

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MOÏSE SIBONY

**Contrôle des systèmes gouvernés par des
équations aux dérivées partielles**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 43 (1970), p. 277-339

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__43__277_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

CONTROLE DES SYSTEMES GOUVERNÉS PAR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MOÏSE SIBONY

Introduction.

Soient X un convexe fermé d'un espace de Banach V , et F une fonctionnelle sur X . On se propose d'approcher $u \in X$, solution du problème

$$(1) \quad F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in X.$$

Dans les problèmes de contrôle, régis par des équations aux dérivées partielles, le problème (1) consiste à chercher un couple $(x, u) \in X \times \mathcal{M}_{ad}$ (\mathcal{M}_{ad} étant l'ensemble des contrôles admissibles), solution du problème

$$(2) \quad J(x, u) \leq J(y, v), \quad \forall (y, v) \in X \times \mathcal{M}_{ad}.$$

Le convexe $X \times \mathcal{M}_{ad}$ peut, en particulier, s'écrire sous la forme

$$(3) \quad X \times \mathcal{M}_{ad} = \{(y, v) \in X \times \mathcal{M}_{ad}; Ay = f + Bv\},$$

avec $A \in \mathcal{L}(V, V')$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, V')$, et f est donné dans V' .

Le but de cet article est de donner une méthode systématique d'approximation des solutions des problèmes (1) et (2).

Notre plan est le suivant:

1. Un théorème d'existence et d'unicité.

2. Un théorème général de pénalisation.
3. Problème de contrôle de systèmes gouvernés par une équation aux dérivées partielles lineaire.
4. Pénalisation partielle et pénalisation totale des contraintes.
5. Une méthode itérative.
6. Une méthode d'approximation.
7. Application I. Etude d'un problème de contrôle régi par une équation aux dérivées partielles.
8. Résultats numériques.
9. Application II.

1. Un théorème d'existence et d'unicité.

Soit W un Banach sur \mathbf{R} , réflexif de norme $\| \cdot \|$. On note par W' son dual muni de la norme $\| \cdot \|'$.

Soit X un convexe fermé de W . On note par (f, u) la dualité entre W et W' ; $f \in W'$, $u \in W$.

On se donne une application F de X dans $] -\infty, +\infty]$, non identique à $+\infty$.

On fait les hypothèses suivantes:

(i) F est semi-continue inférieurement (s. c. i.) pour la topologie faible induite par $\sigma(V, V')$;

(ii) F est strictement convexe, et vérifie

$$\lim_{\substack{\|u\| \rightarrow \infty \\ u \in X}} F(u) = +\infty;$$

(iii) F est dérivable au sens de Gateaux.

Alors on a le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1.

1) Sous les hypothèses (i) et (ii), il existe $u \in X$ unique tel que

$$(1.1) \quad F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in X.$$

2) Si, de plus, on suppose (iii), et on note par F' la dérivée au

sens de Gateaux de F , alors toute solution de (1.1) est solution de

$$(1.2) \quad (F'u, v-u) \geq 0, \quad \forall v \in X,$$

et réciproquement.

DÉMONSTRATION.

1) Soit v_0 fixé dans X . Posons

$$K_{v_0} = \{u \mid u \in X; F(u) \leq F(v_0)\}.$$

On montre facilement que toute solution de (1.1) est solution de

$$(1.3) \quad F(u) \leq F(w), \quad \forall w \in K_{v_0},$$

et réciproquement. D'autre part, d'après (ii), K_{v_0} est un convexe borné dans un Banach W réflexif. Il est faiblement fermé, car F est s. c. i. pour la topologie faible. Donc K_{v_0} est faiblement compact. Donc il existe un $u \in K_{v_0}$ qui réalise la borne inférieure de $F : K_{v_0} \rightarrow \mathbf{R}$. La stricte convexité de F entraîne l'unicité de la borne inférieure.

2) Posons dans (1.1), $v = u + t(w - u)$, $t > 0$, $w \in X$; il vient alors:

$$(1.4) \quad \frac{F(u + t(w - u)) - F(u)}{t} \geq 0.$$

En passant à la limite, on a (1.2).

Réciproquement, on montre que si F est convexe et dérivable au sens de Gateaux, alors F' est monotone:

$$(F'v - F'u, v - u) \geq 0, \quad \forall u, v \in X.$$

Donc $(F'v, v - u) \geq 0$. Faisons alors $v = u + t(w - u)$, avec $t > 0$ et $w \in X$; il vient:

$$(1.5) \quad (F'(u + t(w - u)), w - u) \geq 0, \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Posons $h(t) = F(u + t(w - u))$. h est convexe. Or $h'(t) = (F'(u + t(w - u)), w - u)$,

$w-u$), et d'après (1.5), $h'(t) > 0, \forall t \in]0, 1[$. Donc $h(t)$ est croissante, et $h(0) \leq h(1)$, ce qui donne $F(u) \leq F(w), \forall w \in X$.

2. Un théorème général de pénalisation.

Nous avons vu que résoudre le problème

$$(2.1) \quad F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in X,$$

équivalent à résoudre

$$(2.2) \quad (Au, v-u) \geq 0, \quad \forall v \in X, \quad \text{où } A = F'.$$

On se propose dans ce paragraphe d'approcher $u \in X$, solution de (2.2), par $u_\varepsilon \in W$, solution d'une équation à déterminer, où ε est un paramètre positif destiné à tendre vers 0. Plus précisément, on fait les hypothèses suivantes:

(i) Le convexe X est de la forme

$$X = \{v \in W \mid Bv = 0\},$$

où B est un opérateur monotone ($(Bu - Bv, u - v) \geq 0, \forall u, v \in W$) et hémicontinu.

(ii) A est un opérateur hémicontinu, et tel que

$$(Au - Av, u - v) \geq (\varphi(\|u\|) - \varphi(\|v\|))(\|u\| - \|v\|), \quad \forall u, v \in W,$$

où φ est une application de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R} , strictement croissante, telle que $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = +\infty$.

(iii) W est un espace uniformément convexe.

Nous avons alors le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. *On suppose (i), (ii) et (iii); alors:*

- 1) *Il existe $u \in X$ unique solution de (2.2);*
- 2) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in W$ unique solution de*

$$(2.3) \quad Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} Bu_\varepsilon = 0;$$

3) $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans W fort quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION. La première assertion se déduit du théorème 1.1, et la seconde du théorème 1.1 de H. Brezis et M. Sibony ([4]) (cf. aussi M. Sibony [7]). Démontrons la troisième.

a) Montrons que u_ε est borné dans W . Toute solution de (2.3) est solution de

$$(2.4) \quad \varepsilon(Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + (Bu_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \geq 0, \quad \forall v \in W,$$

et réciproquement.

Soit K le convexe fermé des solutions u de

$$(2.5) \quad (Bu, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in X.$$

On suppose $K \neq \emptyset$.

Faisons $v = u$ dans (2.4), et $v = u_\varepsilon$ dans (2.5); par addition, il vient:

$$(2.6) \quad \varepsilon(Au_\varepsilon, u - u_\varepsilon) + (Bu_\varepsilon - Bu, u - u_\varepsilon) \geq 0.$$

Comme B est un opérateur, c'est-à-dire $(Bu - Bv, u - v) \geq 0, \forall u, v \in W$, on a alors

$$(2.7) \quad (Au_\varepsilon, u - u_\varepsilon) \geq 0.$$

Or nous avons

$$(2.8) \quad (Au_\varepsilon - Au, u_\varepsilon - u) \geq (\varphi(\|u_\varepsilon\|) - \varphi(\|u\|))(\|u_\varepsilon\| - \|u\|),$$

ce qui donne, d'après (2.7),

$$(2.9) \quad (\varphi(\|u_\varepsilon\|) - \varphi(\|u\|))(\|u_\varepsilon\| - \|u\|) \leq (Au, u - u_\varepsilon).$$

On en déduit que $\|u_\varepsilon\|$ est borné.

Donc, suivant un ultrafiltre \mathcal{U} , on a $u_\varepsilon \rightarrow \xi$ dans V faible.

b) Montrons que $\xi \in K$. Toute solution de (2.4) est solution de

$$(2.10) \quad (\varepsilon Av + Bv, v - u_\varepsilon) \geq 0, \quad \forall v \in W,$$

et réciproquement. A la limite suivant $\mathcal{Q}\mathcal{L}$, on a

$$(2.11) \quad (Bv, v - \xi) \geq 0, \quad \forall v \in W,$$

ce qui équivaut à

$$(B\xi, v - \xi) \geq 0, \quad \forall v \in W.$$

D'où $\xi \in K$.

c) *Montrons que $\|u_\varepsilon\| \rightarrow \|\xi\|$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.* Faisons $v = \xi$ dans (2.4); on a

$$(2.12) \quad \varepsilon(Au_\varepsilon, \xi - u_\varepsilon) + (Bu_\varepsilon, \xi - u_\varepsilon) \geq 0.$$

Dans (2.5), on pose $v = u_\varepsilon$ et $u = \xi$, on a alors

$$(2.13) \quad (B\xi, u_\varepsilon - \xi) \geq 0.$$

Par addition, on a

$$(2.14) \quad \varepsilon(Au_\varepsilon, \xi - u_\varepsilon) + (Bu_\varepsilon - B\xi, \xi - u_\varepsilon) \geq 0.$$

Comme B est un opérateur monotone, on en déduit

$$(2.15) \quad (Au_\varepsilon, \xi - u_\varepsilon) \geq 0.$$

Par ailleurs, nous avons

$$(2.16) \quad (Au_\varepsilon - A\xi, u_\varepsilon - \xi) \geq (\varphi(\|u_\varepsilon\|) - \varphi(\|\xi\|))(\|u_\varepsilon\| - \|\xi\|),$$

ce qui donne, d'après (2.15),

$$(2.17) \quad \varphi(\|u_\varepsilon\|) - \varphi(\|\xi\|) \leq (A\xi, \xi - u_\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Donc $\|u_\varepsilon\| \rightarrow \|\xi\|$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

d) *Montrons que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans W fort.* D'après ce qui précède, on a $u_\varepsilon \rightarrow \xi$ dans W faible, et $\|u_\varepsilon\| \rightarrow \|\xi\|$. Comme W est uniformément convexe, il résulte que $u_\varepsilon \rightarrow \xi$ dans W fort.

Posons $v = u_\epsilon$ dans (2.5), et $v = u$ dans (2.10); après addition, il vient:

$$(2.18) \quad (Au, u - u_\epsilon) \geq 0, \quad \forall u \in X.$$

En passant à la limite suivant \mathcal{U} , on a

$$(2.19) \quad (Au, u - \xi) \geq 0, \quad \forall u \in X,$$

ce qui équivaut à

$$(2.20) \quad (A\xi, u - \xi) \geq 0, \quad \forall u \in X.$$

Donc ξ est solution de (2.2) et, d'après l'unicité de la solution, on a $\xi = u$.

Donc $u_\epsilon \rightarrow u$ dans W fort suivant tout ultrafiltre.

COROLLAIRE 2.1. *On suppose $X = \{v \in W \mid g(v) \leq 0\}$, où $g \geq 0$, convexe s. c. i., et dérivable au sens de Gateaux.*

Soit $F : X \rightarrow]-\infty, +\infty)$ une fonctionnelle non identique à $+\infty$, strictement convexe s. c. i., dérivable au sens de Gateaux, et telle que

$$\lim_{\substack{\|u\| \rightarrow \infty \\ u \in X}} F(u) = +\infty.$$

Alors:

1) *Il existe $u \in X$ unique solution de*

$$(2.21) \quad F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in X;$$

2) *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u_\epsilon \in W$ unique solution de*

$$(2.22) \quad F(u_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} g(u_\epsilon) \leq F(v) + \frac{1}{\epsilon} g(v), \quad \forall v \in W;$$

3) *$u_\epsilon \rightarrow u$ dans W fort quand $\epsilon \rightarrow 0$.*

DÉMONSTRATION. On applique le théorème 1.1 pour avoir les deux premières assertions. Démonstrons la 3e.

Toute solution de (2.21) est solution de

$$(2.23) \quad (F'(u), v-u) \geq 0, \quad \forall v \in X,$$

et réciproquement.

Toute solution de (2.22) est solution de

$$(2.24) \quad \left(F'(u_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} g'(u_\epsilon), v - u_\epsilon \right) \geq 0, \quad \forall v \in W,$$

ou

$$(2.25) \quad F'(u_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} g'(u_\epsilon) = 0,$$

et réciproquement.

On applique alors le théorème 2.1.

REMARQUE 2.1. Si $X = \{v \in W \mid g_0(v) \leq 0\}$, où g_0 est convexe s. c. i., et dérivable au sens de Gateaux, le corollaire 2.1 est encore valable si on pose:

$$g = Hg_0^2, \quad \text{où } H = \begin{cases} 1, & \text{si } g_0(v) > 0, \\ 0, & \text{si } g_0 \leq 0, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$g = g^2_+, \quad \text{avec } g^+ = \sup \{g_0, 0\}.$$

A. Bensoussan et P. Keneth opèrent ainsi, dans [2], avec des hypothèses plus restrictives.

REMARQUE 2.2. Un théorème de pénalisation analogue au corollaire 2.1, et en supposant pas l'existence de la dérivée au sens de Gateaux, est donné dans M. Sibony [7.a].

COROLLAIRE 2.2. Soient X un convexe fermé d'un Hilbert H de norme $\| \cdot \|$, et P l'opérateur de projection de H sur X . On se donne $A : H \rightarrow H'$ hémicontinu et vérifiant (ii); alors:

1) Il existe $u \in X$ unique solution de

$$(2.26) \quad (Au, v-u) \geq 0, \quad \forall v \in X;$$

2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_\varepsilon \in H$ unique solution de

$$(2.27) \quad Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \{u_\varepsilon - Pu_\varepsilon\} = 0;$$

3) $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans H fort quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION. Posons $B = I - P$. C'est un opérateur monotone hémicontinu, car $\|Pu - Pv\| \leq \|u - v\|$. De même, nous avons

$$X = \{u \in H \mid Pu = u\} = \{u \in H \mid Bu = 0\}.$$

On applique alors le théorème 2.1.

REMARQUE 2.3. Dans le paragraphe 6, nous allons approcher une inéquation dans un espace de Banach W , par une autre dans un espace de *dimension finie*. Ce qui permet d'appliquer toujours le corollaire 2.1 au nouveau problème discrétisé.

REMARQUE 2.4. Le corollaire 2.2 dit qu'on peut toujours « pénaliser un convexe », c'est-à-dire remplacer un problème de minimisation sur un convexe $X \subset H$ (H étant un espace de Hilbert), par un problème de minimisation sur l'espace H tout entier.

3. problème de contrôle de systèmes gouvernés par une équation aux dérivées partielles linéaires.

Soit V un Banach sur \mathbf{R} de dual V' . On désigne par $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|'_1$ les normes de V et V' . On note par $(\cdot, \cdot)_1$ la dualité entre V et V' .

