RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARCO GRANDIS

I subquozienti nelle categorie abeliane

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 63-97

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__63_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

I SUBQUOZIENTI NELLE CATEGORIE ABELIANE

MARCO GRANDIS *)

Lo scopo di questo lavoro è di studiare i subquozienti, i morfismi indotti tra essi, e le condizioni di componibilità di tali morfismi; ciò dovrebbe fornire la base per ulteriori ricerche sulle sequenze spettrali e loro rappresentazioni diagrammatiche.

Se G è un gruppo abeliano, e H, K sono suoi sottogruppi $(K \subset H)$, H/K viene detto subquoziente di G. Il diagramma di inclusioni e proiezioni canoniche

$$
(1) \qquad \begin{array}{ccc}
H/K & \xrightarrow{i} & G/K \\
\uparrow{\scriptstyle p'} & & \uparrow{\scriptstyle p} \\
H & \xrightarrow{i'} & G
\end{array}
$$

mostra che H/K può pensarsi sia come sottoggetto di un quoziente (G/K) di G, sia come quoziente di un sottoggetto (H) di G.

Supponiamo ora di avere un omomorfismo di gruppi $f: G \to G'$, e subquozienti H/K e H'/K' rispettivamente di G e G'; se

$$f(H) \subset H' \qquad f(K) \subset K'$$

f induce un omomorfismo $f': H/K \to H'/K'$; se invece

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica dell'Università, via L. B. Alberti 4, 16132 - Genova.

$$H' \subset f(H) \qquad f^{-1}(K') \subset K$$

si può definire in modo ovvio un omomorfismo $f'' : H'/K' \to H/K$ [1]).

Per trattare agevolmente queste situazioni, e ad esempio poter definire in ogni caso un « morfismo » di H/K in H'/K' « indotto » da f, occorre considerare come *morfismi* tra due gruppi abeliani A e B le relazioni (o *relazioni additive*) di A in B, ovvero i sottogruppi di $A \oplus B$; un morfismo di A in B, identificato al proprio grafico, diviene relazione di A in B; la composizione tra relazioni è così definita: se $\alpha \subset A \oplus B$, $\beta \subset B \oplus C$ allora $\beta\alpha$ è il sottogruppo di $A \oplus C$ costituito dalle coppie (a, c) per cui esiste $b \in B$ tale che: $(a, b) \in \alpha$, $(b, c) \in \beta$. Una relazione di A in B, $\alpha \subset A \oplus B$, individua in modo ovvio la relazione *involuta* $\tilde{\alpha} \subset B \oplus A$, di B in A; inoltre le relazioni di A in B costituiscono un reticolo modulare rispetto all'inclusione.

In definitiva la categoria $\mathcal{G}$ dei gruppi abeliani risulta immersa nella categoria $\tilde{\mathcal{G}}$ delle relazioni tra gruppi abeliani, avente gli stessi oggetti, dotata di un'*involuzione* $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ (endofuntore controvariante, identico sugli oggetti e involutorio sui morfismi: $\tilde{\tilde{\alpha}} = \alpha$) e di un ordine tra mappe di uguali estremi, compatibile con la composizione e con l'involuzione. Altre proprietà fondamentali di $\tilde{\mathcal{G}}$ sono l'uguaglianza $\alpha = \alpha\tilde{\alpha}\alpha$, valida per ogni relazione α, e le caratterizzazioni di Hilton dei monomorfismi e degli epimorfismi ([2], teor. 4.10; o qui, 1.13). Gli isomorfismi di $\mathcal{G}$ coincidono con quelli di $\tilde{\mathcal{G}}$.

Si può ora riprendere il discorso dall'inizio. Il diagramma (1) fornisce *una* relazione

$$(2) \qquad \varphi = \tilde{p}i = i'\tilde{p}' : H/K \to G$$

(ciò dipende dal fatto che il quadrato è esatto); per le caratterizzazioni su ricordate, φ è un monomorfismo di $\tilde{\mathcal{G}}$ (cioè è cancellabile a sinistra), e viceversa ogni monomorfismo di $\tilde{\mathcal{G}}$ avente codominio G possiede fatto-

---

1) Queste situazioni algebriche sono piuttosto frequenti: ad esempio nella sequenza spettrale di un complesso filtrato A, i termini $E_r^{p,q}$ sono subquozienti di A^{p+q} e certi omorfismi tra essi, indotti dal differenziale di A, « direttamente » o « in senso inverso », vengono detti rispettivamente *trasgressioni* e *sospensioni* (quando esistano).

rizzazioni del tipo (2). Si è così portati a definire *subquozienti* di un gruppo abeliano i sottoggetti di quello in $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Data poi una relazione $\alpha : G \to G'$ e subquozienti $\varphi : L \to G$, $\psi : M \to G'$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\alpha"] & G' \\ L \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "\alpha'"] & M \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd} \tag{3}$$

la relazione $\alpha' = \tilde{\psi}\alpha\varphi : L \to M$ sarà detta *indotta da* α *su* φ *e* ψ; ciò comprende i due esempi precedentemente trattati: f' e f'' sono indotte rispettivamente da f e da $\tilde{f}$, e sono omomorfismi in virtù delle ipotesi fatte. L'induzione rispetta le identità (1_G induce 1_L su φ e φ, giacchè la condizione $\tilde{\varphi}\varphi = 1$ è una delle caratterizzazioni dei monomorfismi di $\tilde{\mathfrak{G}}$) e l'involuzione ($\tilde{\alpha}$ induce $\tilde{\alpha}'$ su ψ e φ) ma non necessariamente la composizione (cfr. ad es. il diagramma (3.4) del n. 3). Si possono tuttavia dare condizioni abbastanza semplici (3.2 e 3.3) perchè ciò avvenga.

Infine, tra i subquozienti di un gruppo abeliano G si possono considerare l'*ordine canonico* (ossia l'ordine usuale tra soggetti di G relativamente a $\tilde{\mathfrak{G}}$), che equivale a

$$H/K < H'/K' \quad \text{se e solo se} \quad H \subset H' \,\&\, K \supset K'$$

e l'*ordine diretto*:

$$H/K \leq H'/K' \quad \text{se e solo se} \quad H \subset H' \,\&\, K \subset K'.$$

Relativamente al primo i subquozienti di G costituiscono un semireticolo superiore, relativamente al secondo un reticolo modulare (2.4).

Quanto precede resta valido in ogni categoria abeliana.

Il piano del lavoro è il seguente: il n. 1 definisce assiomaticamente la categoria delle relazioni $\tilde{\mathfrak{A}}$ di una categoria abeliana $\mathfrak{A}$, riportandone proprietà per lo più già note; il n. 2 introduce i subquozienti come sottoggetti relativamente ad $\tilde{\mathfrak{A}}$, e gli ordini canonico e diretto tra essi; il n. 3 le relazioni indotte e loro condizioni di componibilità. Molte dimostrazioni e alcuni lemmi sono rinviati rispettivamente ai n^i 4 e 5.

Convenzioni. Se $\mathcal{C}$ è una categoria e A, B sono suoi oggetti, $\mathcal{C}(A, B)$ indica l'insieme dei morfismi di $\mathcal{C}$ di A in B, e se u è tale: $Dom\, u = A$, $Cod\, u = B$. Un monomorfismo (o mono) è un morfismo cancellabile a sinistra [2]); tra monomorfismi di codominio A è definito il preordine canonico ($<$) e la relativa equivalenza ($\sim$); i sottoggetti di A si ottengono scegliendo uno ed un solo monomorfismo in ogni classe di equivalenza; per il sottoggetto massimo di A si sceglie sempre l'identità 1_A di A. Analogamente per epimorfismi (epi) e quozienti.

$\mathcal{A}$ indica sempre una categoria abeliana; se $u \in \mathcal{A}(A, B)$, i morfismi

$$im\, u : Im\, u \to B \qquad coim\, u : A \to Coim\, u$$

$$coker\, u : B \to Coker\, u \qquad ker\, u : Ker\, u \to A$$

sono sottoggetti o quozienti di A o B. Per le nozioni di quadrato *esatto*, *fibrato* (= *cartesiano* = *pull-back*), *cofibrato* (= *cocartesiano* = *push-out*), *bifibrato* (= *bicartesiano* = *push-me-pull-you*) cfr. Hilton [2].

La parola « insieme » viene qui usata senza riferimento ad alcuna sistematica. Ponendosi in una teoria del tipo *insiemi-classi* e volendo che in ogni categoria le mappe tra due oggetti costituiscono un *insieme*, è necessario supporre altresì che i sottoggetti di un qualunque oggetto della categoria abeliana $\mathcal{A}$ costituiscano un *insieme*, per poter costruire $\tilde{\mathcal{A}}$ (le relazioni di A in B corrispondendo ai sottogetti di $A \oplus B$ in $\mathcal{A}$).

1. LA CATEGORIA DELLE RELAZIONI DI UNA CATEGORIA ABELIANA

Tale categoria venne studiata da Mac Lane [3], Puppe [5], Hilton [2]. Questo numero riunisce parte dei loro risultati, aggiungendone al-

[2]) Questa condizione è in generale troppo debole (cfr. Arduini [1]*a*) per una definizione soddisfacente); poichè però qui si considerano solo categorie abeliane e loro categorie di relazioni (ove tutti i mono hanno inverso a sinistra: cfr. 1.13) il problema non si pone.

cuni; può quindi essere saltato o semplicemente scorso da chi abbia presente l'argomento.

Per chi intenda seguirlo, le dimostrazioni (al n. 4) vorrebbero essere le più semplici per questo contesto. Si consiglia ovviamente di tener presente il caso concreto dei gruppi abeliani, esposto nell'introduzione.

La definizione qui adottata di categoria delle relazioni $\tilde{\mathcal{A}}$ di una categoria abeliana $\mathcal{A}$ è diversa dalle precedenti, a loro volta diverse tra loro (tutte essendo però equivalenti): qui si assiomatizza il passaggio da $\mathcal{A}$ ad $\tilde{\mathcal{A}}$, mentre Puppe caratterizza le « categorie con involuzione » che sono categorie di relazioni di categorie abeliane; Mac Lane e Hilton danno definizioni costruttive differenti .

1. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana: diremo *categoria delle relazioni* (o *corrispondenze*) *di* $\mathcal{A}$ la categoria $\tilde{\mathcal{A}}$ che, munita di un endofuntore controvariante $I : \alpha \mapsto \tilde{\alpha}$, è caratterizzata (come si vedrà) dalle seguenti condizioni:

(R.1) $\mathcal{A}$ è una sottocategoria di $\tilde{\mathcal{A}}$ avente gli stessi oggetti;

(R.2) I è identico sugli oggetti e involutorio sui morfismi ($\tilde{\tilde{\alpha}}=\alpha$);

(R.3) per ogni morfismo α di $\tilde{\mathcal{A}}$ esistono morfismi u, v di $\mathcal{A}$ tali che $\alpha=\tilde{v}u$;

(R.4) dati i diagrammi di $\mathcal{A}$:

$$(1.1)\qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ & & \uparrow{\scriptstyle v} \\ & & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u'} & X' \\ & & \uparrow{\scriptstyle v'} \\ & & B \end{array}$$

si ha $\tilde{v}u=\tilde{v}'u'$ se e solo se tali diagrammi hanno ugual prodotto fibrato (= *pull-back*) in $\mathcal{A}$;

(R.5) dato il diagramma di $\mathcal{A}$:

$$(1.2) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"] & B \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

si ha $\tilde{v}u = u'\tilde{v}'$ se e solo se il quadrato è esatto.

I morfismi di $\tilde{\mathcal{A}}$ saranno anche detti *relazioni* (o *corrispondenze*) di $\mathcal{A}$; I è l'*involuzione* di $\tilde{\mathcal{A}}$, e $I(\alpha) = \tilde{\alpha}$ l'*involuta* della relazione α. Un morfismo di $\tilde{\mathcal{A}}$ contrassegnato da lettera latina è supposto in $\mathcal{A}$.

Per (R.1, 2) la categoria $\tilde{\mathcal{A}}$ è isomorfa alla propria duale, e le relazioni del tipo $\tilde{u}$ $(u \in \mathcal{A})$ costituiscono una sottocategoria $\mathcal{A}^0$ di $\tilde{\mathcal{A}}$ isomorfa alla categoria duale di $\mathcal{A}$. In presenza di (R.5), gli assiomi (R.3) e (R.4) equivalgono ai rispettivi duali:

(R.3') per ogni morfismo α di $\tilde{\mathcal{A}}$ esistono morfismi u, v di $\mathcal{A}$ tali che $\alpha = u\tilde{v}$;

(R.4') dati i diagrammi di $\mathcal{A}$:

$$(1.3) \qquad \begin{tikzcd} A \\ Y \arrow[u, "v"] \arrow[r, "u"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \\ Y' \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"] & B \end{tikzcd}$$

si ha $u\tilde{v} = u'\tilde{v}'$ se e solo se tali diagrammi hanno ugual coprodotto fibrato (= *push-out*) in $\mathcal{A}$.

Per l'esistenza di $\tilde{\mathcal{A}}$:

1.1. La categoria delle corrispondenze di $\mathcal{A}$ costruita in Hilton [2, § 4] soddisfa gli assiomi (R.1-5). Dim. al n. 4.

$\tilde{\mathfrak{A}}$ è unica in questo senso: se una categoria $\mathfrak{A}'$ munita di endofuntore controvariante soddisfa pure gli assiomi detti, esiste ed è unico il funtore $\tilde{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}'$ che commuti con le immersioni di $\mathfrak{A}$ e con le involuzioni, ed è un isomorfismo di categorie. Più in generale:

1.2. Un funtore esatto $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tra categorie abeliane si estende in modo unico ad un funtore $\tilde{T} : \tilde{\mathfrak{A}} \to \tilde{\mathfrak{B}}$ compatibile con le involuzioni di $\tilde{\mathfrak{A}}$ e $\tilde{\mathfrak{B}}$. Se T è fedele [3]), o immersione, o isomorfismo, anche $\tilde{T}$ è tale. Se $U : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ è pure un funtore esatto tra categorie abeliane, $\tilde{U}\tilde{T} = (UT)^{\sim}$; infine per il funtore identico $1_{\mathfrak{A}}$ si ha: $(1_{\mathfrak{A}})^{\sim} = 1_{\tilde{\mathfrak{A}}}$.
Dim. al n. 4.

Se $T, U : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sono funtori tra categorie abeliane, un morfismo funtoriale $\Gamma : T \to U$ sarà detto *esatto* se per ogni morfismo $u \in \mathfrak{A}(A, B)$ il quadrato

$$(1.4)\qquad \begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{\Gamma(A)} & U(A) \\ \downarrow{\scriptstyle T(u)} & & \downarrow{\scriptstyle U(u)} \\ T(B) & \xrightarrow{\Gamma(B)} & U(B) \end{array}$$

è esatto in $\mathfrak{B}$. Ciò è ad esempio vero se Γ è un isomorfismo funtoriale.

1.3. Se $T, U : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ sono funtori esatti tra categorie abeliane, un morfismo funtoriale di T in U è esatto se e solo se è anche morfismo di $\tilde{T}$ in $\tilde{U}$. Dim. al n. 4.

1.4. *Corollario.* Se i funtori $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $U : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ costituiscono un'equivalenza tra categorie (abeliane), lo stesso fanno $\tilde{T}$ ed $\tilde{U}$.

II. Sottoggetti associati ad una relazione.

Sia $\alpha = \tilde{v}u = u'\tilde{v}'$ una relazione di A in B:

---

[3]) Conformemente a Mitchell [4, p. 51] T si dice fedele se le applicazioni $\mathfrak{A}(A, B) \to \mathfrak{B}(TA, TB)$ sono iniettive; si dice immersione (*imbedding*) se inoltre è iniettivo sugli oggetti.

$$(1.2)\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"] & B \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

interessano i seguenti monomorfismi di $\mathcal{A}$

— *valori di* α: $\quad val\,\alpha = im_{\mathcal{A}}\, u'$ (sottoggetto di B)

— *indeterminazione di* α: $\quad ind\,\alpha = ker_{\mathcal{A}}\, v$ (sottoggetto di B)

— *definizione di* α: $\quad def\,\alpha = im_{\mathcal{A}}\, v' = val\,\tilde{\alpha}$ (sottoggetto di A)

— *annullatore di* α: $\quad ann\,\alpha = ker_{\mathcal{A}}\, u = ind\,\tilde{\alpha}$ (sottoggetto di A)

e gli oggetti [4]): $Val\,\alpha = Dom\,val\,\alpha = Im_{\mathcal{A}}\, u'$, etc.

Tali sottoggetti non dipendono dalle fattorizzazioni di α in (1.2), perchè se ad esempio $\alpha = \tilde{v}u = \tilde{v}_1 u_1$, per ogni monomorfismo $m : K \to B$ si ha $vm = 0$ se e solo se $v_1 m = 0$, come risulta da (R.4) e dai diagrammi

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & \cdot \\ K \arrow[u, "0"] \arrow[r, "m"] & B \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_1"] & \cdot \\ K \arrow[u, "0"] \arrow[r, "m"] & B \arrow[u, "v_1"'] \end{tikzcd}$$

quindi $ker\,v = ker\,v_1$. Per $val\,\alpha$ si ragiona analogamente su $coker\,u'$.

Per 5.1 $ind\,\alpha \prec val\,\alpha$, $ann\,\alpha \prec def\,\alpha$.

Per ogni funtore esatto T, $\tilde{T}$ conserva i sottoggetti suddetti: $T(val\,\alpha) \sim val\,(\tilde{T}\alpha)$, etc.

La relazione α si dice *V-regolare* (risp. *I-*, $\tilde{V}$*-*, $\tilde{I}$*-regolare*) se $val\,\alpha = 1$

---

4) L'immagine di α in senso categoriale (Arduini [1] *b*)) non è Val α, ma Def α/ Ann $\alpha \simeq$ Val α/ Ind α (cfr. 3, III); in $\tilde{\mathcal{A}}$ non ci sono zeri [2, p. 267] e quindi non si parla di Ker α.

(risp. *ind* $\alpha=0$, *def* $\alpha=1$, *ann* $\alpha=0$); α è V-regolare se e solo se $\tilde{\alpha}$ è $\tilde{V}$-regolare; analogamente per I e $\tilde{I}$.

1.5. Siano $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ relazioni di $\mathfrak{A}$:

a) *def* $\beta\alpha <$ *def* α, *val* $\beta\alpha <$ *val* β, *ann* $\beta\alpha >$ *ann* α, *ind* $\beta\alpha >$ *ind* β;

b) *val* $\alpha <$ *def* β implica *def* $\beta\alpha =$ *def* α;

c) *val* $\alpha >$ *def* β implica *val* $\beta\alpha =$ *val* β;

d) *ind* $\alpha >$ *ann* β implica *ann* $\beta\alpha =$ *ann* α;

e) *ind* $\alpha <$ *ann* β implica *ind* $\beta\alpha =$ *ind* β.

Dim. al n. 4.

III. Inclusione tra relazioni.

Si può realizzare una corrispondenza biunivoca tra $\tilde{\mathfrak{A}}(A, B)$ e l'insieme $S(A \oplus B)$ dei sottoggetti di $A \oplus B$ in $\mathfrak{A}$, e trasportare quindi al primo la struttura reticolare del secondo. In questa sezione indicheremo con

$$(1.5) \qquad A \xrightarrow{i_1} A \oplus B \xrightarrow{p_1} A, \qquad B \xrightarrow{i_2} A \oplus B \xrightarrow{p_2} B$$

le inclusioni e proiezioni canoniche.

1.6. Esistono due applicazioni reciproche

$$h : S(A \oplus B) \to \tilde{\mathfrak{A}}(A, B) \qquad k : \tilde{\mathfrak{A}}(A, B) \to S(A \oplus B)$$

caratterizzate dalle seguenti condizioni:

a) se $m : H \to A \oplus B$ è un sottoggetto, $h(m)$ è la relazione $\tilde{v}u = u'\tilde{v}'$ individuata dal quadrato bifibrato

$$(1.6) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & (A \oplus B)/H \\ H \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"] & B \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

dove: $u' = p_2 m$, $v' = p_1 m$, $u = (coker\ m)i_1$, $v = -(coker\ m)i_2$;

b) se $\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}(A, B)$ e $\alpha = \tilde{v}u = u'\tilde{v}'$ (cfr. (1.2)):

$$k(\alpha) = ker\,(u,\ -v) = im \begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

dove

$$(u,\ -v) = up_1 - vp_2 : A \oplus B \to Cod\,u$$

$$\begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix} = i_1 v' + i_2 u' : Dom\,u' \to A \oplus B.$$

DIM. h è evidentemente ben definita dalla condizione *a*); cosippure k da *b*), per (R.3-5). Se $m \in S(A \oplus B)$:

$$kh(m) = im \begin{pmatrix} p_1 m \\ p_2 m \end{pmatrix} = im\,m = m.$$

Essendo infine k iniettiva per (R.4), la tesi è provata c.v.d.

