

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALBERTO FRIGERIO

**Caratterizzazione dei gruppi speciali finiti G mediante
le classi di proiettività dei quozienti primi di $L(G)$**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 43 (1970), p. 55-61

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__55_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARATTERIZZAZIONE DEI GRUPPI SPECIALI FINITI G MEDIANTE LE CLASSI DI PROIETTIVITÀ DEI QUOZIENTI PRIMI DI $L(G)$

ALBERTO FRIGERIO *)

1. In questa nota dimostriamo dapprima una caratterizzazione dei gruppi speciali finiti G , a mezzo delle classi di proiettività dei quozienti primi di $L(G)$, reticolo dei sottogruppi di G .

Ricordiamo che quando in un reticolo L , l'elemento A copre l'elemento $B (A \succ B)$, la coppia A/B è detta un *quoziente primo* (q.p.) di L .

Due q.p. A/B e C/D di L sono tra loro trasposti quando vale $A=B \cup C$ e $D=B \cap C$, oppure $C=A \cup D$ e $B=A \cap D$.

Due q.p. A/B e C/D di L sono tra loro proiettivi se una successione finita di q.p. tra loro trasporti collega A/B con C/D . La relazione di proiettività π è una relazione di equivalenza nell'insieme K dei q.p. di $L(G)$; K verrà ripartito da π in un numero m di classi.

Denotiamo con $|G|$ l'ordine di G e sia

$$|G| = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_r^{e_r} \quad (e_i > 0);$$

con P_i un determinato p_i -Sylowgruppo di G e con K_i l'insieme dei q.p. di $L(P_i)$; sia poi m_i il numero delle classi in cui la π ripartisce K_i operando solo tra elementi di questo.

2. Usando le precedenti notazioni, sussiste il seguente

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

TEOREMA I. *Condizione necessaria e sufficiente perchè G sia speciale è che (i) esso sia risolubile*

$$(ii) \quad m = \sum_1^r m_i .$$

Proviamo la necessità. La (i), cioè la risolubilità, è evidentemente richiesta. La necessità della (ii) è corollario del seguente

LEMMA. Se $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_s$, con $(|H_i|, |H_j|) = 1$, $i \neq j$, e le classi dei q.p. di $L(H_i)$ sono h_i , allora

$$m = \sum_1^s h_i$$

Osserviamo che qui vale $L(G) = L(H_1) \times L(H_2) \times \dots \times L(H_s)$ ¹⁾.

Se A/B è un q.p. di $L(G)$, mettendo in evidenza i costituenti di A e B secondo le componenti nel prodotto diretto, questi saranno tutti uguali, eccetto quelli di una componente, alla quale diremo essere associato il q.p. A/B . Indicheremo con K_i^0 l'insieme di tutti i q.p. associati alla i -esima componente ($i = 1, 2, \dots, s$).

È immediato verificare che due q.p. possono essere tra loro trasposti solo se appartengono al medesimo K_i^0 . Di conseguenza i q.p. di K_j^0 e di K_m^0 apparterranno a classi di proiettività diverse se $j \neq m$.

In un determinato K_i^0 si osservi che un suo generico q.p. A/B appartiene alla stessa classe di A'/B' , con $A' = (E_1, E_2, \dots, A_i, \dots, E_s)$, $B' = (E_1, E_2, \dots, B_i, \dots, E_s)$, dove gli E_j sono i sottogruppi identici degli H_j : infatti A/B ed A'/B' sono tra loro trasposti. Quindi i rappresentanti delle classi di K_i^0 si possono scegliere nell'insieme K'_i degli A'/B' .

Poichè la $\varphi: A'/B' \leftrightarrow A_i/B_i \in L(H_i)$ è una corrispondenza biunivoca che conserva la relazione di proiettività π , si ha che in K_i^0 vi sono al più h_i classi.

Sono poi di fatto in numero di h_i , poichè se M/N ed R/S di K_i^0 sono tra loro proiettivi, anche M'/N' ed R'/S' lo sono attraverso una

¹⁾ Vedasi [1], p. 5.

successione di trasposti di K'_i . Varrà quindi per il gruppo G che

$$m = \sum_1^s h_i.$$

Come corollario del lemma segue la necessità della uguaglianza (ii): infatti se G è speciale, esso è isomorfo al prodotto diretto dei suoi Sylowgruppi che sono sottogruppi di Hall.