On se donne un espace de Banach \mathcal{Q} , des contrôles, et un opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}, V')$. On munit \mathcal{Q} de la norme $\|\cdot\|_2$, et \mathcal{Q}' (dual de \mathcal{Q}) de la norme $\|\cdot\|'_2$. On note par $(\cdot, \cdot)_2$ la dualité entre \mathcal{Q} et \mathcal{Q}' .

Soit A un opérateur linéaire de V dans V' . Pour $u \in \mathcal{Q}$, l'état du système est donné par y , solution de l'équation:

$$(3.1) \quad Ay = f + Bv; \quad y \in V, \text{ et } f \text{ donné dans } V'.$$

La solution y de (3.1) dépend de v ; on a donc

$$(3.2) \quad Ay(v) = f + Bv; \quad y \in V.$$

A tout contrôle $v \in \mathcal{Q}$, on associe le coût $F(y, v)$, où F est une fonctionnelle définie sur $V \times \mathcal{Q}$. Soit \mathcal{Q}_{ad} = ensemble convexe fermé de \mathcal{Q} . On pose alors le problème de contrôle suivant:

PROBLÈME 1. *Trouver $(y, v) \in V \times \mathcal{Q}_{ad}$ réalisant:*

$$(3.3) \quad \inf_{v \in \mathcal{Q}_{ad}} F(y(v), v),$$

où y est solution dans V de l'équation

$$(3.4) \quad Ay = f + Bv.$$

On va maintenant considérer les deux variables y et v comme indépendantes; ce qui nous permettra d'introduire une nouvelle fonctionnelle $J(v_1)$ du couple $v_1 = (y, v)$, fonctionnelle à minimiser sur un convexe X , sur lequel l'équation (3.4) est une contrainte supplémentaire. Plus précisément, nous avons le lemme ci-après.

LEMME 3.1. *L'ensemble*

$$(3.5) \quad X = \{v_1 \mid v_1 = (y, v) \in V \times \mathcal{Q}_{ad}, Ay = f + Bv; \\ f \in V', A \in \mathcal{L}(V, V'), B \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}, V')\}$$

est un convexe fermé de $V \times \mathcal{Q}$.

DÉMONSTRATION. Soient

$$v_1 = (y, v), \quad v \in \mathcal{Q}_{ad}, \quad Ay = f + Bv, \\ u_1 = (x, u), \quad u \in \mathcal{Q}_{ad}, \quad Ax = f + Bu.$$

On montre facilement que

$$tv_1 + (1-t)u_1 \in X; \quad t \in]0, 1[.$$

Nous avons alors le problème suivant.

PROBLÈME 2. Chercher $u_1=(x, u) \in X$ tel que

$$(3.6) \quad J(u_1) \leq J(v_1), \quad \forall v_1 \in X,$$

où J est une fonctionnelle définie sur $V \times \mathcal{M}_{ad}$, à valeur dans $] -\infty, +\infty]$ non identique à $+\infty$.

Pour $v_1=(y, v) \in V \times \mathcal{M}_{ad}$, on pose

$$\| v_1 \| = (\| y \|^2 + \| v \|^2)^{1/2};$$

on désigne par (\cdot, \cdot) la dualité entre $V \times \mathcal{M}$ et $(V \times \mathcal{M})'$. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. On suppose que:

(i) $J : V \times \mathcal{M} \rightarrow] -\infty, +\infty]$ est strictement convexe s. c. i., et

$$\lim_{\substack{\|v_1\| \rightarrow +\infty \\ v_1 \in X}} J(v_1) = +\infty;$$

(ii) J est dérivable au sens de Gateaux; on note par J' sa dérivée.

Alors:

1) Il existe $u_1 \in X$ unique tel que

$$(3.7) \quad J(u_1) \leq J(v_1), \quad \forall v_1 \in X,$$

avec

$$(3.8) \quad X = \{ v_1 \mid v_1=(y, v) \in V \times \mathcal{M}_{ad}; Ay=f+Bv \}.$$

2) Toute solution de (3.7) est solution de

$$(3.9) \quad (J'(u_1), v_1 - u_1) \geq 0, \quad \forall v_1 \in X,$$

et réciproquement.

DÉMONSTRATION. Ce théorème est une application directe du théorème 1.1.

4. Pénalisation partielle et pénalisation totale des contraintes.

Dans le paragraphe suivant, nous donnons une méthode itérative permettant de résoudre le problème (3.9). Cette méthode fait appel essentiellement à la projection sur le convexe X , donné par (3.8), qui peut s'écrire

$$(4.1) \quad X = X_1 \cap X_2,$$

où

$$X_1 = \{v_1 = (y, v) \mid v \in \mathcal{M}_{ad}\},$$

$$X_2 = \{v_1 = (y, v) \mid Ay = f + Bv\}.$$

a) Si on sait projeter sur \mathcal{M}_{ad} , on saura projeter sur X_1 . Il y a lieu alors de « pénaliser » uniquement le convexe X_2 : c'est la « *pénalisation partielle* » des contraintes.

b) Si on ne sait pas projeter sur \mathcal{M}_{ad} , alors la « *pénalisation totale* » de X est nécessaire. Quand le convexe \mathcal{M}_{ad} n'est pas trop compliqué, la pénalisation partielle permet « d'économiser » une nouvelle approximation du problème.

Supposons maintenant que l'on soit dans le cas a). La méthode consiste à transporter les contraintes de X_2 dans la fonctionnelle $J(v_1)$. On est alors conduit à minimiser une nouvelle fonctionnelle $J_{\varepsilon_1}(v_1)$ uniquement le convexe X_1 .

Plus précisément, au problème

$$(4.2) \quad J(u_1) \leq J(v_1), \quad \forall v_1 \in X_1 \cap X_2,$$

on associe le problème

$$(4.3) \quad J_{\varepsilon_1}(u_{1\varepsilon_1}) \leq J_{\varepsilon_1}(v_1), \quad \forall v_1 \in X_1,$$

où $J_{\varepsilon_1}(v_1) = J(v_1) + \frac{1}{\varepsilon_1} \|Ay - f - Bv\|_V^2$.

On va montrer que $u_{1\varepsilon_1}$ converge vers u_1 quand $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Soit l'espace

$$Y = \{y \mid y \in V, Ay \in V'\}.$$

On munit Y de la norme

$$\|y\|_Y^2 = \|y\|_V^2 + \|Ay\|_V^2.$$

Posons alors

$$X_1 = \{v_1 = (y, v) \in Y \times \mathcal{M}_{ad}\}.$$

Nous avons alors le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. *Soit $J : V \times \mathcal{M} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ non identique à $+\infty$, strictement convexe s. c. i., dérivable, et tel que*

$$\lim_{\substack{\|v_1\| \rightarrow \infty \\ v_1 \in X}} J(v_1) = +\infty,$$

où $\|v_1\|^2 = \|y\|_Y^2 + \|v\|_{\mathcal{M}}^2$,

$$X = \{v_1 = (y, v) \in Y \times \mathcal{M}_{ad}; Ay = f + Bv\}.$$

On suppose de plus que $(\|Ay\|_V \rightarrow \infty) \Rightarrow (\|y\|_V \rightarrow \infty)$. Alors on a les assertions suivantes:

1) Pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $u_{1\varepsilon_1} = (x_{\varepsilon_1}, u_{\varepsilon_1}) \in X_1$ unique tel que

$$(4.4) \quad J_{\varepsilon_1}(u_{1\varepsilon_1}) \leq J_{\varepsilon_1}(v_1), \quad \forall v_1 \in X_1,$$

où $X_1 = \{v_1 = (y, v) \in Y \times \mathcal{M}_{ad}\}$,

$$J_{\varepsilon_1}(v_1) = J(v_1) + \frac{1}{\varepsilon_1} \|Ay - f - Bv\|_V^2.$$

2) Lorsque $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, on a $u_{1\varepsilon_1} \rightarrow u_1$ dans $Y \times \mathcal{M}$ fort, où u_1 est l'unique solution de

$$(4.5) \quad J(u_1) \leq J(v_1), \quad \forall v_1 \in X.$$

DÉMONSTRATION.

1) On montre facilement que $J_{\varepsilon_1}(v_1)$ est strictement convexe s. c. i. et dérivable. De plus, on a

$$\lim_{\|v_1\| \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_1}(v_1) = +\infty;$$

car $J_{\varepsilon_1}(v_1) > J(v_1) \rightarrow \infty$ quand $\|v_1\| \rightarrow \infty$. Ceci donne l'existence et l'unicité de $u_{1\varepsilon_1} \in X_1$, solution de (4.4).

2) Montrons que $u_{1\varepsilon_1} \rightarrow u_1$ quand $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Nous avons

$$X_2 = \{v_1 = (y, v) \mid Ay = f + Bv\} = \{v_1 = (y, v) \mid g(v_1) = 0\},$$

où $g(v_1) = \|Ay - f - Bv\|_V^2$. On applique alors le corollaire 2.1.

REMARQUE 4.1. Posons $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, où ε_1 et ε_2 sont des paramètres destinés à tendre vers 0. On peut directement approcher $u_1 \in X_1 \cap X_2$, solution de

$$(4.6) \quad J(u_1) \leq J(v_1), \quad \forall v_1 \in X_1 \cap X_2,$$

par $u_{1\varepsilon} \in Y \times \mathcal{M}$, solution de

$$(4.7) \quad J_\varepsilon(u_{1\varepsilon}) \leq J_\varepsilon(v_1), \quad \forall v_1 \in Y \times \mathcal{M}; \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

où

$$J_\varepsilon(v_1) = J(v_1) + \frac{1}{\varepsilon_1} \|Ay - f - Bv\|_V^2 + \frac{1}{\varepsilon_2} g_2(v_1).$$

Si on pose

$$X_1 = \{v_1 \mid g_2(v_1) = 0\},$$

où $g_2 \geq 0$ convexe s. c. i. et dérivable, on a alors $u_{1\varepsilon} \rightarrow u_1$ dans $Y \times \mathcal{M}$ fort quand $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow 0$.

5. Une méthode itérative.

Si les espaces V et \mathcal{M} sont des Hilberts, le théorème suivant donne alors une méthode itérative permettant de calculer numériquement u_1 , solution de (4.5), et plus particulièrement $u_{1\varepsilon_1}$, solution de (4.4), ou encore $u_{1\varepsilon}$ ($\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$), solution de (4.7).

THÉORÈME 5.1. Soit $J : V \times \mathcal{M}_{ad} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ non identique à $+\infty$, convexe et dérivable au sens de Gateaux.

Soit S une application linéaire de $V \times \mathcal{Q}$ dans son dual, telle que:

- (i) $(Su_1, v_1) = (u_1, Sv_1), \forall u_1, v_1 \in V \times \mathcal{Q}$;
- (ii) il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$(Su_1, u_1) \geq \sigma \|u_1\|^2.$$

Posons $[u_1]^2 = (Su_1, u_1)$. Alors $[\]$ définit sur $V \times \mathcal{Q}$ une norme équivalente à $\| \ \|$.

On suppose alors:

- (iii) J' est hémicontinu (c'est-à-dire que la restriction de J' aux segments de $V \times \mathcal{Q}$ est continue dans $(V \times \mathcal{Q})'$ faible), et vérifie:

$$(J'u_1 - J'v_1, u_1 - v_1) \geq k[u_1 - v_1]^2, \quad k > 0, \forall u_1, v_1 \in V \times \mathcal{Q};$$

- (iv) Quelle que soit la constante $N > 0$, il existe une constante $C(N)$ telle que, si $[u_1] \leq N, [v_1] \leq N$, on a

$$(J'(u_1) - J'(v_1), u_1 - v_1) \leq C(N)[u_1 - v_1][w_1], \quad \forall w_1 \in V \times \mathcal{Q}.$$

Alors:

- 1) Il existe $u_1 \in X$ unique solution de

$$(5.1) \quad (J'u_1, v_1 - u_1) \geq 0, \quad \forall v_1 \in X,$$

- 2) La suite (u_1^n) , définie par l'itération

$$(5.2) \quad u_1^{n+1} = P_X^S(u_1^n - \rho S^{-1}J'(u_1^n)),$$

converge fortement dans $V \times \mathcal{Q}$ vers u_1 , solution de (5.1), pour u_1^0 quelconque et $\rho = k/C^2(N)$, et où P_X^S désigne l'opérateur de projection sur le convexe X suivant la norme $[\]$.

DÉMONSTRATION. On applique le théorème 1.1 de M. Sibony Sibony [7.b].

REMARQUE 5.1. En particulier, la suite (u_1^n) converge vers u_1 pour

$$u_1^0 = 0, \quad N = \frac{2 \|J'(0)\|}{k\sqrt{\sigma}}, \text{ et } \rho = k/C^2(N).$$

REMARQUE 5.2.

1) On peut, bien-entendu, prendre toujours $S = Id$. Le but essentiel de l'opérateur S est de permettre un changement de norme, afin d'augmenter la rapidité de convergence des itérations (5.2).

2) Le paramètre $\rho = k/C^2(N)$ est calculé théoriquement à partir des hypothèses (iii) et (iv) sur l'opérateur J' . Ce choix conduit bien-entendu au résultat; mais dans la pratique, il semble qu'il faille surestimer ρ à partir de sa valeur théorique (cf. les résultats numériques dans M. Sibony [7.b]).

THÉORÈME 5.2. *On fait les hypothèses (i), (ii), (iii) et (iv), du théorème précédent. Alors:*

1) *Il existe $u_1 \in X$ unique solution de*

$$(5.3) \quad (J'u_1, v_1 - u_1) \geq 0, \quad \forall v_1 \in X.$$

2) *On se donne un paramètre $\varepsilon_1 > 0$. On pose*

$$(5.4) \quad X_1 = \{v_1 = (y, v) \in Y \times \mathcal{M}_{ad}\},$$

$$(5.5) \quad g(v_1) = \|Ay - f - Bv\|_V^2.$$

On suppose que si $[u_1] \leq W$, $[v_1] \leq N$, il existe $\alpha(N) \geq 0$ tel que

$$(5.6) \quad (g'(u_1) - g'(v_1), w_1) \leq \alpha(N)[u_1 - v_1][w_1], \quad \forall v_1.$$

Alors la suite $(u_{1\varepsilon_1}^n)$, définie par les itérations

$$(5.7) \quad u_{1\varepsilon_1}^{n+1} = P_{X_1}^S(u_{1\varepsilon_1}^n - \rho S^{-1}J'_{\varepsilon_1}(u_{1\varepsilon_1}^n)),$$

converge fortement dans $V \times \mathcal{M}$ vers u_1 , solution de (5.3), quand $n \rightarrow \infty$ et $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, pour $u_{1\varepsilon_1}^0$ quelconque et $\rho = k/(C(N) + \frac{1}{\varepsilon_1} \alpha(N))^2$, où $P_{X_1}^S$ est l'opérateur de projection sur le convexe X_1 (convexe sur lequel on sait projeter) au sens de la norme $[\]$, et $J_{\varepsilon_1} = J + \frac{1}{\varepsilon_1} g$.

DÉMONSTRATION.

1) Cette assertion a déjà été démontrée.