1.7. Se $\alpha,\ \beta \in \tilde{\mathcal{A}}(A, B)$, sono condizioni equivalenti:

a) $k(\alpha) < k(\beta)$;

b) esistono $u,\ v,\ u',\ v'$ in $\mathcal{A}$ tali che $\alpha = u'\tilde{v}'$, $\beta = \tilde{v}u$ e $uv' = vu'$ (commutatività di (1.2));

c) se $\alpha = u'\tilde{v}'$, $\beta = \tilde{v}u$ allora $uv' = vu'$.

DIM. Basta considerare il diagramma (1.2), commutativo se e solo se

$$im \begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix} < ker\,(u,\ -v). \qquad \text{c.v.d.}$$

Se $\alpha,\ \beta \in \tilde{\mathcal{A}}(A, B)$, diremo che $\alpha \subset \beta$ se sono verificate le condizioni equivalenti di 1.7; per 1.6 $\tilde{\mathcal{A}}(A, B)$ diviene così un reticolo modulare, isomorfo a $S(A \oplus B)$. Se $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è un funtore esatto tra categorie abeliane, $\tilde{T}$ conserva le inclusioni.

1.8. La composizione e l'involuzione in $\tilde{\mathcal{A}}$ sono compatibili con l'inclusione: cioè se

$$\alpha, \alpha' \in \tilde{\mathfrak{A}}(A, B); \qquad \beta, \beta' \in \tilde{\mathfrak{A}}(B, C); \qquad \alpha \subset \alpha'; \qquad \beta \subset \beta'$$

allora

$$\beta\alpha \subset \beta'\alpha'; \qquad \tilde{\alpha} \subset \tilde{\alpha}'.$$

Infine l'ordine indotto da $\tilde{\mathfrak{A}}(A, B)$ su $\mathfrak{A}(A, B)$ è l'uguaglianza ($u \subset v$ implica $u = v$). Dim. al n. 4.

1.9. Se $\alpha, \beta \in \tilde{\mathfrak{A}}(A, B)$, $\alpha \subset \beta$ implica:

$$\mathit{def}\,\alpha < \mathit{def}\,\beta, \quad \mathit{ann}\,\alpha < \mathit{ann}\,\beta, \quad \mathit{val}\,\alpha < \mathit{val}\,\beta, \quad \mathit{ind}\,\alpha < \mathit{ind}\,\beta.$$

Dim. al n. 4.

1.10. (Puppe [5], 1.13). Siano α e β relazioni di $\mathfrak{A}$:

a) se α e β hanno ugual dominio: $\operatorname{def}\alpha > \operatorname{def}\beta \Leftrightarrow \beta\tilde{\alpha}\alpha \supset \beta$

b) se α e β hanno ugual dominio: $\operatorname{ann}\alpha < \operatorname{ann}\beta \Leftrightarrow \beta\tilde{\alpha}\alpha \subset \beta$

c) se α e β hanno ugual codominio: $\operatorname{val}\alpha > \operatorname{val}\beta \Leftrightarrow \alpha\tilde{\alpha}\beta \supset \beta$

d) se α e β hanno ugual codominio: $\operatorname{ind}\alpha < \operatorname{ind}\beta \Leftrightarrow \alpha\tilde{\alpha}\beta \subset \beta$.

Dim. al n. 4.

1.11. *Corollario.* Se α è una relazione di $\mathfrak{A}$, $\alpha\tilde{\alpha}\alpha = \alpha$.

1.12. *Corollario.* Se α è una relazione di $\mathfrak{A}$:

a) α è $\tilde{V}$-regolare se e solo se $\tilde{\alpha}\alpha \supset 1$

b) α è $\tilde{I}$-regolare se e solo se $\tilde{\alpha}\alpha \subset 1$

c) α è V-regolare se e solo se $\alpha\tilde{\alpha} \supset 1$

d) α è I-regolare se e solo se $\alpha\tilde{\alpha} \subset 1$.

IV. Monomorfismi, epimorfismi e morfismi di $\mathfrak{A}$ in $\tilde{\mathfrak{A}}$.

1.13. *Caratterizzazione dei mono e degli epi di* $\tilde{\mathfrak{A}}$. (Hilton [2], 4.10). Sia $\alpha \in \tilde{\mathfrak{A}}(A, B)$: le condizioni *a*)-*e*) (risp. *a'*)-*e'*)) sono equivalenti:

a) α è mono in $\tilde{\mathcal{A}}$

b) $\tilde{\alpha}\alpha = 1$

c) $\alpha = \tilde{v}u$, con u mono e v epi in $\mathcal{A}$

d) $\alpha = u'\tilde{v}'$, con u' mono e v' epi in $\mathcal{A}$

e) α è $\tilde{V}\tilde{I}$-regolare

a') α è epi in $\tilde{\mathcal{A}}$

b') $\alpha\tilde{\alpha} = 1$

c') $\alpha = \tilde{v}u$, con u epi e v mono in $\mathcal{A}$

d') $\alpha = u'\tilde{v}'$, con u' epi e v' mono in $\mathcal{A}$

e') α è VI-regolare.

Inoltre α è mono in $\tilde{\mathcal{A}}$ se e solo se $\tilde{\alpha}$ è epi. Un morfismo di $\mathcal{A}$ è mono (risp. epi) in $\mathcal{A}$ se e solo se lo è in $\tilde{\mathcal{A}}$. Dim. al n. 4.

Quindi i mono (risp. epi) di $\tilde{\mathcal{A}}$ sono tutti sezioni (risp. retrazioni), con retrazione (risp. sezione) data dalla propria involuta. Saranno anche detti *monorelazioni* (risp. *epirelazioni*) di $\mathcal{A}$.

1.14. *Fattorizzazioni dei mono e degli epi di* $\tilde{\mathcal{A}}$. Se $\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}\,(A, B)$ è meno (risp. epi), fattorizzazioni dei tipi *c*) e *d*) (risp. *c'*) e *d'*)) in 1.13 sono date da (1.8) (risp. (1.8')):

$$(1.8) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_0"] & B/\,Ind\,\alpha \\ Val\,\alpha \arrow[u, "v'_0"] \arrow[r, "u'_0"] & B \arrow[u, "v_0"'] \end{tikzcd}$$

$$(1.8') \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_0"] & A/\,Ann\,\alpha \\ Def\,\alpha \arrow[u, "v'_0"] \arrow[r, "u'_0"] & B \arrow[u, "v_0"'] \end{tikzcd}$$

dove: $u'_0 = val\,\alpha$, $v_0 = coker\,(ind\,\alpha)$, $u_0 = v_0\alpha$, $v'_0 = \tilde{\alpha}u'_0$.
(risp.: $u_0 = coker\,(ann\,\alpha)$, $v'_0 = def\,\alpha$, $v_0 = u_0\tilde{\alpha}$, $u'_0 = \alpha v'_0$).

Se poi $\alpha = \tilde{v}u = u'\tilde{v}'$ sono altre fattorizzazioni dei tipi detti, esistono e sono unici gli isomorfismi i, j di $\mathcal{A}$ tali che:

$$u = iu_0 \qquad v = iv_0 \qquad u' = u'_0\, j \qquad v' = v'_0\, j.$$

Dim. al n. 4.

1.15. *Caratterizzazione dei morfismi di* $\mathcal{A}$ *e di* $\mathcal{A}^0$ *entro* $\tilde{\mathcal{A}}$.

Sia $\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}\,(A, B)$: le condizioni *a*), *b*), *c*) (risp. *a'*), *b'*), *c'*)) sono equivalenti:

a) $\alpha \in \mathcal{A}$	*a'*) $\alpha \in \mathcal{A}^0$
b) $\breve{\alpha}\alpha \supset 1$, $\alpha\breve{\alpha} \subset 1$	*b'*) $\alpha\breve{\alpha} \supset 1$, $\breve{\alpha}\alpha \subset 1$
c) α è $\tilde{V}I$-regolare	*c'*) α è $V\tilde{I}$-regolare.

Se α sta in $\mathcal{A}$: $val\,\alpha = im_{\mathcal{A}}\alpha$, $ann\,\alpha = ker_{\mathcal{A}}\alpha$.

Se α sta in $\mathcal{A}^0$: $def\,\alpha = im_{\mathcal{A}}\breve{\alpha}$, $ind\,\alpha = ker_{\mathcal{A}}\breve{\alpha}$. Dim. al n. 4.

1.16. Se $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{A}}\,(A, B)$, α è $\tilde{V}$-regolare, β è I-regolare e $\alpha \subset \beta$, allora $\alpha = \beta \in \mathcal{A}$.

Dim. Per 1.9 α e β sono $\tilde{V}I$-regolari, cioè (1.15) stanno in $\mathcal{A}$. Si conclude con 1.8 (affermazione finale). c.v.d.

1.17. *Caratterizzazione degli isomorfismi di* $\tilde{\mathcal{A}}$. Se α è una relazione sono condizioni equivalenti:

a) α è isomorfismo in $\tilde{\mathcal{A}}$

b) α è isomorfismo in $\mathcal{A}$

c) $\breve{\alpha}\alpha = 1$, $\alpha\breve{\alpha} = 1$

d) α è epi e mono in $\tilde{\mathcal{A}}$

e) $\alpha, \breve{\alpha} \in \mathcal{A}$

f) α è $V\tilde{V}I\tilde{I}$-regolare.

Se esse sono verificate, $\breve{\alpha}$ è l'inverso di α.

Dim. Anzitutto *f*) equivale a *c*) per 1.12, a *d*) per 1.13 e ad *e*) per 1.15; *b*) implica *a*), e questo *d*) in modo ovvio; *d*) implica *c*) ed *e*) per quanto detto, e la loro congiunzione implica *b*). c.v.d.

1.18. *Corollario di 1.13 e 1.15.* I monomorfismi di $\mathcal{A}$ coincidono con i monomorfismi I-regolari di $\tilde{\mathcal{A}}$.