Dimostriamo ora la sufficienza delle condizioni espresse nel teorema I.

Dalla (i) si deduce intanto che $m \leq \sum_1^r m_i$.

Per provare questa consideriamo una serie di composizione Γ del gruppo G . Essendo $|G| = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_r^{e_r}$, e G risolubile, in Γ i q.p. A/B per cui $[A : B] = p_i$ costituiranno un insieme C_i , con $|C_i| = e_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$). In ogni C_i si può introdurre un ordinamento stretto tra i suoi q.p. ponendo $A/B > C/D$ se e solo se $B \geq C$; in base a tale ordinamento ci sarà utile numerare i q.p. in ogni C_i incominciando dal massimo.

Se intersechiamo Γ con il p_i -Sylowgruppo P_i , otteniamo, tolte le ripetizioni di elementi uguali, una serie Φ di composizione di P_i , nella quale evidentemente due elementi successivi individuano un q.p. di $L(P_i)$; e risulta, dopo aver numerato i q.p. di Φ con il criterio adottato in C_i , che lo j -esimo q.p. di C_i è trasposto e quindi proiettivo allo j -esimo q.p. di Φ .

Infatti sia K il più piccolo sottogruppo di Γ che contiene P_i .

Se $P_i = K$, la Φ viene a coincidere con il tratto di Γ che da K discende fino al sottogruppo identico, e l'affermazione precedente risulta evidente.

Se $P_i \neq K$, si consideri H , l'elemento successivo di K in Γ .

Poichè $H \triangleleft K$ sarà $K = P_i \cup H$, come pure $[P_i : P_i \cap H] = [K : H] =$ un numero primo, che non può essere che p_i . Si ha quindi $K/H \in C_i$, anzi ne è il primo q.p. poichè $K \supset P_i$; come pure $P_i/P_i \cap H$ è il primo di Φ . Inoltre si ha K/H trasposto di $P_i/P_i \cap H$.

L'essere gli eventuali successivi q.p. di C_i e di Φ ordinatamente tra loro trasposti, si dimostra riapplicando (un numero finito di volte) convenientemente lo stesso tipo di ragionamento.

Perciò ciascun q.p. di Φ è proiettivo a qualche q.p. di C_i ; e viceversa ciascun q.p. di C_i è proiettivo a qualche q.p. dello stesso p_i -Sylowgruppo P_i .

Ne consegue intanto che *ogni* q.p. di $L(P_i)$ è proiettivo a qualche elemento di C_i .

Infatti se P_i è ciclico, gli unici q.p. di $L(P_i)$ sono quelli della serie Φ . Se P_i non è nè ciclico nè dei quaternioni (generalizzato) si ha in $L(P_i)$ una sola classe di q.p.. Attraverso un q.p. qualunque di Φ , tutti i q.p. di $L(P_i)$ vengono ad essere proiettivi ad un q.p. di C_i .

Se P_i è dei quaternioni (generalizzato), detto Z il suo centro ed E il sottogruppo identico, Z/E è necessariamente un q.p. della catena Φ ed è quindi proiettivo ad un q.p. di C_i ; gli altri q.p. di $L(P_i)$ risulteranno tali attraverso un qualunque q.p. R/S di Φ , diverso da Z/E , appartenendo essi in $L(P_i)$ tutti ad una stessa seconda classe di proiettività contenente R/S^2 .

Parimenti saranno proiettivi a convenienti elementi di C_i , anche i q.p. di eventuali altri p_i -Sylowgruppi di G , potendosi applicare ad essi i medesimi argomenti fatti per P_i , riferendoci sempre alla catena Γ .

Poichè *ogni* q.p. di $L(G)$ è proiettivo ad un q.p. del reticolo di qualche p_j -Sylowgruppo di G^3 , si ha che i rappresentanti delle classi di $L(G)$ si possono tutti scegliere tra gli elementi di $C = \cup_i C_i$.