2) Nous avons $J'_{\varepsilon_1} = J' + \frac{1}{\varepsilon_1} g'$. Nous avons alors

$$(g'u_1 - g'v_1, u_1 - v_1) \geq 0, \quad \forall u_1, v_1,$$

car g est convexe et dérivable. Donc

$$(J'_{\varepsilon_1} u_1 - J'_{\varepsilon_1} v_1, u_1 - v_1) \geq k[u_1 - v_1]^2.$$

De même, si $[u_1] \leq N, [v_1] \leq N$, on a

$$(J'_{\varepsilon_1} u_1 - J'_{\varepsilon_1} v_1, w_1) \leq C(N)[u_1 - v_1][w_1] + \alpha(N)[u_1 - v_1][w_1].$$

On applique alors le théorème 5.1 pour dire que $u_{\varepsilon_1}^n \rightarrow u_{\varepsilon_1}$ quand $n \rightarrow \infty$, et le théorème 4.1 pour dire que $u_{\varepsilon_1} \rightarrow u_1$ quand $\varepsilon_1 \rightarrow 0$.

THÉORÈME 5.3. *On fait les hypothèses (i), ..., (iv) du théorème 5.1. Alors:*

1) *Il existe $u_1 \in X$ unique solution de*

$$(5.8) \quad (J'u_1, v_1 - u_1) \geq 0, \quad \forall v_1 \in X.$$

2) *On se donne $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$; on pose*

$$(5.9) \quad g_1(v_1) = \|Ay - f - Bv\|_V^2,$$

$$(5.10) \quad X_1 = \{v_1 \mid g_2(v_1) = 0\},$$

avec $g_2 \geq 0$ convexe s. c. i. dérivable. On suppose que g'_1 et g'_2 sont lipschitziens sur les ensembles bornés, et plus précisément: $\forall N > 0$, il existe $\alpha_1(N), \alpha_2(N) \geq 0$ tels que la condition: $[u_1] \leq N, [v_1] \leq N$, implique

$$(5.11) \quad (g'_1 u_1 - g'_1 v_1, w_1) \leq \alpha_1(N)[u_1 - v_1][w_1], \quad \forall w_1.$$

$$(5.12) \quad (g'_2 u_1 - g'_2 v_1, w_1) \leq \alpha_2(N)[u_1 - v_1][w_1], \quad \forall w_1.$$

Alors la suite $(u_{1\varepsilon}^n)$, définie par l'itération

$$(5.13) \quad u_{1\varepsilon}^{n+1} = u_{1\varepsilon}^n - \rho S^{-1} J'_\varepsilon(u_{1\varepsilon}^n),$$

avec $J'_\varepsilon = J' + \frac{1}{\varepsilon_1} g'_1 + \frac{1}{\varepsilon_2} g'_2$, converge fortement dans $V \times \mathcal{O}\mathcal{L}$ vers u_1 , solution de (5.8), quand $n \rightarrow \infty$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow 0$, pour $u_{1\varepsilon}^0$ quelconque et $\rho = k / (C(N) + \frac{1}{\varepsilon_1} \alpha_1(N) + \frac{1}{\varepsilon_2} \alpha_2(N))^2$.

DÉMONSTRATION.

1) Cette assertion a déjà été démontrée.

2) L'opérateur J'_ε vérifie les hypothèses du théorème 5.1. Donc $u_{1\varepsilon}^n \rightarrow u_{1\varepsilon}$ quand $n \rightarrow \infty$. On applique alors le théorème 4.1 pour dire que $u_{1\varepsilon} \rightarrow u_1$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

REMARQUE 5.3. Les itérations (5.2) sont impossibles dans la pratique, car on sait difficilement projeter sur un convexe X du type (3.8).

Les itérations (5.7) sont fonctionnelles dans la mesure où on sait projeter sur $\mathcal{O}\mathcal{L}_{ad}$, donc sur X_1 , donné par (5.4).

Par contre les itérations (5.13) sont toujours possibles.

Moralement donc, on remplace ce qui « ne va pas » dans la projection par une pénalisation.

REMARQUE 5.4. Le théorème 5.1 s'applique plus généralement à la résolution d'inéquations variationnelles non linéaires du type

$$(Au, v-u) \geq (f, v-u), \quad \forall v \in X,$$

où A est un opérateur monotone hémicontinu sur un Banach W , et vérifiant (iii) et (iv), et f est une fonction donnée dans W' (cf. M. Sibony [7]).

Nouveaux choix du paramètre ρ . Dans les itérations (5.7) ou (5.13), on peut toujours choisir un paramètre $\rho = \rho_n$ variable avec les itérations. Nous avons plusieurs manières de choisir ce paramètre optimal, $\rho = \rho_n$ (cf. M. Sibony [7.b]):

1) Si $\theta_n = 1 - k / C \leq \theta' < 1$ (θ' étant indépendant de n), où

$$k_n = \frac{(J'_\varepsilon u_n - J'_\varepsilon u_{n-1}, u_n - u_{n-1})}{[u_n - u_{n-1}]^2},$$

$$C_n = [S^{-1}(J'_\varepsilon u_n - J'_\varepsilon u_{n-1})] / [u_n - u_{n-1}],$$

on peut alors poser

$$(5.14) \quad \rho = \rho_{n, \varepsilon} = k_n / C_n^2,$$

dans les itérations:

$$(5.15) \quad u_{1\varepsilon}^{n+1} = u_{1\varepsilon}^n - \rho_n S^{-1} J'_\varepsilon u_{1\varepsilon}^n,$$

et, de manière analogue, dans les itérations:

$$(5.16) \quad u_{1\varepsilon}^{n+1} = P_{X_1}^S(u_{1\varepsilon}^n - \rho_{n, \varepsilon_1} S^{-1} J'_\varepsilon u_{1\varepsilon_1}^n),$$

où ρ_{n, ε_1} est donné par

$$(5.17) \quad \rho_{n, \varepsilon_1} = \frac{(J'_\varepsilon u_n - J'_\varepsilon u_{n-1}, u_n - u_{n-1})}{[S^{-1}(J'_\varepsilon u_n - J'_\varepsilon u_{n-1})]^2}.$$

2) Si J'_ε est linéaire continu et coercif (au sens suivant :

$$(J'_\varepsilon u_{1\varepsilon}, u_{1\varepsilon}) \geq \alpha \|u_{1\varepsilon}\|^2, \quad \alpha > 0).$$

alors on peut poser

$$(5.18) \quad \rho = \rho_{n, \varepsilon} = \frac{(J'_\varepsilon u_{1\varepsilon}^n, u_{1\varepsilon}^n)}{\|J'_\varepsilon u_{1\varepsilon}^n\|^2},$$

dans les itérations:

$$(5.19) \quad u_{1\varepsilon}^{n+1} = u_{1\varepsilon}^n - \rho J'_\varepsilon u_{1\varepsilon}^n,$$

et de même, on peut poser

$$(5.20) \quad \rho = \rho_{n, \varepsilon_1} = \frac{(J'_\varepsilon u_{1\varepsilon_1}^n, u_{1\varepsilon_1}^n)}{\|J'_\varepsilon u_{1\varepsilon_1}^n\|^2},$$

dans les itérations

$$(5.21) \quad u_{1\epsilon}^{n+1} = P_{X_1}(u_{1\epsilon}^n - \rho J'_{\epsilon_1} u_{1\epsilon}^n).$$

3) Nous avons vu que la suite $(u_{1\epsilon}^n)$, définie par les itérations

$$(5.22) \quad u_{1\epsilon}^{n+1} = u_{1\epsilon}^n - \rho S^{-1} J'_{\epsilon} u_{1\epsilon}^n,$$

convergeait fortement dans $W = V \times \mathcal{O}\mathcal{L}$ vers $u_{1\epsilon}$, solution de l'équation:

$$(5.23) \quad J'_{\epsilon} u_{1\epsilon} = 0 \quad (\epsilon \text{ fixé}), \quad \text{où } J'_{\epsilon} = J' + \frac{1}{\epsilon_1} g'_1 + \frac{1}{\epsilon_2} g'_2,$$

en posant

$$(5.24) \quad \rho = \rho_{\epsilon} = k/C_{\epsilon}^2(N), \quad \text{où } C_{\epsilon}(N) = C(N) + \frac{1}{\epsilon_1} \alpha_1(N) + \frac{1}{\epsilon_2} \alpha_2(N),$$

et N est une majoration a priori de $[u_{1\epsilon}]$:

$$(5.25) \quad [u_{1\epsilon}] \leq N.$$

On peut maintenant estimer à chaque itération la constante $[u_{1\epsilon}]$, ce qui conduit à un nouveau choix du paramètre ρ pour les itérations (5.22). On a

$$(5.26) \quad \rho = \rho_{\epsilon, n} = k/C_{\epsilon}^2(N_n),$$

avec

$$(5.27) \quad N_n = \frac{1}{k\sqrt{\sigma}} \|J'_{\epsilon} u_{1\epsilon}^n\| + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \|u_{1\epsilon}^n\|.$$

En effet, nous avons successivement:

$$\begin{aligned} [u_{1\epsilon}] &= [u_{1\epsilon} - u_{1\epsilon}^n + u_{1\epsilon}^n] \leq [u_{1\epsilon} - u] + [u_{1\epsilon}^n], \\ k[u_{1\epsilon} - u_{1\epsilon}^n]^2 &\leq (J'_{\epsilon} u_{1\epsilon}^n - J'_{\epsilon} u_{1\epsilon}, u_{1\epsilon}^n - u_{1\epsilon}) \leq \|J'_{\epsilon} u_{1\epsilon}^n\| \|u_{1\epsilon}^n - u_{1\epsilon}\|. \end{aligned}$$

Comme $[u_{1\epsilon}]^2 \geq \sigma \|u_{1\epsilon}\|^2$, on a alors

$$[u_{1\epsilon}] \leq \frac{1}{k\sqrt{\sigma}} \|J'_\epsilon u_{1\epsilon}^n\| + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \|u_{1\epsilon}^n\| = N_n.$$

D'où (5.27). Nous voyons que

$$(5.28) \quad N = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \|u_{1\epsilon}\| = [u_{1\epsilon}]$$

est la meilleure estimation possible.

Dans les applications, on atteint cette limite assez rapidement (cf. M. Sibony [7.b]). On trouvera aussi d'autres choix du paramètre $\rho = \rho_n$ dans [7.b].

4) Dans le théorème 5.3, si on suppose:

$$(\alpha) \quad (J'_\epsilon u_1 - J'_\epsilon v_1, u_1 - v_1) \geq k_1 [u_1 - v_1]^2, \quad k_1 > 0;$$

$$(\beta) \quad \forall N > 0, \text{ il existe } C_1(N) > 0 \text{ tel que, si } [u_1] \leq N, [v_1] \leq N,$$

on a

$$(J'_\epsilon u_1 - J'_\epsilon v_1, w_1) \leq C_1(N) [u_1 - v_1] [w_1], \quad \forall w_1;$$

alors on peut poser encore $\rho = k_1 / C_1^2(N)$ dans les itérations (5.13). On en déduit aussi un autre paramètre ρ_n variable avec les itérations. Les hypothèses des théorèmes 5.2 et 5.3, faites sur J'_ϵ , g' , g'_1 et g'_2 , entraînent (α) et (β) .

6. Une méthode d'approximation.

Dans le paragraphe précédent, nous avons laissé dans l'ombre le cas où les espaces V et \mathcal{Q} ne sont pas des Hilberts. Nous allons donner une autre méthode d'approximation conduisant à un théorème analogue au théorème 5.1, pour le cas où V et \mathcal{Q} sont des espaces de Banach. Plus précisément, on procède de la manière suivante:

On se donne un paramètre $h > 0$, destiné à tendre vers 0. A l'espace $W = V \times \mathcal{Q}$, on associe un espace W_h de dimension finie, muni de la norme $\| \cdot \|_h$ et d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_h$. On se donne alors un prolon-

gemento $p_h \in \mathcal{L}(W_h, W)$ injectif, et on pose

$$\|u_{1h}\|_h = \|p_h u_{1h}\|, \quad \forall u_{1h} \in W_h.$$

On note par $\hat{\pi}_h$ la transposée de p_h . Posons

$$(6.1) \quad X_h = p_h^{-1}(X).$$

Au problème

$$(6.2) \quad J(u_1) \leq J(v_1), \quad \forall v_1 \in X,$$

on associe le problème équivalent:

$$(6.3) \quad (J'(u^1), v_1 - u_1) \geq 0, \quad \forall v_1 \in X.$$

Posons alors

$$(6.4) \quad A_h = \hat{\pi}_h J' p_h.$$

On suppose maintenant que J' vérifie:

$$(i) (J'u_1 - J'v_1, u_1 - v_1) \geq k \|u_1 - v_1\|^2, \quad k > 0;$$

(ii) $\forall N$ constante positive, il existe $C(N) > 0$ telle que si $\|u_1\| \leq N, \|v_1\| \leq N$, alors

$$(J'u_1 - J'v_1, w_1) \leq C(N) \|u_1 - v_1\| \|w_1\|, \quad \forall w_1.$$

Nous avons alors le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 6.1.

1) Il existe $u_1 \in X$ unique solution du problème

$$(6.5) \quad (J'(u_1), v_1 - u_1) \geq 0, \quad \forall v_1 \in X,$$

$$(6.6) \quad X = \{v_1 = (y, v) \in Y \times \mathcal{O}\mathcal{L}_{ad}; \quad Ay = f + Bv\}.$$

2) Il existe $u_{1h} \in X_h$ unique solution de

$$(6.7) \quad (A_h u_{1h}, v_{1h} - u_{1h})_h \geq 0, \quad \forall v_{1h} \in X_h.$$

3) La suite (u_{1h}^n) , définie par les itérations

$$(6.8) \quad u_{1h}^{n+1} = P_{X_h}(u_{1h}^n - \rho A_h u_{1h}^n),$$

converge vers u_{1h} , solution de (6.7), quand $n \rightarrow \infty$, pour u_{1h}^0 quelconque et $\rho = k/C^2(N)$, où k et $C(N)$ sont les constantes données par (i) et (ii).

4) Si J' est un opérateur borné (qui transforme les bornés de W en des bornés de W'), et si, $\forall v_1 \in X$, il existe $v_{1h} \in X_h$ tel que $p_h v_{1h} \rightarrow v_1$ dans X fort, alors on a

$$p_h u_{1h} \rightarrow u_1 \text{ dans } W \text{ fort quand } h \rightarrow 0,$$

où u_{1h} et u_1 sont les solutions de (6.7) et (6.5) respectivement.

DÉMONSTRATION. Les assertions 1° et 2° se déduisent du théorème 1.1 de [7.a]. En effet, l'opérateur A_h vérifie les hypothèses (i) et (ii), car

$$\begin{aligned} (A_h u_{1h} - A_h v_{1h}, u_{1h} - v_{1h})_h &= (J' p_h u_{1h} - J' p_h v_{1h}, p_h u_{1h} - p_h v_{1h}) \\ &\geq k \| p_h u_{1h} - p_h v_{1h} \|^2 = k \| u_{1h} - v_{1h} \|_h^2. \end{aligned}$$

D'où (i). On montre de la même manière l'hypothèse (ii).

3) On applique le théorème 5.1 pour $A_h : W_h \rightarrow W'_h$, et avec $S_h = Id$; ce qui donne la convergence de u_{1h}^n vers u_{1h} quand $n \rightarrow \infty$.