1.19. *Corollario di 1.13.* Se T è un funtore esatto tra categorie abeliane, $\tilde{T}$ conserva monorelazioni ed epirelazioni.

La fattorizzazione canonica delle relazioni attraverso coimmagine e immagine è rimandata a 3.III, coinvolgendo essa i subquozienti e le relazioni indotte.

2. SUBQUOZIENTI

I. Monomorfismi e sottoggetti in $\tilde{\mathcal{A}}$.

Come per ogni categoria, i monomorfismi di $\tilde{\mathcal{A}}$ sono soggetti al *preordine canonico* ($<$) e alla relativa *equivalenza* ($\sim$).

2.1. *Caratterizzazioni del preordine canonico tra monorelazioni.* Se $\varphi : L \to A$, $\psi : M \to A$ sono monorelazioni, le condizioni *a*)-*c*) (e rispettivamente *a'*)-*d'*)) sono equivalenti

a) $\varphi < \psi$;

b) $\psi\tilde{\psi}\varphi = \varphi$;

c) $val\, \varphi < val\, \psi$, $ind\, \varphi > ind\, \psi$;

a') $\varphi \sim \psi$;

b') $\psi\tilde{\psi}\varphi = \varphi$, $\varphi\tilde{\varphi}\psi = \psi$;

c') $val\, \varphi = val\, \psi$, $ind\, \varphi = ind\, \psi$;

d') $\varphi\tilde{\varphi} = \psi\tilde{\psi}$.

DIM. *b*) implica *a*) in modo ovvio; *a*) implica *c*) per 1.5 *a*); *c*) implica *b*) per 1.10. Di conseguenza *a'*), *b'*,) *c'*) sono equivalenti; inoltre *b'*) implica *d'*):

$$\varphi\tilde{\varphi} = (\psi\tilde{\psi}\varphi)\tilde{\varphi} = \psi(\tilde{\psi}\varphi\tilde{\varphi}) = \psi\tilde{\psi}$$

e d') implica b'), sfruttando 1.11:

$$\psi\tilde{\psi}\varphi=\varphi\tilde{\varphi}\varphi=\varphi \qquad \varphi\tilde{\varphi}\psi=\psi\tilde{\psi}\psi=\psi. \qquad \text{c.v.d.}$$

I sottoggetti di A relativamente ad $\tilde{\mathcal{A}}$ si ottengono scegliendo in ogni classe di equivalenza di monorelazioni aventi codominio A, uno ed un solo morfismo. Supporremmo però che tale scelta sia compatibile con le scelte dei sottoggetti e dei quozienti in $\mathcal{A}$, cioè che se u è sottoggetto (risp. quoziente) in $\mathcal{A}$, allora u (risp. $\tilde{u}$) sia sottoggetto in $\tilde{\mathcal{A}}$ [5]).

II. Subquozienti di $\mathcal{A}$.

Sia $\varphi : L \to A$ una monorelazione: per 1.14, $\varphi=\tilde{v}u=u'\tilde{v}'$

(2.1)
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "u"] & A/Ind\,\varphi \\ Val\,\varphi \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"] & A \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

dove $u'= val\,\varphi$, $v= coker\,(ind\,\varphi)$, u è mono e v' epi (in $\mathcal{A}$). L'assegnazione di φ consente quindi di considerare L, relativamente ad $\mathcal{A}$, come sottoggetto di un quoziente $(A/Ind\,\varphi)$ di A, o come quoziente di un sottoggetto $(Val\,\varphi)$ di A; L è evidentemente isomorfo a $Val\,\varphi/Ind\,\varphi$.

Viceversa se $K\subset H\subset A$ (più precisamente sono dati, in $\mathcal{A}$, i sottoggetti $m : H \to A$, $n : K \to A$, e $m<n$), si costruisce canonicamente in $\mathcal{A}$ il diagramma commutativo a righe esatte:

---

[5]) Ciò può realizzarsi (a partire dalle assegnate scelte in $\mathcal{A}$) ad esempio in questo modo: se φ è una monorelazione, nella classe di equivalenza di φ viene scelta $\varphi'=\tilde{v}u$, dove:

$$v = coker\,(ind\,\varphi) \qquad u = im\,(v(val\,\varphi)).$$

Un'altra scelta possibile è: $\varphi'' = u'\tilde{v}'$, con $u' = val\,\varphi$, $v' = coim\,vu'$. Nel caso di una categoria di moduli, con le scelte usuali dei sottoggetti e dei quozienti, si ha $\varphi' = \varphi''$; basta però modificare tali scelte in una classe perchè ciò non sia più vero.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "n'"] \arrow[d, "1"] & H \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m"] & H/K \arrow[r] \arrow[d, "m'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "n"] & A \arrow[r, "q"] & A/K \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
\tag{2.2}
$$

Il quadrato destro è esatto (5.3), e fornisce quindi per (R.5) e 1.13 una monorelazione

$$\varphi = m\tilde{p} = \tilde{q}m' : H/K \longrightarrow A \tag{2.3}$$

per cui

$$val\, \varphi = m, \qquad ind\, \varphi = n. \tag{2.4}$$

Passando in $\tilde{\mathcal{A}}$ dai monomorfismi ai sottoggetti si potrà ottenere una corrispondenza biunivoca, come segue.

Sia $S(A)$ l'insieme dei sottoggetti di A relativamente ad $\mathcal{A}$, ordinato canonicamente, $S_2(A)$ l'insieme delle coppie decrescenti di elementi di $S(A)$; su $S_2(A)$ considereremo l'*ordine diretto* ($\leq$) e *trasverso* ($<$):

$$(m,\ n) \leq (m',\ n') \text{ se e solo se } (m < m' \ \&\ n < n') \tag{2.5}$$

$$(m,\ n) < (m',\ n') \text{ se e solo se } (m < m' \ \&\ n' > n). \tag{2.6}$$

2.2. I sottoggetti di A relativamente ad $\tilde{\mathcal{A}}$ sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $S_2(A)$, secondo:

$$\Lambda : \varphi \mapsto (val\, \varphi,\ ind\, \varphi). \tag{2.7}$$

Tale corrispondenza è compatibile con l'ordine canonico tra sottoggetti in $\tilde{\mathcal{A}}$ e l'ordine trasverso in $S_2(A)$.

DIM. Λ è iniettiva per 2.1; se poi $(m,\ n) \in S_2(A)$, la monorelazione definita in (2.3) verifica (2.4): detto φ' il sottoggetto in $\tilde{\mathcal{A}}$ equivalente a φ, $\Lambda(\varphi') = (m,\ n)$ per 2.1. c.v.d.

Risulta così giustificato porre la seguente definizione:

2.3. *Definizione.* I *subquozienti* di A, oggetto della categoria abeliana $\mathfrak{A}$, sono i sottoggetti di A relativamente ad $\tilde{\mathfrak{A}}$. Une monorelazione $\varphi : L \twoheadrightarrow A$ è anche detta *monorelazione in* A, o *presentazione di* L *come subquoziente di* A. Se $K \subset H \subset A$ (in $\mathfrak{A}$), la monorelazione $H/K \twoheadrightarrow A$ data da (2.3) viene detta *presentazione naturale di* H/K *come subquoziente di* A; ogniqualvolta si consideri H/K come subquoziente di A si sottointende, salvo contrario avviso, tale presentazione.

I sottoggetti di A in $\mathfrak{A}$ coincidono con i subquozienti I-regolari di A (1.18); ad ogni quoziente u di A si può associare il subquoziente $\tilde{u}$, ottenendo una corrispondenza biunivoca tra quozienti e subquozienti V-regolari. Entrambe le corrispondenze rispettano i preordini canonici.

III. Ordini canonico e diretto tra subquozienti di uno stesso oggetto.

Sulle monorelazioni in A si può considerare, oltre al preordine canonico, il *preordine diretto* così definito [6]):

(2.8) $\qquad \varphi \leq \psi$ se e solo se $(val\, \varphi < val\, \psi \quad \& \quad ind\, \varphi < ind\, \psi)$.

La relazione di equivalenza ad esso associata coincide per 2.1 con quella del preordine canonico; si ha quindi sui subquozienti di A un ordine, che diremo ancora *diretto*, e che evidentemente concorda mediante Λ con l'ordine diretto di $S_2(A)$.

L'intersezione e l'unione di due subquozienti di A, φ e ψ, saranno scritte (quando esistano):

— per il preordine canonico $(<)$: $\varphi \cap \psi$, $\varphi \cup \psi$;

— per il preordine diretto $(\leq)$: $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$.

Applicando 2.2, si ha:

2.4. *Intersezioni e unioni tra subquozienti.* L'insieme dei subquozienti di un oggetto A della categoria abeliana $\mathfrak{A}$ è un semireticolo superiore per l'ordine canonico, ed un reticolo modulare per l'ordine diretto.

---

[6]) Per altre caratterizzazioni del preordine diretto cfr. 3.12.

Se $\varphi : L \to A$, $\psi : M \to A$ sono subquozienti:

a) per il preordine canonico: $\varphi \cap \psi$ esiste se e solo se

$$val\,\varphi \cap val\,\psi > ind\,\varphi \cup ind\,\psi$$

e in tal caso è data da:

$$\Lambda(\varphi \cap \psi) = (val\,\varphi \cap val\,\psi,\ ind\,\varphi \cup ind\,\psi) \tag{2.9}$$

l'unione esiste sempre, e:

$$\Lambda(\varphi \cup \psi) = (val\,\varphi \cup val\,\psi,\ ind\,\varphi \cap ind\,\psi); \tag{2.10}$$

b) per il preordine diretto:

$$\Lambda(\varphi \wedge \psi) = (val\,\varphi \cap val\,\psi,\ ind\,\varphi \cap ind\,\psi) \tag{2.11}$$

$$\Lambda(\varphi \vee \psi) = (val\,\varphi \cup val\,\psi,\ ind\,\varphi \cup ind\,\psi). \tag{2.12}$$

IV. Epirelazioni e cosubquozienti.

La corrispondenza biunivoca $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ tra monorelazioni ed epirelazioni (compatibile con i relativi preordini canonici) consente di ricondurre la scelta dei quozienti di $\tilde{\mathcal{Q}}$ a quella dei sottoggetti; in effetti rende superflua la considerazione di quelli, salvo forse nel caso della coimmagine di una relazione (cfr. 3.III). Diremo comunque *cosubquoziente di A* (relativamente ad $\mathcal{Q}$) un quoziente $\eta : A \to L$ relativamente ad $\tilde{\mathcal{Q}}$; ciò equivale a dire che $\tilde{\eta}$ è un subquoziente di A.

