RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADALBERTO ORSATTI

Sui gruppi abeliani ridotti che ammettono una unica topologia compatta

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 43 (1970), p. 341-347

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__341_0>

SUI GRUPPI ABELIANI RIDOTTI
CHE AMMETTONO UNA UNICA TOPOLOGIA COMPATTA

ADALBERTO ORSATTI *)

Introduzione.

La struttura algebrica dei gruppi abeliani compatti è stata determinata da Hulanicki [4], [5] ed Harrison [3], indipendentemente. Risultati parziali erano stati ottenuti da Kaplansky in [6].

Per i gruppi ridotti si ha il seguente teorema: un gruppo abeliano ridotto ammette una topologia compatta se e solo se è isomorfo ad un prodotto cartesiano di gruppi ciclici finiti e/o di gruppi degli interi p-adici (anche per differenti p).

In generale un gruppo di questo tipo ammette infinite topologie compatte. Nel presente lavoro ci siamo proposti di determinare la struttura algebrica dei gruppi ridotti che ammettono una ed una sola topologia compatta. Riassumiamo brevemente i risultati.

Sia $\mathcal{C}_1$ la classe dei gruppi in questione e sia Γ la classe dei gruppi del tipo Hom $(T, Q/Z)$ dove T è un gruppo di torsione la cui componente p-primaria, per ogni primo p, è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno di esponente finito. Si dimostra in primo luogo che $\mathcal{C}_1 \subseteq \Gamma$. Se poi $G = \mathrm{Hom}(T, Q/Z)$ è un gruppo della classe Γ, si consideri la famiglia degli invarianti di T ottenuta associando ad ogni coppia ardinata (p, i), dove p è un numero primo ed i è un intero positivo oppure il simbolo ∞, il numero cardinale che esprime quante volte il gruppo $Z(p^i)$ figura come addendo in una decomposizione di T in somma

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

diretta di gruppi indecomponibili. Allora G appartiene a $\mathcal{C}_1$ se e solo se per ogni invariante α di T e per ogni numero cardinale β è vera l'implicazione: $2^\alpha = 2^\beta \Rightarrow \alpha = \beta$. Di conseguenza risulta $\mathcal{C}_1 = \Gamma$ se e solo se l'implicazione precedente è vera per ogni coppia α, β di numeri cardinali. Come è noto, questo si verifica ammettendo l'ipotesi generalizzata del continuo.

Infine si osserva che i gruppi (abeliani) compatti nella topologia dei sottogruppi di indice finito sono della classe $\mathcal{C}_1$ e si prova che essi coincidono con i gruppi compatti nella topologia naturale, la cui struttura è stata determinata in [7].

1. Tutti i gruppi considerati in questa nota sono abeliani e la notazione è quella additiva.

Sia $\{G_j, j \in J\}$ una famiglia indiciata di gruppi: indicheremo con $\sum_j G_j$ la somma diretta dei G_j e con $\prod_j G_j$ il loro prodotto diretto (= prodotto cartesiano). Se i G_j sono tutti isomorfi ad un gruppo fisso G useremo rispettivamente i simboli $\sum_\alpha G$ e $\prod_\alpha G$ dove α è il cardinale di J.

Denoteremo con Z il gruppo degli interi, con Q quello dei razionali, con $\widehat{Z_p}$ l'anello degli interi p-adici, con $\mathcal{S}$ il gruppo additivo di $\widehat{Z_p}$. $Z(p^i)$ e $Z(p^\infty)$ sono rispettivamente il p-gruppo ciclico di ordine p^i e quello quasi-ciclico.

Le topologie gruppali si intendono di Hausdorff.

2. Sia G un gruppo ridotto munito di una topologia gruppale compatta $\mathcal{T}$. Indichiamo con T il gruppo dei caratteri (o duale secondo Pontryagin) del gruppo compatto G. T è un gruppo discreto; inoltre, poichè G è ridotto, T è di torsione (cfr. [6], pag. 55). Reciprocamente il gruppo dei caratteri del gruppo discreto T è il gruppo compatto G: T individua sia il gruppo astratto G che la topologia $\mathcal{T}$. Si ha: $G = \mathrm{Hom}(T, Q/Z)$.

Sia T_p la componente p-primaria di T ed indichiamo con G_p il gruppo dei caratteri del gruppo discreto T_p. Allora G coincide, algebricamente e topologicamente, con il prodotto diretto dei G_p al variare di p nell'insieme dei numeri primi. Si ha: $G_p = \mathrm{Hom}(T_p, Z(p^\infty))$ e G_p è uno $\widehat{Z_p}$-modulo senza elementi di p-altezza infinita [6].