Ora gli elementi di C_i , come si è visto sopra, sono proiettivi a q.p. di uno stesso p_i -Sylowgruppo P_i ; e poichè già operando solo tra i q.p. di $L(P_i)$ la relazione π li ripartisce per ipotesi in m_i classi, ne segue che il numero delle classi individuate da elementi di C_i non può superare m_i .

E di conseguenza sarà $m \leq \sum_1^r m_i$.

Procediamo nella dimostrazione della sufficienza usando ora anche la condizione (ii), cioè $m = \sum_1^r m_i$.

Essa richiede che le classi rappresentate dai q.p. di C_i siano distinte da quelle rappresentate da q.p. di C_j , se $i \neq j$. E questo si ha solo se per ogni p_j esiste un solo p_j -Sylowgruppo in G .

Supponendo il contrario, consideriamo due p_j -Sylowgruppi distinti che diciamo U e V . Poniamo $N = U \cap V$ ed $M = U \cup V$. Sia R un sotto-

²⁾ Vedasi [2], p. 318.

³⁾ Vedasi [2], p. 319.

gruppo tale che $M > R \geq U$ e consideriamo un numero primo p_i che divida $[M : R]$; esso certamente è diverso da p_j , essendo U e V dei p_j -Sylowgruppi. Detto $T = R \cap V$, si prenda L siffatto che $V \geq L > T$: tale gruppo L esiste perchè risulta $T < V$.

Vale ora $M = R \cup L$, perchè R è massimale in M , ed L , sottogruppo di M , non è contenuto in R . Così pure è $T = R \cap L$, perchè T è sottogruppo di R , è contenuto massimalmente in L , e questi non è contenuto in R .

Sarà quindi $M/R\pi L/T$, in quanto tra loro trasposti.

Il gruppo Q non conterrà R , poichè Q è un p_i -gruppo ed R contiene il p_j -gruppo U ed è $p_i \neq p_j$; nè Q sarà contenuto in R poichè p_i divide $[M : R]$.

Risulterà quindi $W < R$ ed esisterà Y tale che $Q \geq Y > W$, e si avrà $M/R\pi Y/W$, perchè trasposti tra loro (la prova di questo è analoga a quella data per mostrare $M/R\pi L/T$).

Varrebbe quindi attraverso il confronto con M/R , che $L/T\pi Y/W$; e poichè L/T ed Y/W appartengono a classi i cui rappresentanti si possono rispettivamente scegliere in C_j ed in C_i (in quanto L è un p_j -gruppo ed Y è un p_i -gruppo) si avrebbe che una classe individuata da un elemento di C_i coinciderebbe con una individuata da un elemento di C_j .

Quindi perchè valga $m = \sum_i m_i$, deve esistere in G un solo p_i -Sylowgruppo per ogni p_i , il che equivale a dire che il gruppo G è un gruppo speciale. C.V.D.

OSSERVAZIONI.

I. Se G è risolubile ed è $m = \sum_1^r e_i$, allora G è ciclico.

Infatti poichè in generale $m_i \leq e_i$ ⁴⁾, essendo in G risolubile $m \leq \sum_1^r m_i$, l'uguaglianza $m = \sum_1^r e_i$, implica $m_i = e_i$, per ogni i .

Pertanto i p_i -Sylowgruppi sono ciclici⁵⁾, e risultando poi G speciale, in virtù del teorema I esso sarà ciclico.

II. Se $m = \sum_1^r m_i$ ed $m_i = e_i$, per ogni i , si può tralasciare l'esplicita ipotesi della risolubilità, in quanto consegue dall'essere ciclici tutti i Sylowgruppi. G anche in questo caso risulta ciclico.

⁴⁾ Vedasi [2], p. 317.

⁵⁾ Vedasi [2], p. 317.

3. Usando le notazioni del n. 1, proviamo ora il seguente teorema che dà una condizione sufficiente perchè G sia speciale.