3. RELAZIONI INDOTTE TRA SUBQUOZIENTI

3.1. *Definizione.* Siano $\alpha : A \to B$ una relazione, $\varphi : L \to A$ e $\psi : M \to B$ monorelazioni: diremo *relazione indotta da* α *su* φ *e* ψ la relazione $\alpha' = \tilde{\psi}\alpha\varphi : L \to M$

$$(3.1)\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] & B \\ L \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "\alpha'"] & M \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd} \quad {}^{7)}.$$

L'induzione rispetta le identità (1_A induce, su φ e φ, 1_L) e l'involuzione ($\tilde{\alpha}$ induce, su ψ e φ, $\tilde{\alpha}'$), ma non necessariamente la composizione: dato in $\tilde{\mathfrak{A}}$ il diagramma:

$$(3.2)\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \\ L \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "\alpha'"] & M \arrow[u, "\psi"'] \arrow[r, "\beta'"] & N \arrow[u, "\chi"'] \end{tikzcd}$$

(φ, ψ, χ monorelazioni; α' e β' indotte) può essere falso che $\beta'\alpha'$ sia indotta da $\beta\alpha$ su φ e χ, ovvero che:

$$(3.3)\qquad \tilde{\chi}\beta\psi\tilde{\psi}\alpha\varphi = \tilde{\chi}\beta\alpha\varphi.$$

Un esempio è il seguente ($\mathfrak{A}$ è la categoria dei gruppi abeliani; notare che α, β, α', β' sono identità):

$$(3.4)\qquad \begin{tikzcd} \mathbf{Z}^2 \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}^2 \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}^2 \\ \mathbf{Z}_2 \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}_2 \arrow[u, "\psi"'] \arrow[r, "1"] & \mathbf{Z}_2 \arrow[u, "\chi"'] \end{tikzcd}$$

dove, dette

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{i_r} \mathbf{Z}^2 \xrightarrow{p_r} \mathbf{Z} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}_2 \qquad (r=1,\ 2)$$

le inclusioni e proiezioni canoniche, si è posto

$$\varphi = i_1\tilde{p} \qquad \psi = (p_1+p_2)^{\sim}\tilde{p} \qquad \chi = i_2\tilde{p}.$$

---

[7]) Il diagramma può non essere commutativo (cfr. ad es. (3.4)); per il significato della commutatività di (3.1) cfr. 3.5.

In effetti la relazione γ' indotta dall'identità di $\boldsymbol{Z}^2$ su φ e χ è caratterizzata da $\mathit{def}\,\gamma'=0$, $\mathit{val}\,\gamma'=0$.

II. La condizione (3.3) suggerisce di porre la seguente definizione:

3.2. *Definizione.* Nella situazione 3.1 diremo che α' è [8]):

V-indotta (da α *su* φ *e* ψ*) se*: $\tilde{\psi}\alpha\subset\tilde{\psi}\alpha\varphi\tilde{\varphi}=\alpha'\varphi$ $(\mathit{val}\,\varphi > \mathit{val}\,\tilde{\alpha}\psi)$

I-indotta (da α *su* φ *e* ψ*) se*: $\tilde{\psi}\alpha\supset\tilde{\psi}\alpha\varphi\tilde{\varphi}=\alpha'\tilde{\varphi}$ $(\mathit{ind}\,\varphi < \mathit{ind}\,\tilde{\alpha}\psi)$

$\tilde{V}$-indotta (da α *su* φ *e* ψ*) se*: $\alpha\varphi\subset\psi\tilde{\psi}\alpha\varphi=\psi\alpha'$ $(\mathit{val}\,\alpha\varphi < \mathit{val}\,\psi)$

$\tilde{I}$-indotta (da α *su* φ *e* ψ*) se*: $\alpha\varphi\supset\psi\tilde{\psi}\alpha\varphi=\psi\alpha'$ $(\mathit{ind}\,\varphi\alpha > \mathit{ind}\,\psi)$.

Diremo ancora che è *mono-*, *epi-*, *morfo-*, *comorfo-*, *isoindotta* se è rispettivamente $\tilde{V}\tilde{I}$-, VI-, $\tilde{V}I$-, $V\tilde{I}$-, $V\tilde{V}I\tilde{I}$-indotta.

Come si vede subito, α' è V-indotta da α su φ e ψ se e solo se $\tilde{\alpha}'$ è $\tilde{V}$-indotta da $\tilde{\alpha}$ su ψ e φ; analogamente per gli altri termini « in dualità ». Nell'esempio (3.4) si ha morfoinduzione nel primo quadrato, comorfoinduzione nel secondo.

3.3. *Composizione di relazioni indotte.* Le seguenti condizioni sono sufficienti (singolarmente) affinchè in (3.2) $\beta'\alpha'$ sia indotta da $\beta\alpha$, ovvero coincida con $\gamma'=\tilde{\chi}\beta\alpha\varphi$

a) α' e monoindotta (da α su φ e ψ);

b) β' è epindotta (da β su ψ e χ);

c) α' è $\tilde{V}$-indotta e β' è I-indotta;

d) α' è $\tilde{I}$-indotta e β' è V-indotta;

e) $\beta'\alpha'$ è $\tilde{V}$-regolare; γ' è I-regolare; α' è $\tilde{I}$-indotta oppure β' è I-indotta;

f) $\beta'\alpha'$ è I-regolare; γ' è $\tilde{V}$-regolare; α' è $\tilde{V}$-indotta oppure β' è V-indotta.

---

[8]) I termini introdotti sono motivati da 3.7. Le condizioni equivalenti date in parentesi seguono da 1.10.

Inoltre se α' e β' sono entrambe mono-, epi-, morfo-, comorfo-, o isoindotte, anche $\alpha'\beta'$ è indotta in tal modo da $\beta\alpha$.

Dim. La sufficienza delle condizioni *a*)-*d*) è un'applicazione immediata della definizione 3.2 alla condizione (3.3). Nelle ipotesi *e*):

$$\beta'\alpha' = \tilde{\chi}\beta\psi\tilde{\psi}\alpha\varphi \subset \tilde{\chi}\beta\alpha\varphi = \gamma'$$

e si conclude con 1.16; analogamente per *f*).

Quanto all'ultima affermazione, se α' e β' sono monoindotte:

$$\chi\tilde{\chi}\beta\alpha\varphi = \chi\tilde{\chi}\beta\psi\tilde{\psi}\alpha\varphi = \beta\psi\tilde{\psi}\alpha\varphi = \beta\alpha\varphi$$

mentre se esse sono morfoindotte:

$$\chi\tilde{\chi}\beta\alpha\varphi \supset \chi\tilde{\chi}\beta\psi\tilde{\psi}\alpha\varphi \supset \beta\psi\tilde{\psi}\alpha\varphi \supset \beta\alpha\varphi$$

$$\tilde{\chi}\beta\alpha\varphi\tilde{\varphi} \subset \tilde{\chi}\beta\psi\tilde{\psi}\alpha\varphi\tilde{\varphi} \subset \tilde{\chi}\beta\psi\tilde{\psi}\alpha \subset \tilde{\chi}\beta\alpha.$$

(Tali fatti si provano però più rapidamente con 3.5 *b*) e 3.6 *c*)). c.v.d.

3.4. *Transitività dell'induzione.* Dato il diagramma di $\tilde{\mathfrak{A}}$:

(3.5)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] & B \\ L \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\alpha'"] & M \arrow[u, "\psi"'] \\ L' \arrow[u, "\varphi'"] \arrow[r, "\alpha''"] & M' \arrow[u, "\psi'"'] \end{tikzcd}$$

(φ, ψ, φ', ψ' monorelazioni; $\alpha' = \tilde{\psi}\alpha\varphi$, $\alpha'' = \tilde{\psi}'\alpha'\varphi'$) α'' è indotta da α su $\varphi\varphi'$ e $\psi\psi'$; se inoltre α' e α'' sono V- (risp. I-, $\tilde{V}$-, $\tilde{I}$-) indotte da α e α', α'' è indotta da α allo stesso modo. Dim. ovvia.

3.5. *Relazioni monoindotte.* Nella situazione 3.1 sono condizioni equivalenti:

a) α' è monoindotta da α su φ e ψ;

b) il diagramma (3.1) è commutativo;

c) $val\ \alpha\varphi < val\ \psi,\ ind\ \alpha\varphi > ind\ \psi$;

d) per ogni diagramma (3.2), essendo χ monorelazione e β' indotta da β, $\beta'\alpha'$ è indotta da $\beta\alpha$ su φ e ψ.

DIM. Per l'equivalenza di *a*), *b*), *c*) cfr. 3.2. Infine *a*) implica *d*), come visto in 3.3, e ne è implicato, come si vede prendendo $\beta = 1_B = \chi$. c.v.d.

3.6. *Relazioni morfoindotte.* Nella situazione 3.1 sono condizioni equivalenti:

a) α' è morfoindotta da α su φ e ψ;

b) $val\ \alpha\varphi < val\ \psi,\ ind\ \varphi < ind\ \tilde{\alpha}\psi$;

c) $\alpha\varphi\tilde{\varphi} \subset \psi\tilde{\psi}\alpha$.

DIM. *a*) implica *c*):

$$\alpha\varphi\tilde{\varphi} \subset \psi\tilde{\psi}\alpha\varphi\tilde{\varphi} \subset \psi\tilde{\psi}\alpha$$

mentre *c*) implica *a*) per 1.8 e 1.11. c.v.d.

3.7. *Regolarità delle relazioni indotte.* Nella situazione 3.1:

a) α' è V-regolare se e solo se: $(val\ \alpha\varphi \cup ind\ \psi) > val\ \psi$;

b) α' è I-regolare se e solo se: $(val\ \psi \cap ind\ \alpha\varphi) < ind\ \psi$;

c) α' è $\tilde{V}$-regolare se e solo se: $(val\ \tilde{\alpha}\psi \cup ind\ \varphi) > val\ \varphi$

d) α' è $\tilde{I}$-regolare se e solo se: $(val\ \varphi \cap ind\ \tilde{\alpha}\psi) < ind\ \varphi$.