G_p è individuato algebricamente da G come il sottogruppo degli elementi divisibili per ogni intero positivo primo con p ed è quindi un sottogruppo pienamente invariante. La decomposizione di G nel prodotto diretto dei G_p è canonica. Supponiamo ora che $\mathcal{T}$ sia l'unica topologia gruppale compatta esistente su G. Esprimeremo questa circostanza scrivendo $G \in \mathcal{C}_1$. Essa si realizza se e solo se $G_p \in \mathcal{C}_1$ per ogni p, come si verifica facilmente. Il nostro scopo è di determinare la struttura di G. In base alle osservazioni precedenti è sufficiente determinare quella dei G_p.

3. Sia M uno $\widehat{Z}_p$-modulo e supponiamo che M ammetta una ed una sola topologia gruppale compatta. Ciò significa che esiste un p-gruppo H tale da aversi $M = \mathrm{Hom}(H, Z(p^\infty))$ e che H è unico a meno di isomorfismi.

Sia B un sottogruppo basico di H. B è una somma diretta di p-gruppi ciclici, è puro in H e $D = H/B$ è una somma diretta di gruppi isomorfi a $Z(p^\infty)$. Si ha, come è noto:

$$\mathrm{Hom}(H, Z(p^\infty)) = \mathrm{Hom}(D, Z(p^\infty)) \oplus \mathrm{Hom}(B, Z(p^\infty)).$$

(Una dimostrazione molto semplice di questo fatto si trova in [2]).

Si ottiene quindi la struttura algebrica di M come prodotto diretto di p-gruppi ciclici e di interi p-adici e si vede che essa dipende solo da B e da D. Ora sul gruppo astratto M esistono almeno tante topologie compatte quanti sono gli elementi del gruppo $\mathrm{Pext}(D, B)$ delle estensioni pure di B tramite D. Nelle nostre ipotesi dev'essere $\mathrm{Pext}(D, B) = 0$ che equivale a $\mathrm{Pext}(Z(p^\infty), B) = 0$. Ciò significa che B è un p-gruppo chiuso; d'altra parte B è somma diretta di gruppi ciclici, quindi B è di esponente finito. (Cfr. [1], Teoremi 34.3 e 34.6, [3] pag. 382). Si ha pertanto $H = B \oplus D$.

Consideriamo ora una decomposizione di H in somma diretta di gruppi indecomponibili. Sia p^n l'esponente di B e denotiamo con α_i $(i = 1, \ldots, n)$ e con α_∞ i numeri cardinali che indicano rispettivamente quante volte i gruppi $Z(p^i)$ e $Z(p^\infty)$ figurano come addendi nella decomposizione considerata. Questi numeri sono gli invarianti di H nel senso che ogni altra decomposizione di H in somma diretta di gruppi indecomponibili individua gli stessi cardinali α_i ed α_∞. Posto $B_i = \sum_{\alpha_i} Z(p^i)$, abbiamo:

$$H = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus D. \tag{1}$$

Indichiamo con B^*_i e D^* i gruppi dei caratteri rispettivamente di B_i e D. Si ha $B^*_i = \prod_{\alpha_i} Z(p^i)$, $D^* = \prod_{\alpha_\infty} \mathcal{S}$ e

$$M = B^*_1 \oplus \ldots \oplus B^*_n \oplus D^*. \tag{2}$$

Lemma. *Siano α un numero cardinale ed i un intero positivo. I gruppi $\prod_\alpha Z(p^i)$ e $\prod_\alpha \mathcal{S}$ ammettono una unica topologia compatta se e solo se per ogni numero cardinale β si ha: $2^\alpha = 2^\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.*

Dim. L'affermazione è ovvia se α è finito. Supponiamo pertanto α infinito e poniamo $K = \prod_\alpha (p^i)$. K è il gruppo dei caratteri di $\sum_\alpha Z(p^i)$, quindi K ammette una topologia compatta. Questa è unica se e solo se per ogni p-gruppo X tale che $K \cong \mathrm{Hom}\,(X, Z(p^\infty))$ si ha $X \cong \sum_\alpha (p^i)$. Osserviamo ora che, come è facile verificare, ogni addendo diretto ciclico di K ha ordine p^i. Allora, poichè K è di esponente finito, si ha $K \cong \sum_{2^\alpha} Z(p^i)$. Supponiamo $K = \mathrm{Hom}\,(X, Z(p^\infty))$ con X p-gruppo: deve essere $X = \sum_\beta Z(p^i)$ con β cardinale infinito, da cui $K \cong \sum_{2^\beta} Z(p^i)$. Si ha dunque $2^\alpha = 2^\beta$, ed è $X \cong \sum_\alpha (p^i)$ se e solo se $\alpha = \beta$.