TEOREMA II. *Se G è tale che in $L(P_i)$, $j=1, 2, \dots, r$ si ha una sola classe, ed è $m=r$, allora G è speciale.*

Chiamiamo D_i la classe cui appartengono, in $L(G)$, i q.p. di $L(P_i)$, potendosi avere che pur essendo $i \neq j$, non sia D_i distinta da D_j .

Per la prova del teorema II premettiamo la dimostrazione della seguente proposizione ausiliaria: cioè i q.p. di $L(P_i^x)$, ($i=1, 2, \dots, r$), qualunque sia x di G , nelle nostre ipotesi, sono in $L(G)$ dei q.p. tutti appartenenti ad una stessa D_s , con s conveniente, in funzione di i .

Consideriamo dapprima quei numeri primi p_k , divisori di n , per i quali esiste un sottogruppo massimale M , così che $p_k \mid [G : M]$. Almeno un p_k siffatto esiste.

Posto $K = P_k \cap M$ e scelto H tale che $P_k \geq H > K$ (il che è possibile perchè $P_k \not\subseteq M$), risulta $G/M \pi H/K$, con H/K un q.p. di $L(P_k)$.

Poichè in $L(P_k)$ si ha una sola classe, G/M è proiettivo ad ogni p.q. di $L(P_k)$. E nella stessa relazione risultano tutti i q.p. degli eventuali distinti $L(P_k^x)$, potendosi anche per P_k^x ripetere la stessa prova di prima riferendoci sempre a G/M . Quindi se p_k divide l'indice di un massimale in G , esiste la classe D_k , che contenendo anche G/M , conterrà i q.p. di $L(P_k^x)$ qualunque sia x .

Alla classe D_k si vede poi che appartiene anche ogni q.p. massimale G/T per cui $p_k \mid [G : T]$.

Se invece un primo p_j non divide nessuno degli indici dei massimali in G , può verificarsi il caso in cui P_j è contenuto in tutti i massimali; allora come p_j -Sylowgruppo del sottogruppo di Frattini di G , sarà normale in G , quindi unico, e ad una stessa classe D_j apparterranno i q.p. degli $L(P_j^x)$, per ogni x di G , identificandosi questi con $L(P_j)$.

Altrimenti, pur non dividendo p_j nessuno degli indici dei massimali in G , ci sarà un sottogruppo massimale A che non contiene P_j .

Poniamo $B = P_j \cap A$, e scelto C tale che $P_j \geq C > B$, vale $G/A \pi C/B$, e tutti i q.p. di $L(P_j)$ apparterranno alla classe in cui sta G/A .

Scegliamo ora un p_k che divida l'indice $[G : A]$. Varrà, per quanto osservato precedentemente $G/A \in D_k$. Si ha inoltre $C^x/B^x \pi G^x/A^x = G/A^x$ (qualunque sia x), essendo la π compatibile con ogni automorfismo di G . Poichè ancora $p_k \mid [G : A^x]$, varrà parimenti $G/A^x \in D_k$; cui appar-

terrà anche C^*/B^* , e per le nostre ipotesi questo si avrà per tutti i q.p. degli $L(P_j^*)$, che quindi stanno nella stessa classe D_k . Ed è così provata la proposizione ausiliaria.

Richiamato che ogni q.p. di $L(G)$ è proiettivo a qualche q.p. di $L(P_j^*)$ segue che se le classi in tutto $L(G)$ sono proprio r , le classi D_j ($j=1, 2, \dots, r$) devono essere tra loro distinte.

Ma perchè siano tali non devono esistere due Sylowgruppi distinti relativi al medesimo numero primo. La prova è analoga a quella precedentemente svolta nel n. 2.

La unicità del p_j -Sylowgruppo per ogni p_j equivale all'essere G un gruppo speciale. C.V.D.

BIBLIOGRAFIA

- [1] SUZUKI, M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*. Springer Verlag, Berlin, 1956.
- [2] FRIGERIO, A.: *Sopra le classi di proiettività dei quozienti primi nel reticolo dei sottogruppi di alcune classi di gruppi finiti*. Memorie dell'Accademia Patavina di SS. LL. AA. Classe di sc. Mat., Vol. LXXVII (1964-65), p. 315-323.

Manoscritto pervenuto in redazione l'1 aprile 1969.