Se α' è V- (risp. I-, $\tilde{V}$-, $\tilde{I}$-) indotta e α è V- (risp. I-, $\tilde{V}$-, $\tilde{I}$-) regolare, anche α' è tale. Dim. al n. 4.

III. Coimmagine, immagine e fattorizzazione canonica in $\tilde{\mathcal{A}}$.

Sia $\alpha : A \to B$ una relazione; definiamo

$$coim\ \alpha : A \to Coim\ \alpha \qquad im\ \alpha : Im\ \alpha \to B \tag{3.6}$$

rispettivamente il cosubquoziente di A (quoziente relativamente ad $\tilde{\mathfrak{A}}$) ed il subquoziente di B (sottoggetto relativamente ad $\tilde{\mathfrak{A}}$) equivalenti alle presentazioni naturali (cfr. 2.3)

(3.7) $$A \to Def\,\alpha/Ann\,\alpha \qquad Val\,\alpha/Ind\,\alpha \to B.$$

Si ha evidentemente

(3.8) $$def\,(coim\,\alpha) = def\,\alpha \qquad ann\,(coim\,\alpha) = ann\,\alpha$$
$$val\,(im\,\alpha) = val\,\alpha \qquad ind\,(im\,\alpha) = ind\,\alpha$$
$$Coim\,\alpha \simeq Def\,\alpha/Ann\,\alpha \qquad Im\,\alpha \simeq Val\,\alpha/Ind\,\alpha$$

(3.9) $$coim\,\tilde{\alpha} = (im\,\alpha)^{\sim}.$$

Se $\alpha \in \mathfrak{A}$, da 1.15 segue: $coim_{\tilde{\mathfrak{A}}}\,\alpha = coim_{\mathfrak{A}}\,\alpha$, $im_{\tilde{\mathfrak{A}}}\,\alpha = im_{\mathfrak{A}}\,\alpha$ (anche per la convenzione sulla compatibilità tra le scelte di sottoggetti e quozienti in $\tilde{\mathfrak{A}}$ rispetto alle scelte in $\mathfrak{A}$: 2.I). Non è quindi necessario distinguere.

3.8. Siano α e β relazioni componibili:

a) α è epi se e solo se $im\,\alpha = 1$; in tal caso $im\,\beta\alpha = im\,\beta$.

b) β è mono se e solo se $coim\,\beta = 1$; in tal caso $coim\,\beta\alpha = coim\,\alpha$.

DIM. Segue da 1.13 e 1.5.

3.9. *Fattorizzazione canonica.* Se $\alpha : A \to B$ è una relazione, esiste ed è unico l'isomorfismo $\bar{\alpha} : Coim\,\alpha \to Im\,\alpha$ tale che il diagramma

(3.10) $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "coim\,\alpha"'] & B \\ Coim\,\alpha \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] & Im\,\alpha \arrow[u, "im\,\alpha"'] \end{tikzcd}$$

sia commutativo; $\bar{\alpha}$ è isoindotto da α sui subquozienti $(coim\,\alpha)^{\sim}$ e $im\,\alpha$. Se $\alpha = \mu\varepsilon$ con ε epi μ mono in $\tilde{\mathfrak{A}}$, esiste uno ed uno solo isomorfismo i tale che $\varepsilon = i(coim\,\alpha)$, $\mu = (im\,\alpha)\bar{\alpha}\tilde{i}$.

Ogni traslazione di α in $\tilde{\mathcal{A}}$ da luogo ad una traslazione di (3.10). Infine: $\tilde{\tilde{\alpha}}=\tilde{\alpha}$. Dim. al n. 4.

IV. Relazioni canoniche tra subquozienti di uno stesso oggetto.

Siano $\varphi : L \to A$, $\psi : M \to A$ monorelazioni: si dice *relazione canonica di* φ *in* ψ (di L in M per abuso di linguaggio) la relazione $\tilde{\psi}\varphi : L \to M$ indotta da 1_A su φ e ψ; essa verrà detta *morfismo* (risp. *isomorfismo*) *canonico* quando risulti essere un morfismo di $\mathcal{A}$ (risp. isomorfismo).

La relazione canonica della monorelazione φ in sè è $\tilde{\varphi}\varphi = 1_L$ (1.13); l'involuta di una relazione canonica è ancora tale $((\tilde{\psi}\varphi)^{\sim} = \tilde{\varphi}\psi)$; invece la composizione di relazioni canoniche può non essere canonica, anche quando quelle siano isomorfismi (3.4).

Per 3.7 ogni relazione canonica mono- (risp. epi-, morfo-, comorfo-, iso-) indotta è una monorelazione (risp. epirelazione, morfismo di $\mathcal{A}$, morfismo di $\mathcal{A}^0$, isomorfismo).

3.10. *Corollario di 2.1 e 3.2.* Se $\varphi : L \to A$, $\psi : M \to A$ sono monorelazioni:

a) $\varphi < \psi$ se e solo se la relazione canonica di φ in ψ è monoindotta (da 1_A);

b) $\varphi \sim \psi$ se e solo se la relazione canonica di φ in ψ è isoindotta.

3.11. *Corollario di 3.6.* Nelle ipotesi precedenti, sono condizioni equivalenti:

a) $\varphi \leq \psi$;

b) la relazione canonica di φ in ψ è morfoindotta.

c) $\varphi\tilde{\varphi} \subset \psi\tilde{\psi}$.

V. Confronto con i subquozienti secondo Mac Lane [3].

Mac Lane [3, p. 1045] definisce i subquozienti dell'oggetto A come relazioni $\zeta : A \to A$ simmetriche e idempotenti $(\tilde{\zeta} = \zeta = \zeta^2)$; ciò equivale a considerare i sottoggetti di A in $\tilde{\mathfrak{A}}$, potendosi ad un sottoggetto $\varphi : L \to A$ associare la relazione $\varphi\tilde{\varphi} : A \to A$, simmetrica e idempotente (e indipendente dalla scelta di φ nella classe di equivalenza, per 2.1); e viceversa associare ad una relazione $\zeta : A \to A$ simmetrica e idempotente il sottoggetto $im\,\zeta : Im\,\zeta \to A$. Se inoltre i sottoggetti φ e ψ di A corrispondono a ζ e η come detto, per 3.11: $\varphi \leq \psi$ se e solo se $\zeta \subset \eta$.

L'impostazione di Mac Lane ha il vantaggio di non richiedere scelte di rappresentanti; pare però non prestarsi a trattare le relazioni indotte.

4. DIMOSTRAZIONI DEI NUMERI 1 E 3

DIMOSTRAZIONE DI 1.2. La categoria detta verifica (R.1) per i teoremi 4.3 e 4.5 (i) [2]; (R.2) per 4.5 (ii); (R.3) per 4.5 (iii). Dati poi in $\mathfrak{A}$ i diagrammi $(1._1)$, per 4.5 (iii) $\bar{v}u = u/v$, $\bar{v}'u' = u'/v'$; quindi, per definizione, $\bar{v}u = \bar{v}'u'$ se e solo se esistono monomorfismi m e n di $\mathfrak{A}$ tali che: $mu = nu'$, $mv = nv'$; per 5.2, (R.4) è provato.

Dato infine in $\mathfrak{A}$ il diagramma $(1._2)$, si ha:

$$\bar{v}u = u/v \qquad u'\bar{v}' = (u'/1)(1/v')$$

e quindi se $(1._2)$ è esatto, tali corrispondenze coincidono per definizione di composizione; viceversa, supposto che esse coincidano, sia

$$(4._1) \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u''} & X' \\ \uparrow{\scriptstyle v'} & & \uparrow{\scriptstyle v''} \\ Y & \xrightarrow{u'} & B \end{array}$$

un quadrato esatto: per quanto già detto $\bar{v}u = u'\bar{v}' = \bar{v}''u''$; quindi le coppie (u, v) e (u'', v'') hanno ugual prodotto fibrato, ed essendo $(4._1)$ esatto anche $(1._2)$ lo è (per 5.2). Ciò prova (R.5). c.v.d.

DIMOSTRAZIONE DI 1.3. Se α è una relazione, esistono per (R.3) morfismi u, v di $\mathfrak{A}$ tali che $\alpha = \tilde{v}u$; porremo $\tilde{T}(\alpha) = (Tv)^{\sim}(Tu)$; ciò è lecito perchè se $\alpha=\tilde{v}'u'$, allora per (R.4) i diagrammi (1.1) hanno ugual prodotto fibrato e parimenti i loro trasformati mediante il funtore esatto T, onde, ancora per (R.4): $(Tv)^{\sim}(Tu)=(Tv')^{\sim}(Tu')$; è ora immediato verificare che $\tilde{T}$ estende T e commuta con le involuzioni di $\tilde{\mathfrak{A}}$ e $\tilde{\mathfrak{B}}$. $\tilde{T}$ è funtore: se $\alpha=\tilde{v}'w$, $\beta=\tilde{x}u'$ sono relazioni componibili, e i morfismi u, v (di $\mathfrak{A}$) rendono esatto (1.2):

$$\beta\alpha=\tilde{x}(u'\tilde{v}')w=\tilde{x}\tilde{v}uw=(vx)^{\sim}(uw)$$

e, anche perchè T conserva i quadrati esatti:

$$\tilde{T}(\beta\alpha)=(T(vx))^{\sim}(T(uw))=(Tx)^{\sim}(Tv)^{\sim}(Tu)(Tw)=$$
$$=(Tx)^{\sim}(Tu')(Tv')^{\sim}(Tw)=T(\tilde{x}u')T(\tilde{v}'w)=T(\beta)T(\alpha).$$

Se $T':\tilde{\mathfrak{A}}\to\tilde{\mathfrak{B}}$ gode delle stesse proprietà, e $\alpha=\tilde{v}u$ è una relazione:

$$T'(\alpha)=T'(\tilde{v})T'(u)=(T'v)^{\sim}(T'u)=(Tv)^{\sim}(Tu)=\tilde{T}(\alpha).$$

Sia ora T fedele, e siano α, $\alpha'\in\tilde{\mathfrak{A}}\ (A, A')$, tali che $\tilde{T}(\alpha)=\tilde{T}(\alpha')$; posto $\alpha=\tilde{v}u$ e $\alpha'=\tilde{v}'u'$, si ha $(Tv)^{\sim}(Tu)=(Tv')^{\sim}(Tu')$, il che significa per (R.4) che T muta i diagrammi (1.1) in diagrammi di $\mathfrak{B}$ aventi ugual prodotto fibrato; essendo T fedele, i diagrammi (1.1) sono nella stessa situazione ([4], teor. 7.1, p. 56), onde $\tilde{v}u=\tilde{v}'u'$, cioè $\alpha=\alpha'$.