4) Montrons maintenant que $p_h u_{1h} \rightarrow u_1$ dans W fort quand $h \rightarrow 0$.

D'après l'hypothèse (i), on a

$$(6.9) \quad (A_h u_h, u_h)_h = (J' p_h u_h, p_h u_h) \geq k \| p_h u_h \|^2.$$

On en déduit que $\| p_h u_{1h} \|$ est borné. Donc, suivant un ultrafiltre \mathcal{Q} , on a $p_h u_{1h} \rightarrow \xi$ dans W faible. Comme J' est borné, alors $J' p_h u_{1h} \rightarrow \zeta$ dans W' faible. Puisque $\xi \in X$, alors il existe $\xi_h \in X_h$, tel que $p_h \xi_h \rightarrow \xi$ dans W fort. Nous avons alors

$$(6.10) \quad (J' p_h u_{1h}, p_h u_{1h}) \leq (J' p_h u_{1h}, p_h v_{1h}).$$

Posons $v_{1h} = \xi_h \in X_h$ dans (6.10); ce qui donne:

$$(6.11) \quad \limsup_{\mathfrak{A}} (J' p_h u_{1h}, p_h u_{1h}) \leq (\zeta, \xi);$$

on en déduit (cf. [4] et [7.a]) que $J'\xi = \zeta$. Soit $v_1 \in X$. On sait alors qu'il existe $v_{1h} \in X_h$ tel que $p_h v_{1h} \rightarrow v_1$ dans W fort. En passant à la limite dans

$$(6.12) \quad (A_h u_{1h}, v_{1h} - u_{1h})_h \geq 0,$$

on a

$$(6.13) \quad (J'\xi, v_1 - \xi) \geq 0.$$

D'après l'unicité de la solution de (6.5), on a $\xi = u_1$. Donc $p_h u_{1h} \rightarrow u_1$ dans W faible, u_1 étant la solution de

$$(6.14) \quad (J'u_1, v_1 - u_1) \geq 0, \quad \forall v_1 \in X.$$

Montrons que la convergence est forte. Nous avons

$$(J' p_h u_{1h} - J'u_1, p_h u_{1h} - u_1) \geq k \| p_h u_{1h} - u_1 \|^2.$$

Posons

$$\alpha_h = (J' p_h u_{1h} - J'u_1, p_h u_{1h} - u_1).$$

Nous avons

$$\limsup_{\mathfrak{A}} \alpha_h \leq 0.$$

Donc $p_h u_{1h} \rightarrow u_1$ fortement suivant \mathfrak{A} et suivant tout ultrafiltre plus fin. D'où le théorème.

REMARQUE 6.1. Un théorème analogue au théorème 6.1 est donné dans [7.a], dans le cadre des inéquations variationnelles non linéaires.

Nous allons maintenant rendre les itérations (6.8) opérationnelles en introduisant la pénalisation du convexe X_h . Nous avons alors le théorème suivant.

THÉORÈME 6.2. *On suppose (i) et (ii) du théorème 6.1. Alors:*

1) *Il existe $u_1 \in X$ unique solution du problème*

$$(6.15) \quad (J'(u_1), v_1 - u_1) \geq 0, \quad \forall v_1 \in X,$$

avec

$$(6.16) \quad X = \{v_1 \mid g_1(v_1) = 0; g_2(v_1) = 0\},$$

où $g_1(v_1) = \|Ay - f - Bv\|_V^2$, $g_2 \geq 0$ convexe s. c. i. et dérivable au sens de Gateaux.

2) *Posons $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$; alors il existe $u_{1\varepsilon} \in Y \times \mathcal{O}$ unique solution de*

$$(6.17) \quad \left(J'u_{1\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_1} g'_1(u_{1\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon_2} g'_2(u_{1\varepsilon}), v_1 - u_{1\varepsilon} \right) \geq 0, \quad \forall v_1 \in Y \times \mathcal{O},$$

ou de

$$(6.18) \quad J'(u_{1\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon_1} g'_1(u_{1\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon_2} g'_2(u_{1\varepsilon}) = 0.$$

De plus, on a

$$(6.19) \quad u_{1\varepsilon} \rightarrow u_1 \text{ dans } W = Y + \mathcal{O} \text{ fort quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

u_1 étant la solution de (6.15), (6.16).

3) *On se donne un paramètre $h > 0$ destiné à tendre vers 0. Posons*

$$(6.20) \quad A_h = \pi_h \left(J' + \frac{1}{\varepsilon_1} g'_1 + \frac{1}{\varepsilon_2} g'_2 \right) p_h.$$

Alors, $\forall \varepsilon > 0$ fixé, il existe $u_{1\varepsilon h} \in W_h$ unique solution de

$$(6.21) \quad A_h u_{1\varepsilon h} = 0.$$

De plus, $p_h u_{1\varepsilon h} \rightarrow u_{1\varepsilon}$ dans W fort quand $h \rightarrow 0$, où $u_{1\varepsilon}$ est la solution de (6.18).

4) On suppose que g'_1 et g'_2 vérifient (5.11) et (5.12); alors, pour tous $\varepsilon > 0$, $h > 0$, fixés, la suite $(u_{1\varepsilon_h}^n)$, définie par l'itération

$$(6.22) \quad u_{1\varepsilon_h}^{n+1} = u_{1\varepsilon_h}^n - \rho A_h u_{1\varepsilon_h}^n,$$

converge vers $u_{1\varepsilon_h}$, solution de (6.20), quand $n \rightarrow \infty$ pour $u_{1\varepsilon_h}^0$ quelconque et

$$(6.23) \quad \rho = k / (C(N) + \alpha_1(N) + \alpha_2(N))^2,$$

où k et $C(N)$ sont donnés par les hypothèses (i), (ii), et α_1 , α_2 sont donnés par (5.11) et (5.12).

REMARQUE 6.2. En résumé, dans les conditions les plus générales, nous avons la suite de convergences fortes suivantes:

$$u_{1\varepsilon_h}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u_{1\varepsilon_h} \text{ et } p_h u_{1\varepsilon_h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} u_{1\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_1.$$

REMARQUE 6.3. Dans la pratique, on aura souvent intérêt à prendre, dans (6.23), $\rho = \rho_n$ variable avec les itérations (cf. les formules (5.14), (5.18), (5.26)).

7. Application: Etude d'un problème de contrôle régi par une équation aux dérivées partielles.

Soit Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ assez régulière. On note par $H^1(\Omega)$ l'espace des (classe de) fonctions $x \in L^2(\Omega)$ telles que $D_i x = \frac{dx}{dt_i} \in L^2(\Omega)$ (t étant la variable d'espace $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R^n$), les dérivées étant prises au sens des distributions. On note par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

On cherche maintenant le couple $u_1 = (x, u) \in X$, solution du problème

$$(7.1) \quad J(u_1) \leq J(v_1), \quad \forall v_1 \in X,$$

où $v_1 = (y, v)$; où

$$(7.2) \quad J(v_1) = J(y, v) = \| \Delta y \|_{L_2}^2 + \sum_{i=1}^n \| D_i y \|_{L_2}^2 + \| y \|_{L_2}^2 + \| v \|_{L_2}^2,$$

et

$$(7.3) \quad X = \{ v_1 \mid v_1 = (y, v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega); \quad \Delta y + f + v = 0; \\ \Delta y \in L^2(\Omega), v \geq 0 \text{ p. p. dans } \Omega \}.$$

Pour résoudre le problème (7.1), (7.2), (7.3), nous allons appliquer la méthode de pénalisations partielles des contraintes.

Posons

$$(7.4) \quad Y = \{ y \mid y \in H_0^1(\Omega), \Delta y \in L^2(\Omega) \};$$

on munit Y de la norme

$$(7.5) \quad \| y \|_Y = (\| y \|_{L_2}^2 + \sum_{i=1}^n \| D_i y \|_{L_2}^2 + \| \Delta y \|_{L_2}^2)^{1/2}.$$

Posons

$$(7.6) \quad \| v_1 \|_1 = (\| y \|_{L_2}^2 + \| v \|_{L_2}^2)^{1/2}.$$

Soit $\epsilon > 0$ un paramètre destiné à tendre vers zéro. On cherche

$$(7.7) \quad u_{1\epsilon} \in X_1 = \{ v_1 \mid v_1 = (y, v) \in Y \times \mathcal{L}_{ad}; \Delta y + f + v = 0 \},$$

avec

$$\mathcal{L}_{ad} = \{ v \mid v \in L_2(\Omega), v \geq 0 \text{ p. p. sur } \Omega \},$$

solution du problème

$$(7.8) \quad J_\epsilon(u_{1\epsilon}) \leq J_\epsilon(v_1), \quad \forall v_1 \in X_1,$$

avec

$$(7.9) \quad J_\epsilon(v_1) = J(v_1) + \frac{1}{\epsilon} \| \Delta y + f + v \|_{L_2}^2.$$

Nous avons le théorème ci-après.

THÉORÈME 7.1.

1) Il existe $u_1 \in X_1$, unique solution de (7.1), (7.2). De plus, toute solution de (7.1), (7.2) est solution de

$$(7.10) \quad (J'u_1, v_1 - u_1) \geq 0, \quad \forall v_1 \in X,$$

$$(7.11) \quad J'(u_1) \cdot v_1 = J'(x, u) \cdot (y, v) = \\ = (x, y) + (\Delta x, \Delta y) + \sum_{i=1}^n (D_i x, D_i y) + (u, v),$$

et réciproquement.

2) Il existe $u_{1\epsilon} \in X_1$, unique solution de (7.7), (7.8), (7.9). De plus, toute solution de (7.7), (7.8), (7.9), est solution de

$$(7.12) \quad (J'_\epsilon u_{1\epsilon}, v_1 - u_{1\epsilon}) \geq 0, \quad \forall v_1 \in X_1; \quad u_{1\epsilon} = (x_\epsilon, u_\epsilon),$$

$$(7.13) \quad J'_\epsilon(u_{1\epsilon}) \cdot v_1 = (x_\epsilon, y) + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) (\Delta x_\epsilon, \Delta y) + \sum_{i=1}^n (D_i x_\epsilon, D_i y) + \\ + \frac{1}{\epsilon} (f + u_\epsilon, \Delta y) + (u_\epsilon, v) + \frac{1}{\epsilon} (\Delta x_\epsilon + u_\epsilon + f, v),$$

et réciproquement.

3) On a $u_{1\epsilon} \rightarrow u_1$ dans $W = Y \times L_2$ fort quand $\epsilon \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION.

1) L'ensemble X_1 , donné par (7.7), peut s'écrire:

$$(7.14) \quad X_1 = X'_1 \cap X''_1,$$

avec

$$(7.15) \quad X'_1 = \{v_1 \mid v_1 = (y, v) \in Y \times \mathcal{M}_{ad}\},$$

$$(7.16) \quad X''_1 = \{v_1 \mid v_1 = (y, v) \in Y \times L_2(\Omega); \Delta y + f + v = 0\}.$$

X_1 est donc un convexe fermé non vide de $Y \times L_2(\Omega)$. On applique alors le théorème 1.1 à la fonctionnelle $J(v_1) = J(y, v)$ définie sur X_1 .

2) On applique le théorème 1.1 à la fonctionnelle $J_\epsilon(v_1)$ définie sur X_I .

3) Cette assertion découle du corollaire 2.1.

REMARQUE 7.1. Le convexe X_1 peut être vide, si on suppose de plus condition aux limités $\frac{\partial y}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0$ (condition de Neumann sur la frontière Γ de Ω). C'est exact, si $f \geq 0$, et $\int f dt > 0$, car $\int (\Delta y + f + v) dt = 0$ implique $\int \Delta y dt < 0$. Or $\int \Delta y dt = 0$, d'après la formule de Green, donc X_1 est un convexe vide. Par contre, $X_1 \neq \emptyset$ si $f \leq 0$. Il suffira alors de prendre $y=0$ et $v=-f$ pour vérifier l'équation $\Delta y + f + v = 0$.

Nous allons maintenant approcher la solution $u_{1\epsilon} \in X_1$ du problème (7.12) à l'aide d'une suite $(u_{1\epsilon}^n) = (x_\epsilon^n, u_\epsilon^n)$.

Nous avons le théorème suivant

THÉORÈME 7.2. La suite $(u_{1\epsilon}^n) \in X_1$, définie par les itérations:

$$(7.17) \quad u_{1\epsilon}^n = P_{X_1}(u_{1\epsilon}^{n-1} - \rho J'_\epsilon u_{1\epsilon}^{n-1}),$$

converge fortement dans $W = Y \times L^2(\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$ vers $u_{1\epsilon}$, solution du problème (7.12), pour $u_{1\epsilon}^0$ quelconque et

$$(7.18) \quad \rho = 1/2 \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right).$$

DÉMONSTRATION. Il suffira de montrer, pour $f=0$, les relations suivantes:

$$(7.19) \quad (J'_\epsilon u_{1\epsilon}, u_{1\epsilon}) \geq \alpha \|u_{1\epsilon}\|_W^2, \quad \alpha > 0,$$

$$(7.20) \quad (J'_\epsilon u_{1\epsilon}, v_{1\epsilon}) \leq C \|u_{1\epsilon}\|_W \|v_{1\epsilon}\|_W, \quad C > 0.$$

On prendra alors $\rho = \alpha/C^2$.

Nous avons successivement:

$$\begin{aligned} (J'_\epsilon u_{1\epsilon}, u_{1\epsilon}) = & \|x_\epsilon\|_{L^2}^2 + \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right) \|\Delta x_\epsilon\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \|D_i x_\epsilon\|_{L^2}^2 + \\ & + \|u_\epsilon\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\epsilon} (u_\epsilon, \Delta x_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} (\Delta x_\epsilon + u_\epsilon, u_\epsilon), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(J'u_{1\epsilon}, u_{1\epsilon}) \geq |x_\epsilon|_{L_2}^2 + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) |\Delta x_\epsilon|_{L_2}^2 + \sum_{i=1}^n |D_i x_\epsilon|_{L_2}^2 + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) |u_\epsilon|_{L_2}^2 - \frac{1}{\epsilon} |u_\epsilon|_{L_2}^2 - \frac{1}{\epsilon} |\Delta x_\epsilon|_{L_2}^2.$$

Donc

$$(J'u_{1\epsilon}, u_{1\epsilon}) \geq |x_\epsilon|_{L_2}^2 + |\Delta x_\epsilon|_{L_2}^2 + \sum_{i=1}^n |D_i x_\epsilon|_{L_2}^2 + |u_\epsilon|_{L_2}^2.$$

D'où

$$(7.21) \quad (J'u_{1\epsilon}, u_{1\epsilon}) \geq \|u_{1\epsilon}\|_W^2.$$

Par ailleurs,

$$(J'_\epsilon u_{1\epsilon}, v_{1\epsilon}) \leq |x_\epsilon| |y_\epsilon| + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) |\Delta x_\epsilon| |\Delta y_\epsilon| + \sum_{i=1}^n |D_i x_\epsilon| |D_i y_\epsilon| + \frac{1}{\epsilon} |u_\epsilon| |\Delta y_\epsilon| + |u_\epsilon| |v_\epsilon| + \frac{1}{\epsilon} |\Delta x_\epsilon + u_\epsilon| |v_\epsilon|.$$

D'où

$$(7.22) \quad (J'_\epsilon u_{1\epsilon}, v_{1\epsilon}) \leq 2 \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \|u_{1\epsilon}\|_W \|v_{1\epsilon}\|_W,$$

ce qui donne

$$(7.23) \quad \rho = 1/2 \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right).$$

D'où le théorème.