Sia ora $K = \sum_\alpha \mathcal{S}$. K ammette una topologia compatta in quanto gruppo dei caratteri di $\sum_\alpha Z(p^\infty)$. Supponiamo $K \cong \mathrm{Hom}\,(X, Z(p^\infty))$ con X p-gruppo. Poichè K è senza torsione X è divisibile [6], quindi $X = \sum_\beta Z(p^\infty)$ con β cardinale infinito. Posto $K' = \prod_\beta \mathcal{S}$, si ha $K \cong K'$. Ora K e K' sono $\widehat{Z}_p$-moduli di cotorsione e senza torsione. Pertanto essi sono isomorfi se e solo se $K/pK \cong K'/pK'$. (Cfr. [3], Proposition 2.1). Essendo $K/pK \cong \prod_\alpha Z(p)$ e $K'/pK' \cong \prod_\beta Z(p)$ risulta $2^\alpha = 2^\beta$, mentre $\sum_\alpha Z(p^\infty) \cong \sum_\beta Z(p^\infty)$ se e solo se $\alpha = \beta$.

Possiamo ora provare che $M \in \mathcal{C}_1$ se e solo se si verificano le seguenti due condizioni:

1) $M = \mathrm{Hom}(H, Z(p^\infty))$ con H p-gruppo somma diretta di un gruppo divisibile e di uno di esponente finito.

2) Per ogni invariante α di H e per ogni numero cardinale β si ha: $2^\alpha = 2^\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

Se $M \in \mathcal{C}_1$, la condizione 1) è verificata ed M può scriversi nella forma (2). Poichè M è il gruppo dei caratteri di H, dalla (1) si deduce che M, in quanto gruppo compatto, è algebricamente e topologicamente il prodotto diretto dei B^*_i e D^*, quindi $D^* \in \mathcal{C}_1$ e $B^*_i \in \mathcal{C}_1$ per ogni i. Dal lemma precedente segue la condizione 2). Viceversa supponiamo verificate entrambe le condizioni. Allora M può scriversi nella forma (2) come prodotto diretto di un numero finito di gruppi della classe $\mathcal{C}_1$. Sia ora H' un p-gruppo tale che $M \cong \mathrm{Hom}(H', Z(p^\infty))$. Per dimostrare che $M \in \mathcal{C}_1$ basta far vedere che $H \cong H'$. Poichè vale la (2) dev'essere $H' = B' \oplus D'$ con B' di esponente p^n e D' divisibile. Indichiamo con β_i $(i = l, \ldots, n)$ e β_∞ gli invarianti di H' ed osserviamo che $\mathrm{Hom}(B', Z(p^\infty))$ è isomorfo al sottogruppo di torsione di M e quindi a $\mathrm{Hom}(B, Z(p_\infty))$. Si ha pertanto

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{2^{\alpha_i}} Z(p^i)\right) \cong \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{2^{\beta_i}} Z(p^i)\right)$$

da cui $2^{\alpha_i} = 2^{\beta_i}$ e quindi $\alpha_i = \beta_i$ per ogni i. Dev'essere poi $\prod_{\alpha\infty} \mathfrak{F} \cong \prod_{\beta\infty} \mathfrak{F}$ da cui $2^{\alpha_\infty} = 2^{\beta_\infty}|$ e quindi $\alpha_\infty = \beta_\infty$. Pertanto H ed H' sono isomorfi.

4. Dalle considerazioni finora svolte si deduce il seguente

TEOREMA 1. *Sia G un gruppo ridotto. G ammette una ed una sola topologia compatta se e solo se sono soddisfatte le due condizioni seguenti:*

1) *$G = \mathrm{Hom}(T, Q/Z)$ dove T è un gruppo di torsione la cui componente p-primaria T_p, per ogni numero primo p, è somma diretta di un gruppo divisibile e di uno di esponente finito.*

2) *Per ogni p, per ogni invariante α di T_p e per ogni numero cardinale β si ha:*

(*) $$2^\alpha = 2^\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

COROLLARIO. *La classe* $\mathcal{C}_1$ *coincide con la classe* Γ *se e solo se l'implicazione* (*) *è vera per ogni coppia* α, β *di numeri cardinali.*

OSSERVAZIONE. Se $G = \operatorname{Hom}(T, Q/Z)$ è un gruppo della classe $\mathcal{C}_1$, è chiaro che, per ogni primo p, $G_p = \operatorname{Hom}(T_p, Z(p^\infty))$ si esprime esplicitamente come prodotto diretto di p-gruppi ciclici e di interi p-adici e non è difficile riconoscere che gli invarianti di T_p sono anche invarianti di G_p con riferimento ad ogni decomposizione di questo tipo.