Se T è un'immersione (cioè è fedele e iniettivo sugli oggetti), anche $\tilde{T}$ è evidentemente tale.

Quanto all'ultima affermazione, basta osservare che i funtori $(\tilde{U}\tilde{T})$ e $(UT)^{\sim}$ estendono entrambi $UT:\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}$ alle categorie delle relazioni, e commutano con le involuzioni: devono quindi coincidere; analogamente si prova $(1_{\mathfrak{A}})^{\sim}=1_{\tilde{\mathfrak{A}}}$.

Se T è un isomorfismo, e $U:\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$ è il suo reciproco, quanto sopra prova che $\tilde{T}$ e $\tilde{U}$ sono ancora reciproci. c.v.d.

Dimostrazione di 1.4. Sia Γ un morfismo funtoriale di $\tilde{T}$ in $\tilde{U}$; preso un morfismo $u:A\to B$ in $\mathfrak{A}$, $\tilde{u}:B\to A$ è una relazione e il diagramma (di $\tilde{\mathfrak{B}}$)

$$
(4.2)\qquad
\begin{tikzcd}
TB \arrow[r, "\Gamma B"] \arrow[d, "T\tilde{u}"] & UB \arrow[d, "U\tilde{u}"] \\
TA \arrow[r, "\Gamma A"] & UA
\end{tikzcd}
$$

è commutativo : ciò equivale per (R.5) all'esattezza del diagramma di $\mathfrak{B}$:

$$
(4.3)\qquad
\begin{tikzcd}
TA \arrow[r, "\Gamma A"] \arrow[d, "Tu"] & UA \arrow[d, "Uu"] \\
TB \arrow[r, "\Gamma B"] & UB
\end{tikzcd}
$$

Se viceversa supponiamo che i diagrammi del tipo (4.3) siano esatti in $\mathfrak{B}$, ne viene che i diagrammi del tipo (4.2) sono commutativi in $\tilde{\mathfrak{B}}$; sfruttando (R.3) è ora immediato provare che Γ è un morfismo funtoriale di $\tilde{T}$ in $\tilde{U}$. c.v.d.

Dimostrazione di 1.5. Sia $\alpha = \tilde{v}u = u'\tilde{v}'$, $\beta = \tilde{x}w = w'\tilde{x}'$ e in

$$
(4.4)\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] & \cdot \arrow[r, "y"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"] & B \arrow[u, "v"] \arrow[r, "w"] & \cdot \arrow[u, "z"] \\
\cdot \arrow[u, "z'"] \arrow[r, "y'"] & \cdot \arrow[u, "x'"] \arrow[r, "w'"] & C \arrow[u, "x"]
\end{tikzcd}
$$

tutti i quadrati elementari siano esatti (in $\mathfrak{A}$); per (R.5):

$$\beta\alpha = \tilde{x}w\tilde{v}u = \tilde{x}\tilde{z}yu = (zx)^{\sim}(yu).$$

$$\beta\alpha = w'\tilde{x}'u'\tilde{v}' = w'y'\tilde{z}'\tilde{v}' = (w'y')(v'z')^{\sim}.$$

È ora immediato provare *a*); ad esempio

$$def\,\beta\alpha = im\,(v'z') < im\,v' = def\,\alpha.$$

Per b): $val\, \alpha \prec def\, \beta$ significa $im\, u' \prec im\, x'$, onde in (4.4) z' è epi (5.1), e $def\, \beta\alpha = im_{\mathcal{A}}\, v'z' = im_{\mathcal{A}}\, v' = def\, \alpha$.
Analogamente per le affermazioni rimanenti. c.v.d.

DIMOSTRAZIONE DI 1.8. Sia

$$\alpha = \tilde{v}u, \qquad \alpha' = u'\tilde{v}', \qquad \beta = \tilde{x}w, \qquad \beta' = w'\tilde{x}'.$$

Abbiamo così i quadrati superiore-sinistro e inferiore destro di (4.4), commutativi per l'ipotesi $\alpha \subset \alpha'$, $\beta \subset \beta'$. Completato (4.4) con due ulteriori quadrati esatti, si ha:

$$\beta\alpha = (zx)^{\sim}(yu) \qquad \beta'\alpha' = (w'y')(v'z')^{\sim}$$

e per la commutatività del quadrato esterno (tutte le maglie sono commutative), $\beta'\alpha' \subset \beta\alpha$.

Poichè poi $\tilde{\alpha}' = v'\tilde{u}'$, $\tilde{\alpha} = \tilde{u}v$, la seconda affermazione è ovvia (il quadrato di cui interessa la commutatività è ancora (1.2). Infine se $u, v \in \mathcal{A}(A, B)$, $u = u\tilde{1}_B$ e $v = \tilde{1}_A v$, per cui $u \subset v$ implica $v1_A = 1_B u$, cioè $v = u$. c.v.d.

DIMOSTRAZIONE DI 1.9. Costruiamo in $\mathcal{A}$ i diagrammi

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "u"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "v'"'] \arrow[r, "u'"] & \cdot \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "u"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "v''"'] \arrow[r, "u''"] & \cdot \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

dimodochè $\alpha = u'\tilde{v}'$, $\beta = \tilde{v}u = u''\tilde{v}''$, il secondo diagramma essendo fibrato; essendo $\alpha \subset \beta$, il primo diagramma è commutativo: esiste quindi un morfismo w di $\mathcal{A}$ tale che $v' = v''w$, $u' = u''w$, e di conseguenza:

$$def\, \alpha = im_{\mathcal{A}}\, v' \prec im_{\mathcal{A}}\, v'' = def\, \beta. \qquad \text{c.v.d.}$$

Dimostrazione di 1.10. Si prova *a*), gli altri casi essendo analoghi. Se $\beta\subset\beta\tilde{\alpha}\alpha$, sfruttando 1.9 e 1.5:

$$def\,\beta < def\,\beta\tilde{\alpha}\alpha < def\,\alpha.$$

Supponiamo viceversa che $def\,\beta < def\,\alpha$; posto

$$\alpha=\tilde{v}u=u'\tilde{v}',\quad \beta=\tilde{x}w=w'\tilde{x}'$$

costruiamo il seguente diagramma in $\mathcal{A}$, in modo che tutti i quadrati elementari siano esatti (ciò che è evidentemente possibile):

(4.5)
$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "u"] & \cdot \arrow[r, "m"] & \cdot \arrow[r, "z"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"] & \cdot \arrow[u, "v"] \arrow[r, "v"] & \cdot \arrow[u, "m'"] \arrow[r] & \cdot \arrow[u, "y'"] \\
 & \cdot \arrow[u, "u'"] \arrow[r, "v'"] & \cdot \arrow[u, "u"] \arrow[r, "w"] & \cdot \arrow[u, "y"] \\
 & \cdot \arrow[u, "z'"] \arrow[r, "e"] & \cdot \arrow[u, "x'"] \arrow[r, "w'"] & \cdot \arrow[u, "x"]
\end{tikzcd}$$

$$\beta\tilde{\alpha}\alpha=\tilde{x}w\tilde{u}\tilde{v}vu=\tilde{x}\tilde{y}\tilde{y}'zmu=(y'yx)^{\sim}(zmu)$$

onde, per avere la tesi, si deve provare che:

$$zmux'=y'yxw'.$$

In effetti seguendo il diagramma (e sfruttando opportunamente la doppia presenza di v) si trova:

$$(y'yxw')e=zm(vu'z')=zm(ux'e)=(zmux')e$$

ma e è epi in $\mathcal{A}$ (5.1), perchè nel quadrato inferiore sinistro (esatto) si ha:

$$im_{\mathcal{A}}\,x'=def\,\beta < def\,\alpha = im_{\mathcal{A}}\,v'. \qquad \text{c.v.d.}$$

DIMOSTRAZIONE DI 1.13. a) implica b), essendo $\alpha\tilde{\alpha}\alpha=\alpha$ per 1.9; b) implica a): se $\alpha\varphi=\alpha\psi$ allora $\varphi=\tilde{\alpha}\alpha\varphi=\tilde{\alpha}\alpha\psi=\psi$; b) equivale ad e) per 1.12; e) implica c) e d): sia infatti $\alpha=\tilde{v}u=u'\tilde{v}'$ con $(1._2)$ bifibrato in $\mathcal{A}$[9]): allora v' è epi in $\mathcal{A}$ ($im\, v'=def\,\alpha=1$), u è mono ($ker\, u=ann\,\alpha=0$), ed essendo $(1._2)$ bifibrato, v è epi e u' mono [2, 3.5]. Viceversa sia c) che d) implicano e): se ad esempio $\alpha=\tilde{v}u$ con u mono e v epi in $\mathcal{A}$, costruito il diagramma fibrato $(1._2)$, v' risulta epi (perchè v lo è) e quindi:

$$def\,\alpha=im\, v'=1, \qquad ann\,\alpha=ker\, u=0.$$

La penultima affermazione è ovvia; l'ultima segue dall'equivalenza di a), c). c.v.d.

DIMOSTRAZIONE DI 1.14. Sia α monomorfismo di $\tilde{\mathcal{A}}$; e siano $\alpha=\tilde{v}u=u'\tilde{v}'$ fattorizzazioni dei tipi c) e d) di 1.13; siano poi u_0, v_0, u'_0, v'_0 come nell'enunciato. Essendo v epi e $ker\, v=ind\,\alpha$, v si fattorizza in modo unico come

$$B \xrightarrow{v_0} B/\,Ind\,\alpha \xrightarrow{i} X$$

ed i è isomorfismo; essendo u' mono e $im\, u'=val\,\alpha$, u' si fattorizza in modo unico come:

$$Y \xrightarrow{j} Val\,\alpha \xrightarrow{u'_0} B$$

e j è isomorfismo. Sfruttando le condizioni b) e b') di 1.13:

$$v=iv_0 \qquad iu_0=iv_0\alpha=v\alpha=v\tilde{v}u=u$$

$$u'=u'_0j \qquad v'_0j=\tilde{\alpha}u'_0j=\tilde{\alpha}u'=v'\tilde{u}'u'=v'$$

$$\tilde{v}_0u_0=(\tilde{v}i)(\tilde{i}u)=\tilde{v}u=\alpha \qquad u'_0\tilde{v}'_0=(u'\tilde{j})(j\tilde{v}')=u'\tilde{v}'=\alpha.$$

c.v.d.