REMARQUE 7.2. Dans les itérations (7.17), on montre facilement (cf. [7.b]) qu'on a

$$(7.24) \quad \|u_{1\epsilon}^{n+1} - u_{1\epsilon}^n\|_W^2 \leq \theta \|u_{1\epsilon}^n - u_{1\epsilon}^{n-1}\|_W^2,$$

$$\text{avec } \theta = 1 - \frac{1}{4 \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)^2} < 1.$$

La convergence est donc très mauvaise quand ε est très petit, car θ est alors très voisin de l'unité. Pour d'autres choix du paramètre ρ , voir [7.b] et le paragraphe qui suit la remarque 5.3, où dans le cas de mauvaise convergence avec ρ fixé, on fait $\rho = \rho_n$ variable avec les itérations n .

Nous allons maintenant découpler le problème (7.12) en une équation et une inéquation dont la résolution est nettement plus simple que celle du problème (7.12). Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

THÉOREME 7.3. *Le couple $u_{1\varepsilon} = (x_\varepsilon, u_\varepsilon) \in X_1$, solution de (7.12), vérifie*

$$(7.25) \quad Au_{1\varepsilon} = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \Delta x_\varepsilon + \Delta^{-1}x_\varepsilon - x_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(f + u) = 0,$$

$$(7.26) \quad (Bu_{1\varepsilon}, v - u_\varepsilon) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{M}_{ad},$$

avec

$$(7.27) \quad Bu_{1\varepsilon} = B(x_\varepsilon, u_\varepsilon) = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(\Delta x_\varepsilon + f),$$

et réciproquement.

DÉMONSTRATION. L'inégalité (7.12) s'écrit:

$$(7.28) \quad (x_\varepsilon, y - x_\varepsilon) + \sum_{i=1}^n (D_i x_\varepsilon, D_i(y - x_\varepsilon)) + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) (\Delta x_\varepsilon, \Delta(y - x_\varepsilon)) + \\ + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) (u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} (\Delta x_\varepsilon + f, v - u_\varepsilon) + \\ + \frac{1}{\varepsilon} (f + u_\varepsilon, \Delta(y - x_\varepsilon)) \geq 0, \quad \forall (y, v) \in X_1.$$

Faisons $v = u_\varepsilon$, dans (7.28), on a alors

$$(7.29) \quad (x_\varepsilon - \Delta x_\varepsilon, y - x_\varepsilon) + \left(\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \Delta x_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (f + u_\varepsilon), \Delta(y - x_\varepsilon) \right) \geq 0, \\ \forall y \in Y(\Omega),$$

et réciproquement. Comme $-\Delta$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$, alors (7.29) s'écrit

$$(7.30) \quad \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \Delta x_\varepsilon + \Delta^{-1} x_\varepsilon - x_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (f + u) = 0,$$

et réciproquement. D'où (7.25).

Posons maintenant $y = x_\varepsilon$ dans (7.28), on a alors

$$(7.31) \quad \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) (u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} (\Delta x_\varepsilon + f, v - u_\varepsilon) \geq 0, \quad \forall v \in X_1,$$

et réciproquement. Ceci donne (7.26).

De même nous avons le théorème ci-après.

THÉORÈME 7.4. *La suite $u_{1\varepsilon}^n = (x_\varepsilon^n, u_\varepsilon^n)$, définie par les itérations*

$$(7.32) \quad x_\varepsilon^{n+1} = x_\varepsilon^n - \rho \left\{ \Delta^{-1} x_\varepsilon^n + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \Delta x_\varepsilon^n - x_\varepsilon^n + \frac{1}{\varepsilon} (f + u_\varepsilon^n) \right\},$$

avec x_ε^0 quelconque,

$$(7.33) \quad u_\varepsilon^{n+1} = P_{\mathcal{Q}_{ad}} \left\{ u_\varepsilon^n - \rho \left[\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon^n + \frac{1}{\varepsilon} (\Delta x_\varepsilon^n + f) \right] \right\}, \text{ avec } u_\varepsilon^0 = 0,$$

converge vers $u_{1\varepsilon} = (x_\varepsilon, u_\varepsilon)$, solution de (7.12), quand $n \rightarrow \infty$.

DÉMONSTRATION. On montre facilement que l'équation

$$(7.34) \quad w_1 = P_{X_1}(g_1)$$

équivalent à

$$(7.35) \quad (w_1, v_1 - w_1) \geq (g_1, v_1 - w_1), \quad \forall v_1 \in X_1.$$

Donc (7.17) équivalent à

$$(7.36) \quad (u_1^{n+1}, v_1 - u_1^{n+1}) \geq (u_1^n - \rho J'_\varepsilon u_1^n, v_1 - u_1^n), \quad \forall v_1 \in X_1,$$

et (7.36) se découple alors en (7.32) et (7.33). Comme dans le théorème 7.2, $u_{1\epsilon}^n = (x_\epsilon^n, u_\epsilon^n)$, solution de (7.17), converge vers $u_{1\epsilon} = (x_\epsilon, u_\epsilon)$, solution de (7.12). Alors le couple $(x_\epsilon^n, u_\epsilon^n)$, solution de (7.32), (7.33), converge vers $u_{1\epsilon} = (x_\epsilon, u_\epsilon)$, solution de (7.25), (7.26), ou de (7.12).

Etude numérique du problème en dimension $n=2$. Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}_+^2$ un paramètre destiné à tendre vers 0 ($h_1 = h_2 = h$). Nous allons maintenant discrétiser le problème (7.25), (7.26), à la manière du paragraphe 6. On pose

$$u_{\epsilon_h}(t) = u_{\epsilon_h}(t_1, t_2) = u(i, j), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

$$x_{\epsilon_h}(t) = x_{\epsilon_h}(t_1, t_2) = x(i, j),$$

$$\Delta_h x(i, j) = \frac{1}{h^2} \{x(i-1, j) + x(i, j-1) + x(i+1, j) + x(i, j+1) - 4x(i, j)\}.$$

1) Les problèmes (7.25), (7.26), s'écrivent alors en dimension finie:

$$(7.37) \quad A_h u_{1\epsilon_h} = A_h u_1(i, j) = \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \Delta_h x(i, j) + \Delta_h^{-1} x(i, j) - x(i, j) + \frac{1}{\epsilon} (f(i, j) + u(i, j)) = 0,$$

$$(7.38) \quad (B_h u(i, j), v(i, j) - u(i, j))_h \geq 0, \quad \forall v(i, j) \in \mathcal{Q}_{ad}^h = p_h^{-1}(\mathcal{Q}_{ad}),$$

avec

$$(7.39) \quad B_h u_{1\epsilon_h} = B_h u_1(i, j) = \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) u(i, j) + \frac{1}{\epsilon} (\Delta_h x(i, j) + f(i, j)).$$

On sait, d'après le paragraphe 6, que

$$p_h u_{1\epsilon_h} \rightarrow u_{1\epsilon} \text{ dans } W \text{ fort quand } h \rightarrow 0,$$

où p_h est le prolongement de W_h dans W .

Il reste maintenant à résoudre (7.37), (7.38), à l'aide des itérations

suivantes:

$$(7.40) \quad x^{n+1}(i, j) = x^n(i, j) - \rho(A_h u_1^n(i, j)),$$

$$(7.41) \quad u^{n+1}(i, j) = P_{\mathcal{O}l_{ad}} \{u^n(i, j) - \rho B_h u^n(i, j)\},$$

et l'on sait que $(x^n(i, j), u^n(i, j)) \rightarrow (x_{\varepsilon_h}, u_{\varepsilon_h})$ quand $n \rightarrow \infty$ dans W_h , où $(x_{\varepsilon_h}, u_{\varepsilon_h})$ désigne la solution de (7.37), (7.38).

Nous avons donc en résumé les convergences suivantes:

$$u_{1\varepsilon_h}^n = (x_{\varepsilon_h}^n, u_{\varepsilon_h}^n) \rightarrow u_{1\varepsilon_h} = (x_{\varepsilon_h}, u_{\varepsilon_h}) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

$$p_h u_{1\varepsilon_h} = (p_h^1 x_{\varepsilon_h}, p_h^2 u_{\varepsilon_h}) \rightarrow u_{1\varepsilon} = (x_\varepsilon, u_\varepsilon) \quad \text{quand } h \rightarrow 0,$$

$$u_{1\varepsilon} = (x_\varepsilon, u_\varepsilon) \rightarrow u_1 = (x, u) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Toutes les convergences sont dans la topologie forte.

Il reste maintenant à effectuer les itérations (7.40), (7.41), pour h, ε suffisamment petits.

2) A chaque itération n , nous devons calculer, dans (7.40), le terme

$$(7.42) \quad \Delta_h^{-1} x^n(i, j) = z^n(i, j),$$

par la méthode de Gauss-Seidel suivante (cf. [8]):

$$z^{p+1}(i, j) = \frac{1}{4} \{z^p(i+1, j) + z^p(i, j+1) + z^{p+1}(i-1, j) + z^{p+1}(i, j-1) - h^2 x^n(i, j)\}.$$

On sait que

$$(7.43) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} z^p(i, j) = \Delta_h^{-1} x^n(i, j) = z^n(i, j).$$

3) Accélération de la convergence: On peut encore écrire les itérations (7.40), (7.41), sous la forme suivante:

$$(7.44) \quad x^{n+1}(i, j) = G_1(x^n(i, j), u^n(i, j)),$$

avec

$$G_1(x^n, u^n) = x^n - \rho_1(A_n u_1^n),$$

ρ_1 étant une surestimation de ρ ,

$$(7.45) \quad u^{n+1}(i, j) = G_2(x^n(i, j), u^n(i, j)),$$

avec

$$G_2(x^n, u^n) = P_{\mathcal{D}_{ad}}\{u^n - \rho_2 B u_1^n\},$$

où ρ_2 est une autre surestimation de ρ .

Nous pouvons alors accélérer les convergences des deux méthodes itératives (7.44), (7.45), à l'aide des formules itératives suivantes (cf. [1]):

$$(7.46) \quad x^{n+1} = x^n - \alpha_n(G_1(x^n, u^n) - G_1(x^{n-1}, u^{n-1})),$$

en posant

$$\alpha_n = \frac{(\tau_n, \tau_n - \tau_{n-1})}{\|\tau_n - \tau_{n-1}\|^2} \quad \text{et} \quad \tau_n = G_1(x^n, u^n) - x^n,$$

et

$$(x, y) = \sum_{i, j} x(i, j)y(i, j),$$

$$(7.47) \quad u^{n+1} = u^n - \beta_n(G_2(x^n, u^n) - G_2(x^{n-1}, u^{n-1})),$$

où

$$\beta_n = \frac{(s_n, s_n - s_{n-1})}{\|s_n - s_{n-1}\|^2} \quad \text{et} \quad s_n = G_2(x^n, u^n) - u^n.$$

Résultats numériques ⁽¹⁾.

EXEMPLE 7.1. Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. On cherche $u_1 \in X$, solution de

¹⁾ Je remercie G. Cowinsky pour avoir effectué la programmation des exemples cidessous.

$$(7.48) \quad J(u_1) \leq J(v_1), \quad \forall v_1 \in X,$$

avec

$$(7.49) \quad J(v_1) = J(y, v) = \|\Delta y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \|D_i y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ + \|y\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$(7.50) \quad X = \{v_1 \mid v_1 = (y, v) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega); \\ \Delta y \in L_2(\Omega); v \geq 0 \text{ p. p. sur } \Omega; \Delta y + f + v = 0; f = -1000xy\}.$$

On « pénalise » uniquement les contraintes $\Delta y + f + v = 0$, et on applique les méthodes précédentes avec $h_1 = h_2 = h = 1/10$, $\varepsilon = 1/50$, puis $\varepsilon = 1/500$. Nous obtenons alors les résultats suivants.

Pour $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1/50$: Dans les itérations (7.46), (7.47), les résultats se stabilisent complètement pour $n = 200$ itérations.

Les tableaux 8.1 et 8.2 donnent les valeurs de x et u aux points (i, j) du réseau associé à Ω et correspondant aux pas de discrétisation $h_1 = h_2 = h = 1/10$.

Pour $\varepsilon = \varepsilon_2 = 1/500$: Les résultats des itérations (7.46), (7.47), se stabilisent au bout de $n = 50$ itérations seulement.

Les tableaux 8.3 et 8.4 donnent les valeurs de x et u aux mêmes points (i, j) .

Les deux solutions

$$u_{1\varepsilon_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{1\varepsilon_1}^n,$$

$$u_{1\varepsilon_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{1\varepsilon_2}^n,$$

sont approximativement égales à la solution u_1 du problème (7.48), (7.49), (7.50). Pour $\varepsilon = \varepsilon_2 = 1/500$, la convergence de $(u_{1\varepsilon_2}^n)$ vers u_1 est plus rapide que celle de $(u_{1\varepsilon_1}^n)$ vers la même limite u_1 .

EXEMPLE 7.2. Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. On cherche $u_1 \in X$, solution de

$$(7.51) \quad J(u_1) \leq J(v_1), \quad \forall v_1 \in X,$$

avec

$$(7.52) \quad J(v_1) = \|\Delta y\|_{L_2}^2 + \sum_{i=1}^2 \|D_i y\|_{L_2}^2 + \|y\|_{L_2}^2 + \|v\|_{L_2}^2,$$

$$(7.53) \quad X = \left\{ v_1 = (y, v) \in H_0^1 \times L_2, \Delta y \in L_2; \right. \\ \left. v \geq 0 \text{ p. p. sur } \Omega; \Delta y + f + v = 0; \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0; f = -1000xy \right\}.$$

On a montré dans la remarque 7.1 que, pour $f \leq 0$, le convexe X , donné par (7.53), est non vide. On pénalise uniquement les contraintes $\Delta y + f + v = 0$, et on applique les méthodes précédentes avec $h_1 = h_2 = h = 1/10$, $\varepsilon = 1/50$, puis $\varepsilon = 1/500$. On voit facilement que $u_1 = (x, u) = (0, -f)$ est solution du problème (7.48), (7.49), (7.50). Il s'agit de retrouver cette solution u_1 par les méthodes précédentes (discrétisation + pénalisation + itérations).