5. Sia G un gruppo ridotto e compatto con topologia $\mathcal{T}$. Poichè G è totalmente sconnesso, G ammette come base di intorni dello zero una famiglia di sottogruppi aperti di indice finito (cfr. [8], Theorem 17). Consideriamo ora su G le seguenti due topologie: la topologia $\mathcal{J}$ ottenuta prendendo come base di intorni dello zero tutti i sottogruppi di indice finito e la topologia naturale $\mathcal{N}$ ottenuta prendendo come base di intorni dello zero i sottogruppi nG con n intero positivo. Entrambe queste topologie sono gruppali e di Hausdorff. Inoltre:

$$\mathcal{N} \supseteq \mathcal{J} \supseteq \mathcal{T}.$$

Si vede quindi che se G è compatto nella topologia $\mathcal{N}$ o nella topologia $\mathcal{J}$, G appartiene alla classe $\mathcal{C}_1$.

TEOREMA 2. *Sia G un gruppo ridotto. Le condizioni che seguono sono equivalenti*:

(a) *G è compatto nella topologia dei sottogruppi di indice finito.*

(b) *G è compatto nella topologia naturale.*

(c) *$G = \prod_p G_p$ e, per ogni p, G_p è uno $\widehat{Z}_p$-modulo finitamente generato.*

(d) *$G \in \mathcal{C}_1$ e gli invarianti del gruppo dei caratteri di G sono finiti.*

DIM. (a) $\Rightarrow$ (b). Siano T il gruppo dei caratteri di G e p un primo arbitrario. Il sottogruppo pG è chiuso in G ed il suo ortogonale coincide con $T[p]$, cosicchè G/pG è il gruppo dei caratteri di $T[p]$. Sia F un sottogruppo di indice finito di G tale che $F \supseteq pG$. F è un sottogruppo chiuso di G ed il suo ortogonale F^+ è un sottogruppo finito di $T[p]$. Atteggiando G/pG e $T[p]$ a spazi vettoriali sul corpo primo di caratteristica p, si vede che l'applicazione $F \rightarrow F^{\perp}$ è una biiezione tra i sottospazi di codimensione finita di G/pG ed i sottospazi di dimensione finita di $T[p]$. Si ha $T[p] \cong \sum_{\alpha} Z(p)$ dove α è un certo cardinale, da cui $G/pG \cong \prod_{\alpha} Z(p)$. Se α è infinito i sottospazi di codimensione finita di $G/pG \cong \sum_{2^{\alpha}} Z(p)$ sono almeno 2^{α}, mentre i sottospazi di dimensione finita di $T[p]$ sono al di più α. Allora α è finito e di conseguenza G/pG è finito. Ciò basta per concludere.

Da $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{J}$ segue (b)$\Rightarrow$(a); (b)$\Leftrightarrow$(c) è il teorema 1 di [7], (c) $\Leftrightarrow$ (d) è evidente.

BIBLIOGRAFIA

[1] FUCHS, L.: *Abelian groups*, Budapest 1958.

[2] FUCHS, L.: *On character groups of discrete abelian groups*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 10 (1959), 133-140.

[3] HARRISON, D. K.: *Infinite abelian groups and homological methods*, Ann. Math., 69 (1959), 366-391.

[4] HULANICKI, A.: *Algebraic characterization of abelian divisible groups which admit compact topologies*, Fund. Math. 44 (1957), 192-197.

[5] HULANICKI, A.: *Algebraic structure of compact abelian groups*, Bull Acad. Pol. Sci., 10 (1962), 71-75.

[6] KAPLANSKY, I.: *Infinite abelian groups*, Ann Arbor 1954.

[7] ORSATTI, A.: *Una caratterizzazione dei gruppi abeliani compatti o localmente compatti nella topologia naturale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 39 (1967), 219-225.

[8] PONTRYAGIN, L. S.: *Topological groups*, 2nd Ed., New York 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 gennaio 1970.