---

[9]) Ciò è sempre fattibile: se $\alpha=\tilde{v}u$, si costruisce anzitutto il diagramma fibrato $(1._2)$, poi si sostituiscono u e v in modo da ottenere un diagramma cofibrato; esso è pure fibrato, onde la tesi.

Dimostrazione di 1.15. *b*) equivale a *c*) per 1.12; *a*) implica *c*) perchè se $\alpha \in \mathcal{A}$ dalle fattorizzazioni $\alpha = \tilde{1}_B \alpha = \alpha \tilde{1}_A$ segue

$$def\, \alpha = im\, 1_A = 1_A \qquad ind\, \alpha = ker\, 1_B = 0.$$

Infine *c*) implica *a*): sia $\alpha = \tilde{v} u = u' \tilde{v}'$, con $(1._2)$ bifibrato [9]); v' è epi ($im\, v' = def\, \alpha = 1$) e v è mono ($ker\, v = ind\, \alpha = 0$) in $\mathcal{A}$, onde [2, 3.5] essi sono entrambi isomorfismi in $\mathcal{A}$, quindi in $\tilde{\mathcal{A}}$; per 1.13 $\tilde{v}'$ e $\tilde{v}$ sono i loro inversi, e come inversi (in $\tilde{\mathcal{A}}$) di isomorfismi di $\mathcal{A}$, stanno in $\mathcal{A}$: ne viene la tesi. L'ultima affermazione segue immediatamente dalle fattorizzazioni:

$$\alpha = \tilde{1}_B \alpha = \alpha \tilde{1}_A \qquad (\text{risp. } \alpha = (\tilde{\alpha})^{\sim} 1_A = 1_B (\tilde{\alpha})^{\sim}). \qquad \text{c.v.d.}$$

Dimostrazione di 3.7. Proviamo *c*). Sia $\varphi = \tilde{v} u = u' \tilde{v}'$ (u, u' mono e v, v' epi in $\mathcal{A}$), $\tilde{\psi} \alpha = w \tilde{x}$ (x, w in $\mathcal{A}$) e nel diagramma

$$(4._6) \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "u"] & \cdot & \\ \cdot \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"] & \cdot \arrow[u, "v"'] & \\ \cdot \arrow[u, "y"] \arrow[r, "z"] & \cdot \arrow[u, "x"'] \arrow[r, "w"] & \cdot \end{tikzcd}$$

il quadrato inferiore sia esatto (quello superiore lo è per (R.5)); quindi

$$\alpha' = (\tilde{\psi} \alpha) \varphi = w \tilde{x} u' \tilde{v}' = w z \tilde{y} \tilde{v}' = (wz)(v'y)^{\sim}$$

e α' è $\tilde{V}$-regolare se e solo se $v'y$ è epi; poichè il rettangolo esterno di $(4._6)$ è esatto [2, 3.7] ciò equivale (5.1) a

$$im\, u \prec im\, vx.$$

Essendo v' epi in $\mathcal{A}$: $im\, u = im\, uv' = im\, vu'$, onde la condizione precedente equivale a

$$im\, vu' \prec im\, vx$$

cioè a

$$im\, u' \prec im\, x \cup ker\, v$$

ed essendo

$$val\, \varphi = im\, u', \quad val\, \tilde{\alpha}\psi = def\, \psi\tilde{\alpha} = im\, x, \quad ind\, \varphi = ker\, v$$

l'affermazione *c*) è provata; analogamente per le altre.

L'ultima affermazione si verifica più facilmente direttamente: se α è V-regolare (cioè se $\alpha\tilde{\alpha} \supset 1$, per 1.12) e se α' è V-indotta (cioè $\tilde{\psi}\alpha \subset \tilde{\psi}\alpha\varphi\tilde{\varphi}$) si ha:

$$\alpha'\tilde{\alpha}' = (\tilde{\psi}\alpha\varphi\tilde{\varphi})\tilde{\alpha}\psi \supset \tilde{\psi}(\alpha\tilde{\alpha})\psi \supset \tilde{\psi}\psi = 1$$

cioè α' è V-regolare. c.v.d.

Dimostrazione di 3.9. Sia $\bar{\alpha} = (\mathrm{im}\, \alpha)^{\sim}\alpha(\mathrm{coim}\, \alpha)^{\sim}$ le relazione indotta da α sui subquozienti $(coim\, \alpha)^{\sim}$ e $im\, \alpha$; anzitutto:

$$\tilde{\bar{\alpha}} = (coim\, \alpha)\tilde{\alpha}(im\, \alpha) = (im\, \tilde{\alpha})^{\sim}\tilde{\alpha}(coim\, \tilde{\alpha})^{\sim} = \bar{\tilde{\alpha}}.$$

Si ha poi:

$$val\, (coim\, \alpha)^{\sim} = def\, coim\, \alpha = def\, \alpha$$

$$ind\, (coim\, \alpha)^{\sim} = ann\, coim\, \alpha = ann\, \alpha$$

e, sfruttando 1.5

$$val\, (\alpha(coim\, \alpha)^{\sim}) = val\, \alpha = val\, im\, \alpha$$

$$ind\, (\alpha(coim\, \alpha)^{\sim}) = ind\, \alpha = ind\, im\, a.$$

Di conseguenza, per 3.2 e 3.7 rispettivamente, $\bar{\alpha}$ è monoindotta da α su $(coim\, \alpha)^{\sim}$ e $im\, \alpha$, ed è epirelazione; anche $\tilde{\bar{\alpha}} = \bar{\tilde{\alpha}}$ è allora monoindotta ed epirelazione. In definitiva $\bar{\alpha}$ è isoindotta ed isomorfismo; essendo isoindotta

$$\alpha = (coim\ \alpha)\bar{\alpha}(im\ \alpha)$$

e $\bar{\alpha}$ è l'unica relazione che soddisfa tale condizione, per motivi di cancellabilità.

Supposto ora che sia $\alpha = \mu\varepsilon$, con ε epi e μ mono in $\tilde{\mathfrak{A}}$, per 3.8:

$$im\ \varepsilon = 1, \quad coim\ \varepsilon = coim\ \alpha, \quad im\ \mu = im\ \alpha, \quad coim\ \mu = 1$$

per cui

$$\alpha \ = \mu\varepsilon = (im\ \mu)\bar{\mu}(coim\ \mu)(im\ \varepsilon)\bar{\varepsilon}(coim\ \varepsilon) = (im\ \alpha)\bar{\mu}\bar{\varepsilon}(coim\ \alpha)$$

per « l'unicità di $\bar{\alpha}$ », ne risulta: $\bar{\mu}\bar{\varepsilon} = \bar{\alpha}$; posto $i = \bar{\varepsilon}$ (isomorfismo), si ha:

$$\varepsilon = (im\ \varepsilon)\bar{\varepsilon}(coim\ \varepsilon) = i\ coim\ \alpha$$

$$\mu = (im\ \mu)\bar{\mu}(coim\ \mu) = (im\ \alpha)\bar{\mu} = (im\ \alpha)\bar{\alpha}\tilde{\bar{\varepsilon}} = (im\ \alpha)\bar{\alpha}\tilde{i}.$$

L'unicità di i si prova per cancellazione.

Dato poi il diagramma commutativo di $\tilde{\mathfrak{A}}$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' \end{array}$$

il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} Coim\ \alpha & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & Im\ \alpha \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma'} & & \downarrow{\scriptstyle \delta'} \\ Coim\ \alpha' & \xrightarrow{\bar{\alpha}'} & Im\ \alpha' \end{array}$$

(dove γ' è indotto da γ su $(coim\ \alpha)^\sim$ e $(coim\ \alpha')^\sim$, δ' da δ su $im\ \alpha$ e $im\ \alpha'$), è commutativo, essendo $\bar{\alpha}$ e $\bar{\alpha}'$ isoindotti (3.3). c.v.d.

5. LEMMI

Si enunciano, senza dimostrazione, tre lemmi sui quadrati esatti e fibrati nelle categorie abeliane, già sfruttati nei numeri precedenti.

5.1. Dato nella categoria abeliana $\mathcal{A}$ il quadrato esatto

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "u"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"'] & \cdot \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

a) $ker\, u < im\, v'$

b) u è mono se e solo se $ker\, u' < ker\, v'$

c) u' è epi se e solo se $im\, v < im\, u$.

5.2. Dati nella categoria abeliana $\mathcal{A}$ i diagrammi

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "u"] & \cdot \\ & \cdot \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "u'"] & \cdot \\ & \cdot \arrow[u, "v'"'] \end{tikzcd}$$

sono condizioni equivalenti:

a) tali diagrammi hanno ugual prodotto fibrato;

b) le coppie di morfismi che formano con il primo un quadrato commutativo coincidono con quelle che lo formano con il secondo.

c) le coppie di morfismi che formano con il primo un quadrato esatto coincidono con quelle che lo formano con il secondo.

d) esistono monoformismi m, n di $\mathcal{A}$ tali che: $mu = nu'$, $mv = nv'$.

5.3. Dato nella categoria abeliana $\mathcal{A}$ il diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r] \arrow[u, "u'"'] & \cdot \arrow[r] \arrow[u] & \cdot \arrow[r] \arrow[u, "u''"'] & 0
\end{tikzcd}$$

il quadrato sinistro (risp. destro) è esatto se e solo u'' è mono (risp. u' è epi).

BIBLIOGRAFIA

[1] Arduini, P.: a) *Monomorphisms and Epimorphisms in abstract categories* Rend. Sem. Mat. Un. Padova 42 (1969), p. 135-166.
b) *Images and Coimages in abstract categories* (in preparazione).

[2] Hilton, P.: *Correspondences and Exact Square,* Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965, p. 255-271, Springer, 1966.

[3] Mac Lane, S.: *An algebra of additive relations,* Proc. Nat. Ac. Sci USA 47 (1961), p. 1043-1051.

[4] Mitchell, B.: *Theory of categories,* Academic Press, New York, 1965.

[5] Puppe, D.: *Korrespondenzen in abelschen Kategorien.* Math. Annalen 148 (1962), p. 1-30.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 3 aprile 1969.