Les tableaux 8.5 et 8.6 donnent les valeurs de $x(i, j)$ et $u(i, j)$ obtenues à l'aide des itérations (7.46), (7.47), pour $h_1 = h_2 = h = 1/10$ et $\varepsilon = 1/500$ (résultats sensiblement meilleurs que pour $\varepsilon = 1/50$). Ces résultats ont été obtenus au bout de $n = 2$ itérations, et on a

$$\|u_1^{n+1} - u_1^n\| \leq 0,105 \cdot 10^{-6},$$

où

$$\|u_1\| = \sum_{i,j} (|x(i, j)| + |u(i, j)|).$$

EXEMPLE 7.3. On reprend le problème précédent avec

$$(7.54) \quad f = 1000 \sin 2\pi t_1 \cos 2\pi t_2, \quad \varepsilon = 1/500, \quad h = 1/10.$$

Le tableau 8.7 donne la distribution du contrôle $u^n(i, j)$ ($n = 285$ itérations) dans l'ouvert Ω . On a alors $\|u_1^{n+1} - u_1^n\| \leq 0,42 \cdot 10^{-6}$.

On constate aussi une meilleure convergence quand ε décroît en tendant vers 0, la limite étant approximativement la même pour les diverses valeurs du paramètre ε .

EXEMPLE 7.4. On reprend l'exemple 7.2 avec

$$(7.55) \quad f=1000(t_1^2-t_2^2), \quad \varepsilon=1/10, \quad \varepsilon=150, \quad \varepsilon=1/100.$$

Pour $\varepsilon=1/10$: Nous avons $\|u_1^{n+1}-u_1^n\| < 0,103 \cdot 10^{-6}$ au bout de $n=181$ itérations.

Pour $\varepsilon=1/50$: On a $\|u_1^{n+1}-u_1^n\| < 0,191 \cdot 10^{-6}$ au bout de $n=392$ itérations.

Pour $\varepsilon=1/100$: On a $\|u_1^{n+1}-u_1^n\| \leq 0,25 \cdot 10^{-6}$ au bout de $n=197$ itérations. Le tableau 8.8 donne la distribution du contrôle $u(i, j)$ dans l'ouvert Ω associé au pas $h=1/10$.

8. Résultats numériques.

TABLEAU 8.1 - Vecteur x

0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	- 0.52602.10 ⁰	- 0.10284.10 ¹	- 0.14820.10 ¹	- 0.18584.10 ¹	- 0.21233.10 ¹
0.	- 0.10283.10 ¹	- 0.20113.10 ¹	- 0.29005.10 ¹	- 0.36405.10 ¹	- 0.41639.10 ¹
0.	- 0.14820.10 ¹	- 0.29006.10 ¹	- 0.41873.10 ¹	- 0.52632.10 ¹	- 0.60311.10 ¹
0.	- 0.18584.10 ¹	- 0.36405.10 ¹	- 0.52630.10 ¹	- 0.66285.10 ¹	- 0.76163.10 ¹
0.	- 0.21232.10 ¹	- 0.41638.10 ¹	- 0.60310.10 ¹	- 0.76162.10 ¹	- 0.87829.10 ¹
0.	- 0.22351.10 ¹	- 0.43891.10 ¹	- 0.63719.10 ¹	- 0.80739.10 ¹	- 0.93546.10 ¹
0.	- 0.21435.10 ¹	- 0.42157.10 ¹	- 0.61368.10 ¹	- 0.78088.10 ¹	- 0.91005.10 ¹
0.	- 0.17882.10 ¹	- 0.35233.10 ¹	- 0.51452.10 ¹	- 0.65791.10 ¹	- 0.77221.10 ¹
0.	- 0.10997.10 ¹	- 0.21710.10 ¹	- 0.31817.10 ¹	- 0.40906.10 ¹	- 0.48410.10 ¹
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.22352.10 ¹	- 0.21435.10 ¹	- 0.17882.10 ¹	- 0.10997.10 ¹	0.	0.
- 0.43892.10 ¹	- 0.42157.10 ¹	- 0.35233.10 ¹	- 0.21710.10 ¹	0.	0.
0.63719.10 ¹	- 0.61369.10 ¹	- 0.51454.10 ¹	- 0.31817.10 ¹	0.	0.
- 0.80739.10 ¹	- 0.78085.10 ¹	- 0.65787.10 ¹	- 0.40904.10 ¹	0.	0.
0.93545.10 ¹	- 0.91005.10 ¹	- 0.77220.10 ¹	- 0.48408.10 ¹	0.	0.
- 0.10026.10 ¹	- 0.98323.10 ¹	- 0.84283.10 ¹	- 0.53492.10 ¹	0.	0.
- 0.98326.10 ¹	- 0.97491.10 ¹	- 0.84791.10 ¹	- 0.54829.10 ¹	0.	0.
0.84286.10 ¹	- 0.84792.10 ¹	- 0.75285.10 ¹	- 0.50134.10 ¹	0.	0.
- 0.53493.10 ¹	- 0.54830.10 ¹	- 0.50135.10 ¹	- 0.35046.10 ¹	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.

TABLEAU 8.2 - Vecteur u

0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.51558.10 ¹	0.10384.10 ²	0.15613.10 ²	0.20814.10 ²	0.25900.10 ²
0.	0.10392.10 ²	0.20845.10 ²	0.31266.10 ²	0.41589.10 ²	0.51795.10 ²
0.	0.15613.10 ²	0.31243.10 ²	0.46866.10 ²	0.62201.10 ²	0.77544.10 ²
0.	0.20803.10 ²	0.41562.10 ²	0.62289.10 ²	0.82819.10 ²	0.10307.10 ³
0.	0.25914.10 ²	0.51808.10 ²	0.77550.10 ²	0.10309.10 ³	0.12843.10 ³
0.	0.30931.10 ²	0.61762.10 ²	0.92487.10 ²	0.12311.10 ³	0.15340.10 ³
0.	0.35786.10 ²	0.71573.10 ²	0.10728.10 ³	0.14267.10 ³	0.17803.10 ³
0.	0.40552.10 ²	0.81073.10 ²	0.12156.10 ³	0.16180.10 ³	0.20202.10 ³
0.	0.45147.10 ²	0.90265.10 ²	0.13531.10 ³	0.18034.10 ³	0.22529.10 ³
0.	0.98039.10 ²	0.19608.10 ³	0.29412.10 ³	0.39216.10 ³	0.49020.10 ³
0.	0.	0.	0.	0.	
0.30916.10 ²	0.35803.10 ²	0.40563.10 ²	0.45144.10 ²	0.98039.10 ²	
0.61761.10 ²	0.71564.10 ²	0.81087.10 ²	0.90263.10 ²	0.19608.10 ³	
0.92502.10 ²	0.10724.10 ³	0.12148.10 ³	0.13531.10 ³	0.29412.10 ³	
0.12308.10 ³	0.14273.10 ³	0.16191.10 ³	0.18034.10 ³	0.39216.10 ³	
0.15341.10 ³	0.17798.10 ³	0.20201.10 ³	0.22531.10 ³	0.49020.10 ³	
0.18347.10 ³	0.21315.10 ³	0.24210.10 ³	0.27012.10 ³	0.58823.10 ³	
0.21309.10 ³	0.24775.10 ³	0.28158.10 ³	0.31473.10 ³	0.68627.10 ³	
0.24204.10 ³	0.28159.10 ³	0.32072.10 ³	0.35905.10 ³	0.78431.10 ³	
0.27014.10 ³	0.31470.10 ³	0.35902.10 ³	0.40280.10 ³	0.88235.10 ³	
0.58823.10 ³	0.68627.10 ³	0.78431.10 ³	0.88235.10 ³	0.98039.10 ³	

TABLEAU 8.3 - Vecteur x

0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	- 0.52608.10 ¹	- 0.10284.10 ¹	- 0.14828.10 ¹	- 0.18599.10 ¹	- 0.21256.10 ¹
0.	- 0.10283.10 ¹	- 0.20123.10 ¹	- 0.29033.10 ¹	- 0.36452.10 ¹	- 0.41702.10 ¹
0.	- 0.14828.10 ¹	- 0.29034.10 ¹	- 0.41923.10 ¹	- 0.52714.10 ¹	- 0.60424.10 ¹
0.	- 0.18598.10 ¹	- 0.36451.10 ¹	- 0.52718.10 ¹	- 0.66412.10 ¹	- 0.76321.10 ¹
0.	- 0.21259.10 ¹	- 0.41702.10 ¹	- 0.60420.10 ¹	- 0.76322.10 ¹	- 0.88035.10 ¹
0.	- 0.22387.10 ¹	- 0.43959.10 ¹	- 0.63848.10 ¹	- 0.80943.10 ¹	- 0.93811.10 ¹
0.	- 0.21474.10 ¹	- 0.42255.10 ¹	- 0.61534.10 ¹	- 0.78336.10 ¹	- 0.91337.10 ¹
0.	- 0.17932.10 ¹	- 0.35352.10 ¹	- 0.51644.10 ¹	- 0.66075.10 ¹	- 0.77595.10 ¹
0.	- 0.11044.10 ¹	- 0.21809.10 ¹	- 0.31968.10 ¹	- 0.41114.10 ¹	- 0.48678.10 ¹
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.22385.10 ¹	- 0.21478.10 ¹	- 0.17933.10 ¹	- 0.1104.10 ¹	0.	0.
0.43976.10 ¹	- 0.42261.10 ¹	- 0.35354.10 ¹	- 0.21806.10 ¹	0.	0.
- 0.63857.10 ¹	- 0.61539.10 ¹	- 0.51648.10 ¹	- 0.31969.10 ¹	0.	0.
- 0.80933.10 ¹	- 0.78334.10 ¹	- 0.66075.10 ¹	- 0.41117.10 ¹	0.	0.
- 0.93807.10 ¹	- 0.91336.10 ¹	- 0.77605.10 ¹	- 0.48685.10 ¹	0.	0.
- 0.10059.10 ¹	- 0.98744.10 ¹	- 0.84760.10 ¹	- 0.53836.10 ¹	0.	0.
- 0.98749.10 ¹	- 0.98000.10 ¹	- 0.85369.10 ¹	- 0.55237.10 ¹	0.	0.
- 0.84764.10 ¹	- 0.85367.10 ¹	- 0.75925.10 ¹	- 0.50566.10 ¹	0.	0.
- 0.53833.10 ¹	- 0.55235.10 ¹	- 0.50571.10 ¹	- 0.35267.10 ¹	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.

TABLEAU 8.4 - Vecteur u

0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.52371.10 ¹	0.10717.10 ²	0.16027.10 ²	0.21357.10 ²	0.26560.10 ²
0.	0.10766.10 ²	0.21377.10 ²	0.31863.10 ²	0.42308.10 ²	0.52877.10 ²
0.	0.15995.10 ²	0.31829.10 ²	0.47994.10 ²	0.63438.10 ²	0.78825.10 ²
0.	0.21422.10 ²	0.42407.10 ²	0.63189.10 ²	0.84084.10 ²	0.10499.10 ³
0.	0.26467.10 ²	0.52695.10 ²	0.78960.10 ²	0.10501.10 ³	0.13095.10 ³
0.	0.31389.10 ²	0.63423.10 ²	0.94440.10 ²	0.12521.10 ³	0.15629.10 ³
0.	0.36696.10 ²	0.72850.10 ²	0.10924.10 ³	0.14518.10 ³	0.18107.10 ³
0.	0.41332.10 ²	0.82179.10 ²	0.12327.10 ³	0.16354.10 ³	0.20435.10 ³
0.	0.45545.10 ²	0.91096.10 ²	0.13667.10 ³	0.18231.10 ³	0.22782.10 ³
0.	0.99800.10 ²	0.19960.10 ²	0.29940.10 ³	0.39920.10 ³	0.49900.10 ³

0.	0.	0.	0.	0.
0.31636.10 ²	0.36587.10 ²	0.41332.10 ²	0.45642.10 ²	0.99800.10 ²
0.62898.10 ²	0.72895.10 ²	0.82161.10 ²	0.91212.10 ²	0.19960.10 ³
0.94255.10 ²	0.10921.10 ³	0.12320.10 ³	0.13668.10 ³	0.29940.10 ³
0.12562.10 ³	0.14518.10 ³	0.16371.10 ³	0.18223.10 ³	0.39920.10 ³
0.15636.10 ³	0.18110.10 ³	0.20395.10 ³	0.22771.10 ³	0.49900.10 ³
0.18709.10 ³	0.21667.10 ³	0.24465.10 ³	0.27285.10 ³	0.59880.10 ³
0.21654.10 ³	0.25178.10 ³	0.28388.10 ³	0.31759.10 ³	0.69860.10 ³
0.24437.10 ³	0.28399.10 ³	0.32109.10 ³	0.36091.10 ³	0.79840.10 ³
0.27290.10 ³	0.31769.10 ³	0.36069.10 ³	0.40990.10 ³	0.89820.10 ³
0.59880.10 ³	0.69860.10 ³	0.79840.10 ³	0.89820.10 ³	0.99800.10 ³

TABLEAU 8.5 - Vecteur x

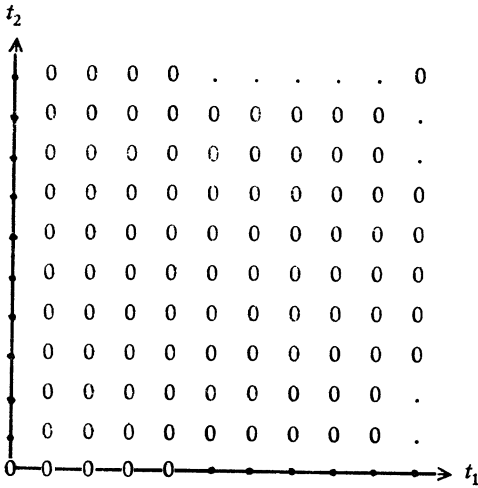
0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.17259.10 ⁻⁷	0.12442.10 ⁻⁷	0.38689.10 ⁻⁹	0.57384.10 ⁻⁸	0.15187.10 ⁻⁷
0.	-0.18108.10 ⁻⁷	-0.31686.10 ⁻⁷	-0.54927.10 ⁻⁷	-0.78394.10 ⁻⁶	-0.56843.10 ⁻⁶
0.	0.15187.10 ⁻⁷	0.24629.10 ⁻⁷	-0.43640.10 ⁻⁶	-0.74529.10 ⁻⁶	-0.62191.10 ⁻⁶
0.	-0.20723.10 ⁻⁷	-0.31415.10 ⁻⁶	-0.60068.10 ⁻⁶	-0.51977.10 ⁻⁶	-0.12656.10 ⁻⁶
0.	-0.24758.10 ⁻⁸	-0.46076.10 ⁻⁶	-0.52535.10 ⁻⁶	-0.55842.10 ⁻⁶	0.29484.10 ⁻⁶
0.	0.44900.10 ⁻⁷	-0.33169.10 ⁻⁶	-0.43443.10 ⁻⁶	-0.14704.10 ⁻⁶	-0.29925.10 ⁻⁶
0.	-0.11098.10 ⁻⁷	-0.24340.10 ⁻⁶	-0.28510.10 ⁻⁶	-0.17071.10 ⁻⁶	-0.98987.10 ⁻⁷
0.	-0.30472.10 ⁻⁷	-0.19561.10 ⁻⁶	0.12292.10 ⁻⁷	0.28138.10 ⁻⁶	0.40292.10 ⁻⁶
0.	-0.35546.10 ⁻⁷	-0.23341.10 ⁻⁶	-0.88366.10 ⁻⁶	-0.25961.10 ⁻⁶	-0.12063.10 ⁻⁶
0.	0.	0.	0.	0.	0.

