsymbol{N}$ e quindi

$$c_i\in c+(\mathfrak{a}\widehat{A})^{n_i}\subset(\mathfrak{a}\widehat{A})^{n_i}+(\mathfrak{b}\widehat{A})^r=(\mathfrak{a}^{n_i}+\mathfrak{b}^r)\widehat{A}$$

cioè

$$c_i\in(\mathfrak{a}^{n_i}+\mathfrak{b}^r)\widehat{A}\cap A=\mathfrak{a}^{n_i}+\mathfrak{b}^r$$

per ogni $r\in\boldsymbol{N}$, perchè $\mathfrak{a}^{n_i}+\mathfrak{b}^r$ è $\mathfrak{a}$-aperto e quindi $\mathfrak{a}$-chiuso in $A$ (lemma 5.1).

Ne segue che $c_i\in\mathfrak{a}^{n_i}\widehat{A}$ per ogni $i\in\boldsymbol{N}$ e quindi $c=0$ perchè $\widehat{A}$ è $\mathfrak{a}\widehat{A}$-separato.

*b)* Siano $n\in\boldsymbol{N}$ un numero fissato, $c$ un elemento di

$$\bigcap_{m\in\boldsymbol{N}}(\mathfrak{a}^n\tilde{A}+(\mathfrak{b}\tilde{A})^m)=\bigcap_{m\in\boldsymbol{N}}(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^m)\tilde{A}$$

e sia $\{c_i\}_{i\in\boldsymbol{N}}$ una successione di elementi di $A$ tendente a $c$ nella $\mathfrak{b}\widehat{A}$-topologia; esiste allora una successione $\{n_i\}_{i\in\boldsymbol{N}}$ di numeri naturali tendente all'infinito tale che $c-c_i\in\mathfrak{b}^{n_i}\tilde{A}$. Per ogni $m\in\boldsymbol{N}$ si ha

$$c_i \in (c + \mathfrak{b}^{n_i}\tilde{A}) \cap A \subset (\mathfrak{a}^n + \mathfrak{b}^m + \mathfrak{b}^{n_i})\tilde{A} \cap A = \mathfrak{a}^n + \mathfrak{b}^m + \mathfrak{b}^{n_i}$$

perchè $\mathfrak{a}^n + \mathfrak{b}^m + \mathfrak{b}^{n_i}$ è $\mathfrak{b}$-aperto e quindi $\mathfrak{b}$-chiuso in $A$ (lemma 4.7).

Ciò prova che $c_i \in \bigcap_{m \in \boldsymbol{N}} (\mathfrak{a}^n + \mathfrak{b}^m) = \mathfrak{a}^n$ e quindi che $c \in \mathfrak{a}^n\tilde{A}$, in quanto $\mathfrak{a}^n\tilde{A}$ è il $\mathfrak{b}$-completato di $\mathfrak{a}^n$ perchè $\mathfrak{a}$ è di tipo finito. (cfr. [1], p. 52, coroll. 2).

LEMMA 5.4. *Siano $A$ un anello, $a$ un elemento di $A$, $\mathfrak{a}$ un ideale di $A$ generante una topologia separata ed $\widehat{A} = (\widehat{A, \mathfrak{a}})$. Supponiamo che esista $t \in \boldsymbol{N}$ con*

$$\mathfrak{a}^n : (a^{t+1}) = \mathfrak{a}^n : (a^t)$$

*per ogni $n \in \boldsymbol{N}$. Allora si ha* $\mathrm{Ann}_{\widehat{A}}(a^{t+1}) = \mathrm{Ann}_{\widehat{A}}(a^t)$.

PROVA. Siano $c \in \mathrm{Ann}_{\widehat{A}}(a^{t+1})$, $\{c_i\}_{i \in \boldsymbol{N}}$ una successione di elementi di $A$ tendente a $c$ nella $\mathfrak{a}\widehat{A}$-topologia ed $\{n_i\}_{i \in \boldsymbol{N}}$ una successione di numeri naturali tendente all'infinito tale che $c - c_i \in (\mathfrak{a}\widehat{A})^{n_i}$ per ogni $i \in \boldsymbol{N}$.

Poichè $ca^{t+1} = 0$, si ha

$$c_i a^{t+1} \in (\mathfrak{a}\widehat{A})^{n_i} \cap A = \mathfrak{a}^{n_i}.$$

Quindi

$$c_i \in \mathfrak{a}^{n_i} : (a^{t+1}) = \mathfrak{a}^{n_i} : (a^t)$$

e ciò implica che $c_i a^t \in \mathfrak{a}^{n_i}$. Ma allora $ca^t = 0$ cioè $c \in \mathrm{Ann}_{\widehat{A}}(a^t)$.

Siamo ora in grado di provare il seguente

TEOREMA 5.5. *Siano $A$ un anello, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un ideale di tipo finito di $A$ tale che, posto*

$$\mathfrak{a}_i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

*si abbia*

1) *$A$ è $\mathfrak{a}$-separato;*

2) *$\mathfrak{a}_i^m$ è $(a_i)$-chiuso per ogni $m \in \boldsymbol{N}$ ed ogni $i = 1, \ldots, n$;*

3) *Esiste $r \in \boldsymbol{N}$ tale che $\mathfrak{a}_i^m : (a_i^{r+1}) = \mathfrak{a}_i^m : (a_i^r)$ per ogni $m \in \boldsymbol{N}$ ed ogni $i = 1, \ldots, n$;*

4) *Esiste* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *tale che* $(a_j)^m$ *è* $\mathfrak{a}_j$*-chiuso per ogni* $m \in \boldsymbol{N}$.

*Siano* $X_1, \ldots, X_n$ *indeterminate su* $A$. *Allora si ha l'isomorfismo*

$$(\widehat{A, \mathfrak{a}}) \simeq A[[X_1, \ldots, X_n]]/(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n).$$

PROVA. Segue dal fatto che le ipotesi 2) e 4) implicano rispettivamente le ipotesi 2) e (4) del teorema 5.1 per il lemma 5.3, e l'ipotesi 3) implica l'ipotesi 3 del teorema 5.1 per il lemma 5.4.

ESEMPIO 5.6. Siano $A$ un anello ed $X$, $Y$, $Z$, $T$, $W$ indeterminate su $A$. Si ha allora l'isomorfismo

$$(\widehat{A[X, Y, Z], (XY, XZ)}) \simeq A[X, Y, Z][[T, W]]/(T - XY, W - XZ).$$

Infatti, le ipotesi 1), 3) del teorema 5.5 sono ovviamente verificate, mentre le ipotesi 2) e 4) sono verificate per la prop. 2.1.

## BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N.: *Algèbre Commutative ch. III e IV.* Hermann 1961.

[2] NAGATA, M.: *Local rings.* Interscience Publishers 1962.

[3] ZARISCHI, O., SAMUEL, P.: *Commutative Algebra Voll. I e II.* Van Nostrand 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 febbraio 1970.