0.	0.	0.	0.	0.
0.12043.10 ⁻⁷	-0.17417.10 ⁻⁷	-0.15645.10 ⁻⁶	0.99937.10 ⁻⁷	0.
0.54009.10 ⁻⁶	-0.77289.10 ⁻⁶	-0.12380.10 ⁻⁶	-0.40613.10 ⁻⁶	0.
0.72773.10 ⁻⁶	-0.48707.10 ⁻⁶	-0.66431.10 ⁻⁶	-0.10848.10 ⁻⁵	0.
0.37107.10 ⁻⁷	-0.91967.10 ⁻⁶	0.41699.10 ⁻⁷	-0.91997.10 ⁻⁶	0.
0.63689.10 ⁻⁶	0.19105.10 ⁻⁶	0.42803.10 ⁻⁶	-0.20155.10 ⁻⁶	0.
0.23433.10 ⁻⁶	-0.59634.10 ⁻⁶	-0.34397.10 ⁻⁶	-0.55040.10 ⁻⁶	0.
0.64735.10 ⁻⁶	0.15483.10 ⁻⁶	0.33554.10 ⁻⁶	0.11174.10 ⁻⁶	0.
0.44424.10 ⁻⁶	0.22814.10 ⁻⁶	0.44853.10 ⁻⁶	0.35862.10 ⁻⁶	0.
0.62912.10 ⁻⁶	0.97773.10 ⁻⁷	0.37152.10 ⁻⁶	-0.38980.10 ⁻⁶	0.
0.	0.	0.	0.	0.

TABLEAU 8.6 - Vecteur u

0.	0.	0.	$0.44146.10^{-6}$	0.	$0.41058.10^{-5}$
0.	$0.99800.10^1$	$0.19960.10^2$	$0.29940.10^2$	$0.39920.10^2$	$0.49900.10^2$
$0.39543.10^{-5}$	$0.19960.10^2$	$0.39920.10^2$	$0.59880.10^2$	$0.79840.10^2$	$0.99800.10^2$
0.	$0.29940.10^2$	$0.59880.10^2$	$0.89820.10^2$	$0.11976.10^3$	$0.14970.10^3$
$0.46807.10^{-5}$	$0.39920.10^2$	$0.79840.10^2$	$0.11976.10^3$	$0.15968.10^3$	$0.19960.10^3$
$0.10603.10^{-5}$	$0.49900.10^2$	$0.99800.10^2$	$0.14970.10^3$	$0.19960.10^3$	$0.24950.10^3$
0.	$0.59880.10^2$	$0.11976.10^3$	$0.17964.10^3$	$0.23952.10^3$	$0.29940.10^3$
$0.21304.10^{-5}$	$0.69860.10^2$	$0.13972.10^3$	$0.20958.10^3$	$0.27944.10^3$	$0.34930.10^3$
$0.65284.10^{-5}$	$0.79840.10^2$	$0.15968.10^3$	$0.23952.10^3$	$0.31936.10^3$	$0.39920.10^3$
$0.70054.10^{-5}$	$0.89820.10^2$	$0.17964.10^3$	$0.26946.10^3$	$0.35928.10^3$	$0.44910.10^3$
0.	$0.99800.10^2$	$0.19960.10^3$	$0.29940.10^3$	$0.39920.10^3$	$0.49900.10^3$
$0.33521.10^{-5}$	$0.12628.10^{-5}$	$0.30900.10^{-4}$	0.	0.	
$0.59880.10^2$	$0.69860.10^2$	$0.79840.10^2$	$0.89820.10^2$	$0.99800.10^2$	
$0.11976.10^3$	$0.13972.10^3$	$0.15968.10^3$	$0.17964.10^3$	$0.19960.10^3$	
$0.17964.10^3$	$0.20958.10^3$	$0.23952.10^3$	$0.26946.10^3$	$0.29940.10^3$	
$0.23952.10^3$	$0.27944.10^3$	$0.31936.10^3$	$0.35928.10^3$	$0.39920.10^3$	
$0.29940.10^3$	$0.34930.10^3$	$0.39920.10^3$	$0.44910.10^3$	$0.49900.10^3$	
$0.35928.10^3$	$0.41916.10^3$	$0.47904.10^3$	$0.53892.10^3$	$0.59880.10^3$	
$0.41916.10^3$	$0.48902.10^3$	$0.55888.10^3$	$0.62874.10^3$	$0.69860.10^3$	
$0.47904.10^3$	$0.55888.10^3$	$0.63872.10^3$	$0.71856.10^3$	$0.79840.10^3$	
$0.53892.10^3$	$0.62874.10^3$	$0.71856.10^3$	$0.80838.10^3$	$0.89820.10^3$	
$0.59880.10^3$	$0.69860.10^3$	$0.79840.10^3$	$0.89820.10^3$	$0.99800.10^3$	

TABLEAU 8.7 - Distribution du contrôle optimal

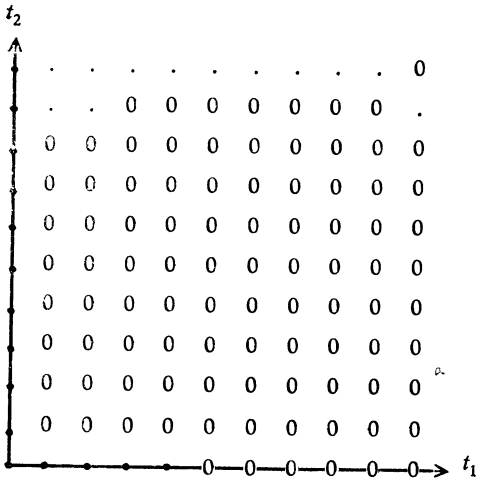


$f = 1000 \sin 2\pi t_1 \cos 2\pi t_2$
 $h = h = 1/10; \varepsilon = 1/500$

avec conditions de Neumann-Dirichlet sur l'état x .

Le signe 0 signifie que $u(i, j) = 0$ au point (i, j) du réseau.

TABLEAU 8.8 - Distribution du contrôle optimal



$f = 1000(t_1^2 - t_2^2)$

$h_1 = h_2 = h = 1/10; \varepsilon = 1/500$

avec conditions de Neumann-Dirichlet sur l'état x .

Le signe 0 signifie que $u(i, j) = 0$ au point (i, j) de réseau.

9. Application II.

9.1. *Position du problème.* Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n de frontière Γ suffisamment régulière. On désigne par $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$ l'espace des (classe de) fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que $D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$; les dérivées étant prises au sens des distributions. $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne l'adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

On note par $W^{-1,q}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Posons $V = W_0^{1,p}(\Omega)$. On sait que V coïncide avec l'espace

$$\{u \mid u \in L^p(\Omega), D_i u \in L^p(\Omega), i=1, \dots, n; u|_{\Gamma} = 0\}$$

et

$$V' = W^{-1,q}(\Omega) = \{f \mid f = f_0 + \sum_{i=1}^n D_i f_i, f_0, f_i \in L^q(\Omega)\}.$$

On munit alors V de la norme

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^n \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

qui en fait un espace de Banach uniformément convexe.

Soit X un convexe fermé de V donné par

$$X = \{v \in V \mid [v] = \left(\sum_{i=1}^n \|D_i v\|_{L^p(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq 1\}.$$

On cherche maintenant $u \in X$ tel que

$$(9.1) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in X$$

avec

$$(9.2) \quad J(v) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \|D_i v\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{\lambda}{2} \|D_i v\|_{L^2(\Omega)}^2 - (f, v)$$

$\lambda > 0$, $p \geq 2$; pour f donné dans V' .

Nous avons alors le

THÉORÈME 9.1.

1) Il existe $u \in X$ unique solution de (9.1), (9.2).

2) Toute solution de (9.1), (9.2) est solution de

$$(9.3) \quad (J'u, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in X$$

avec

$$(9.4) \quad J'(u) = - \sum_{i=1}^n D_i(|D_i u|^{p-2} D_i u) - \lambda \Delta u - f$$

et réciproquement

3) $\forall \varepsilon > 0 \exists u_\varepsilon \in V$ unique solution du problème

$$(9.5) \quad Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} Bu_\varepsilon = f$$

avec

$$(9.6) \quad Au = - \sum_{i=1}^n D_i(|D_i u|^{p-2} D_i u) - \lambda \Delta u$$

$$(9.7) \quad Bu = \begin{cases} 0 & \text{si } [u] \leq 1 \\ -4([u]^2 - 1)\Delta u & \text{si } [u] > 1. \end{cases}$$

4) u_ε converge fortement dans V vers u solution de (9.3), (9.4) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION.

1) On vérifie facilement les hypothèses i), ii), iii) du théorème 1.1; on voit que $\frac{J(u)}{\|u\|} \rightarrow +\infty$ quand $\|u\| \rightarrow +\infty$.

2) On vérifie que la dérivée de J donné par (9.2) est donnée par (9.4). On applique alors le théorème 1.1.

3) Le convexe $x = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid [v]^2 \leq 1\}$ peut s'écrire aussi.

$$(9.8) \quad X = \{v \in V \mid g_0(v) \leq 0 \text{ avec } g_0(v) = ([v]^2 - 1)\}.$$

Posons alors

$$(9.9) \quad g(v) = H \cdot g_0^2(v) \text{ avec } H = \begin{cases} 1 & \text{si } g_0(v) > 0 \\ 0 & \text{si } g_0(v) \leq 0 \end{cases}$$

g est alors convexe s.c.i dérivable au sens de Gateaux et sa dérivée est donnée par

$$(9.10) \quad g'(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } [u] \leq 1. \\ -4([u]^2 - 1)\Delta u & \text{si } [u] > 1 \end{cases}$$

On pose alors

$$(9.11) \quad Bu = g'(u).$$

On sait d'après le corollaire 2.1 et la remarque 2.1 qu'il existe $u_\varepsilon \in V$ unique solution du problème

$$(9.12) \quad J(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} g(u_\varepsilon) \leq J(v) + \frac{1}{\varepsilon} g(v) \quad \forall v \in V.$$

Par ailleurs (9.12) est équivalent à (9.5); ceci démontre l'existence et l'unicité de $u_\varepsilon \in V$ solution de (9.5).

4) On applique le théorème 2.1.

9.2. Méthode d'approximation. On se propose maintenant de résoudre numériquement le problème (9.3), (9.4) d'une part et le problème (9.5), (9.6), (9.7) d'autre part.

La solution u de (9.3), (9.4) sera approchée par une suite

$$(u_h^n) \quad (h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty).$$

La solution u_ε de (9.5), (9.6), (9.7) sera approchée par une suite $(u_{\varepsilon h}^n)$. Comme on sait déjà que $u_\varepsilon \rightarrow u$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$; le calcul effectif de (u_h^n) et $(u_{\varepsilon h}^n)$ rendra compte numériquement de l'approximation de u par u_ε .

Soit $h = (h_1, \dots, h_n) \in R^n$ un paramètre positif destiné à tendre vers 0.

Posons

$$W_i^{1,p}(\Omega) = \{ \varphi \mid \varphi \in L_p(\Omega), D_i \varphi \in L_p(\Omega) \}.$$

Nous désignons par \mathfrak{R}_h le réseau des points M de la forme

$$M = (m_1 h_1, \dots, m_n h_n) \quad m_i \in \mathbf{Z} \quad i = 1, \dots, n.$$

Nous posons

$$\omega_{h,q}^M = \prod_{i=1}^n \left[\left(m_i + \frac{q_i + 1}{2} \right) h_i, \left(m_i - \frac{q_i + 1}{2} \right) h_i \right]$$

$$q = (q_i)_{1 \leq i \leq n} \quad q_i \text{ entier positif; } |q| = \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\rho_h^M = \bigcup_{|q| \leq 1} \omega_{h,q}^M$$

$$\Omega'_h = \{M \mid M \in \mathfrak{R}_h, \rho_h^M \subset \Omega\}$$

$$\Omega_h = \bigcup_{M \in \Omega'_h} \omega_{h,0}^M.$$

Soit V_h l'espace des suites de nombres réels $u_h = (u_h^M)_{M \in \Omega'_h}$.

On pose $u_h(x) = u_h^M$ si $x \in \omega_{h,0}^M$; V_h est un espace de dimension finie que nous mettons en dualité avec V'_h par le produit scalaire:

$$(u_h, v_h)_h = h_1, \dots, h_n \sum_{M \in \Omega'_h} u_h^M v_h^M.$$

Posons

$$\nabla_i u_h(x) = \frac{u_h \left(x + \frac{h_i}{2} \right) - u_h \left(x - \frac{h_i}{2} \right)}{h_i}$$

$$\nabla_i^2 u_h(x) = \nabla_i (\nabla_i u_h(x)).$$

Posons

$$\theta_{h_i}^{m_i} = \text{fonction caractéristique de } \left[\left(m_i - \frac{1}{2} \right) h_i, \left(m_i + \frac{1}{2} \right) h_i \right]$$

$$\chi_{h_i} = \frac{1}{h_i} \theta_{h_i}^0$$

$$\theta_h^M = \text{fonction caractéristique de } \omega_{h,0}^M = \bigotimes_{i=1}^n \theta_{h_i}^{m_i}$$

$$\chi_h = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \theta_h^0 = \bigotimes_{i=1}^n \chi_{h_i}$$

alors

$$p_h^i u_h = \sum_{M \in \Omega'_h} u_h^M \chi_{h_i} * \theta_{h_i}^M$$

(où $*$ désigne le produit de convolution) est un prolongement de V_h dans $W_i^{1,p}$. On a donc identifié u_h à la fonction:

$$u_h = \sum_{M \in \Omega'_h} u_h^M \theta_h^M.$$

On munit alors V_h de la norme

$$\|u_h\|_h = \|p_h u_h\| = \left(\sum_{i=1}^n \|D_i p_h^i u_h\|_{L_p}^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L_p}^p \right)^{1/p}.$$

Posons

$$f_h = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_{\Omega} f \theta_h^M dx.$$

On discrétise alors le problème (9.3), (9.4) sous la forme:

$$(9.13) \quad (J'_h u_h, v_h - u_h)_h \geq 0 \quad \forall v_h \in X_h$$

avec

$$(9.14) \quad J'_h u_h = - \sum_{i=1}^n \nabla_i (|\nabla_i u_h|^{p-2} \nabla_i u_h) - \lambda \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_h - f_h$$

$$(9.15) \quad X_h = \{v_h \in V_h \mid \left(\sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L_n}^2 \right)^{1/2} = [u_h]_h \leq 1\}.$$

De même le problème (9.5), (9.6), (9.7) se met sous la forme:

$$(9.16) \quad A_h u_{eh} + \frac{1}{\varepsilon} B_h u_{eh} = f_h$$

avec

$$(9.17) \quad A_h u_{eh} = - \sum_{i=1}^n \nabla_i (|\nabla_i u_{eh}|^{p-2} \nabla_i u_{eh}) - \lambda \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_{eh}$$

$$(9.18) \quad B_h u_{eh} = \begin{cases} 0 & \text{si } [u_{eh}]_h \leq 1 \\ -4([u_{eh}]^2 - 1)\Delta_h u_{eh} & \text{si } [u_{eh}]_h > 1 \end{cases}$$

où $\Delta_h u_h = \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_h$.

Nous avons le

THÉORÈME 9.2.

1) Il existe $u_h \in V_h$ unique solution du problème (9.13), (9.14) et (9.15). De plus $p_h^i u_h \rightarrow u$ dans $W_i^{1,p}(\Omega)$ fort quand $h \rightarrow 0$; où u est la solution de (9.3), (9.4).

2) Il existe $u_{eh} \in V_h$ unique solution du problème (9.16), (9.17), (9.18). De plus $p_h^i u_{eh} \rightarrow u_e$ dans $W_i^{1,p}(\Omega)$ fort quand $h \rightarrow 0$; où u_e est la solution du problème (9.5), (9.6), (9.7).

DEMONSTRATION. Cf. le paragraphe 6 et le théorème 6.1.

9.3 Resolution des problèmes discretises par un méthode iterative.

On se propose maintenant de résoudre le problème (9.13), (9.14), (9.15) d'une part, ainsi que (9.16), (9.17), (9.18); à l'aide des méthodes itératives du paragraphe 5. Plus précisément, nous avons le

THÉORÈME 9.3.

1) La suite (u_h^n) définie par les itérations

$$(9.19) \quad u_h^{n+1} = P_{X_h}(u_h^n - \rho S_h^{-1} J'_h u_h^n) \text{ avec } u_h^0 = 0$$

$$(9.20) \quad J'_h u_h^n = - \sum_{i=1}^n \nabla_i (|\nabla_i u_h^n|^{p-2} \nabla_i u_h^n) - \lambda \Delta_h u_h^n - f_h ; S_h = - \Delta_h$$

$$(9.21) \quad X_h = \{v_h \in V_h \mid [v_h]_h \leq 1\}$$

$$(9.22) \quad \rho = \lambda / C^2(N) \text{ avec } C(N) = (p-1) \frac{N^{p-2}}{(h_1, \dots, h_n)^{\frac{p-2}{2}}} + \lambda$$

converge vers u_h solution de (9.13), (9.14), (9.15) quand $n \rightarrow \infty$.

2) La suite (u_{eh}^n) définie par les itérations

$$(9.23) \quad u_{eh}^{n+1} = u_{eh}^n - \rho_\varepsilon S_h^{-1} (J'_h u_{eh}^n + \frac{1}{\varepsilon} B_h u_{eh}^n) \text{ avec } u_{eh}^0 = 0$$

$$(9.24) \quad B_h u_h^n = \begin{cases} 0 & \text{si } [u_{eh}^n]_h^2 \leq 1 \\ -4([u_{eh}^n]_h - 1) \Delta_h u_{eh}^n & \text{si } [u_{eh}^n]_h > 1 \end{cases}$$

$$(9.25) \quad \rho_\varepsilon = \lambda \left\{ C(N) + \frac{4 + 12N^2}{\varepsilon} \right\}^2$$

converge vers u_{eh} solution de (9.16), (9.17), (9.18) quand $n \rightarrow \infty$.

DÉMONSTRATION.

1) Posons

$$A_h u_h = J'_h u_h + f_h = - \sum_{i=1}^n \nabla_i (|\nabla_i u_h|^{p-2} \nabla_i u_h) - \lambda \Delta_h u_h$$

et

$$[u_h]_h^2 = (S_h u_h, u_h)_h = \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L_2}^2.$$

Nous avons alors

$$(9.26) \quad (A_h u_h - A_h v_h, u_h - v_h)_h \geq \lambda [u_h - v_h]_h^2.$$

Supposons maintenant que

$$[u_h] \leq N, \quad [v_h] \leq N$$

on a alors

$$|\nabla_i u_h| \leq \frac{[u_h]_h}{(h_1, \dots, h_n)^{1/2}} = N' \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

ce qui donne

$$(9.27) \quad (A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h \leq C(N') [u_h - v_h]_h [w_h]_h$$

avec

$$(9.28) \quad C(N') = (p-1)N'^{p-2} + \lambda.$$

Nous avons encore

$$(9.29) \quad (A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h = C(N) [u_h - v_h]_h [w_h]_h$$

avec

$$(9.30) \quad C(N) = (p-1) \frac{N^{p-2}}{(h_1, \dots, h_n)^{\frac{p-2}{2}}} + \lambda.$$

Donnons maintenant une estimation de N . On a

$$(A_h u_h, u_h)_h \geq \sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^p}^p$$

$$\sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^p}^p \leq \|f_h\|_{L^q} \|u_h\|_{L^p} \leq C_1(\Omega) \|f_h\|_{L^q} \left(\sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$$

où $C_1(\Omega)$ est une constante ne dépendant que de l'ouvert Ω , supposé borné. On a donc

$$\left(\sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^p}^p\right)^{1/p} \leq C_1^{q/p}(\Omega) \|f_h\|_{L^q}^{q/p} = N.$$

On a donc

$$(9.31) \quad [u_h]_h \leq N = C_1^{q/p}(\Omega) \|f_h\|_{L^q}^{q/p}.$$

On applique alors le théorème 5.1 (cf. aussi M. Sibony [7.a]) en posant

$$\rho = \lambda / C^2(N) = \lambda / C^2(N').$$

2) Nous allons maintenant estimer le paramètre $\rho = \rho_\varepsilon$ pour l'opérateur

$$L_h = A_h + \frac{1}{\varepsilon} B_h.$$

Nous avons

$$(9.32) \quad (L_h u_h - L_h v_h, u_h - v_h)_h \geq (A_h u_h - A_h v_h, u_h - v_h)_h \geq \lambda [u_h - v_h]_h^2.$$

De plus si $[u_h] \leq N$, $[v_h] \leq N$, on a :

$$(9.33) \quad (L_h u_h - L_h v_h, w_h)_h = (A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h + \frac{1}{\varepsilon} (B_h u_h - B_h v_h, w_h)_h$$

or

$$(9.34) \quad (A_h u_h - A_h v_h, w_h)_h \leq C(N) [u_h - v_h]_h [w_h]_h$$

avec

$$C(N) = (p-1) \frac{N^{p-2}}{(h_1, \dots, h_n)^{\frac{p-2}{2}}} + \lambda.$$

Pour simplifier, nous supprimons l'indice h .

Nous avons alors

$$(9.35) \quad \begin{aligned} (Bu - Bv, w) &= 4(\Delta u - \Delta v, w) - 4([u]^2 \Delta u - [v]^2 \Delta v, w) \\ (Bu - Bv, w) &\leq 4[u - v][w] + \\ &+ 4 \left(\sum_{i=1}^n \|[u]^2 \nabla_i u - [v]^2 \nabla_i v\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} [w]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \|[u]^2 \nabla_i u - [v]^2 \nabla_i v\| &\leq [u]^2 \|\nabla u_i - \nabla v_i\| + \|\nabla v_i\| |[u]^2 - [v]^2| \\ \|[u]^2 \nabla_i u - [v]^2 \nabla_i v\|^2 &\leq ([u]^2 \|\nabla u_i - \nabla v_i\| + \\ &+ \|\nabla v_i\| [u - v]([u] + [v]))^2 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^n \|[u] \nabla_i u - [v] \nabla_i v\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq [u - v] \{ [u]^4 + ([u] + [v])^2 [v]^2 + 2[u]^2 [v]([u] + [v]) \}^{1/2}. \end{aligned}$$

Donc si $[u] \leq N$ et $[v] \leq N$, on a :

$$(Bu - Bv, w) \leq 4[u - v][w] + 12N^2 [u - v][w].$$

D'où

$$(9.36) \quad (Bu - Bv, w) \leq (4 + 12N^2)[u - v][w].$$

Compte-tenu de (9.34), (9.36). Nous avons alors d'après (9.33), (9.34)

$$(9.37) \quad (Lu - Lv, w) \leq \left\{ C(N) + \frac{4}{\varepsilon}(1 + 3N^2) \right\} [u - v][w].$$

On peut donc poser

$$(9.38) \quad \rho_\varepsilon = \lambda / C'^2(N)$$

avec

$$(9.39) \quad C'(N) = (p - 1) \frac{N^{p-2}}{(h_1, \dots, h_n)^{\frac{p-2}{2}}} + \lambda + \frac{4(1 + 3N^2)}{\varepsilon}$$

et N donné par (9.31).

On applique alors le théorème 5.1.

REMARQUE 8.1. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et $h_1 = h_2 = h$ et $p = 3$ les formules (9.22), (9.31) donnent:

$$(9.40) \quad \rho = \lambda / \left(\frac{2N}{h} + \lambda \right)^2 \text{ avec } N = \sqrt{2} \| f_h \|_{L_{3/2}^{1/2}}.$$

De même les formules (9.31), (9.38), (9.39) donnent:

$$(9.41) \quad \rho_\varepsilon = \lambda / \left(\frac{2N}{h} + \lambda + \frac{4(1 + 3N^2)}{\varepsilon} \right)^2 \text{ avec } N = \sqrt{2} \| f_h \|_{L_{3/2}^{1/2}}.$$

REMARQUE 8.2. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $h_1 = h_2 = h$ et $p = 3$; alors

1) Les formules (9.26), 9.28) donne

$$(9.42) \quad \rho = \lambda / (2N' + \lambda)^2 \text{ avec } \sup |\nabla_i u_h| \leq N'.$$

Si on pose dans les itérations (9.19)

$$N' = N'_n = \sup_i |\nabla_i u_h^{n-1}| \text{ avec } u_h^{n-1}$$

donné par (9.19), on a:

$$(9.44) \quad \rho = \rho_n = \lambda / (2N'_n + \lambda)^2.$$

On obtient un paramètre ρ variable avec les itérations (9.9).

2) Si on pose $N' = N'_n = \text{Sup}_i |\nabla_i u_h^{n-1}| u_h^{n-1}$ donné par (9.23), on a alors

$$(9.45) \quad \rho_\epsilon = \rho_\epsilon^n = \lambda / \left(2N'_n + \lambda + \frac{4(1 + 3h^2 N_n'^2)}{\epsilon} \right)^2.$$

3) Si on pose

$$(9.46) \quad N_n = [u_{n-1}]$$

nous avons encore deux nouveaux paramètres, ρ_n et ρ_ϵ^n variables avec les itérations

$$(9.47) \quad \rho_n = \lambda / \left(\frac{2N_n}{h} + \lambda \right)^2$$

$$(9.48) \quad \rho_\epsilon^n = \lambda / \left(\frac{2N_n}{h} + \lambda + \frac{4}{\epsilon} (1 + 3N_n^2) \right)^2.$$

9.4. Resultats numeriques sur la minimisation avec contraintes.

Nous pouvons finalement résoudre le problème

$$(9.49) \quad J(u) \leq (v) \quad \forall v \in X$$

avec

$$(9.50) \quad J(v) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^2 \|D_i v\|_{L_p}^p + \frac{\lambda}{2} \|D_i v\|_{L_2}^2 - (f, v)$$

$$(9.51) \quad X = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid [v] = \left(\sum_{i=1}^2 \|D_i v\|_{L_2}^2 \right)^{1/2} \leq 1\}$$

où $\Omega =]0,1[\times]0,1[$

en calculant (u_h^n) à l'aide des itérations suivantes: (pour h suffisam-

ment petit)

$$(9.52) \quad u_h^{n+1} = P_{X_h}^S(u_h^n - \rho S_h^{-1} J'_h u_h^n), \quad S_h = -\Delta_h$$

avec J'_h , X_h et ρ donné par (9.20), (9.21), (9.22).

Dans (9.52) nous pouvons aussi remplacer ρ par

$$(9.53) \quad \rho = \rho_n = \lambda / \left(\frac{2N_n}{h} + \lambda \right)^2 \quad \text{avec} \quad N_n = [n_h^{n-1}]$$

avec N_0 donné par (9.31) où bien faire

$$(9.54) \quad \rho = \rho_n = \lambda / (2N'_n + \lambda)^2 \quad \text{avec} \quad N'_n = \sup_{i=1,2} \nabla_i u_h^{n-1} |$$

(on prend ρ_0 donné par (9.53) et $N_0 = 1$).

Si on pose a priori.

$$(9.55) \quad u = u(x, y) = \sqrt{45(x-x^2)(y-y^2)}$$

et

$$(9.56) \quad f = - \sum_{i=1}^2 D_i (|D_i u| |D_i u| - \lambda \Delta u + 2(x-x^2)(y-y^2)).$$

On vérifie facilement que u donné par (9.55) vérifie l'équation:

$$(9.57) \quad u = P_X(u - \rho S^{-1}(Au - f)).$$

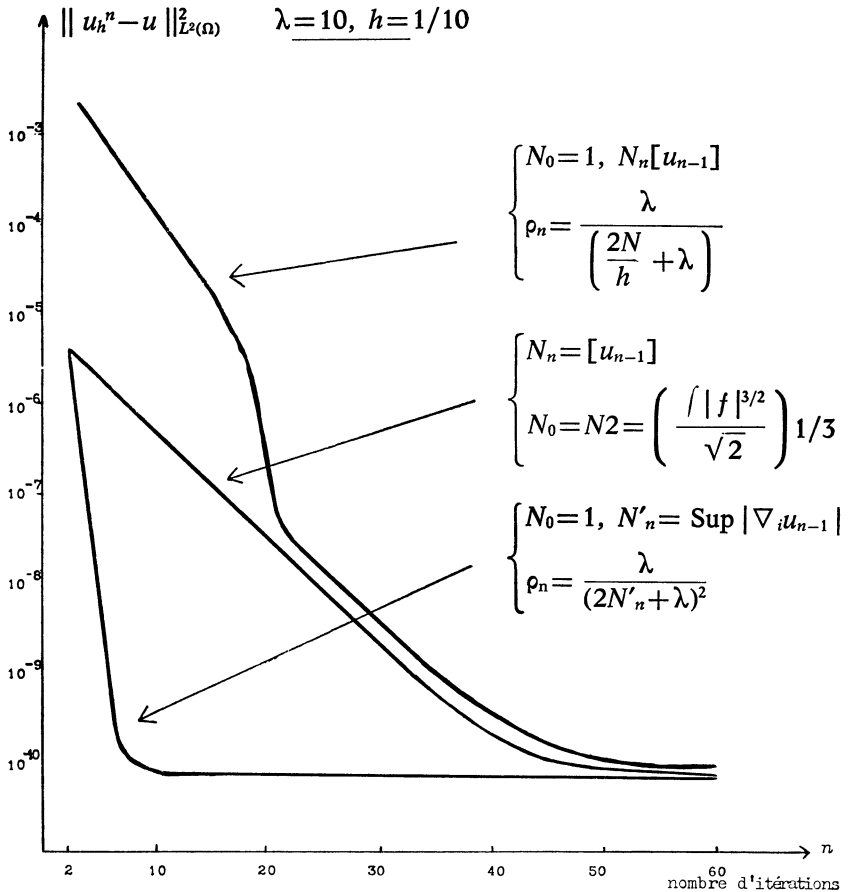
En posant: $f_h = f$ donné par (9.56) la suite (u_h^n) calculée à l'aide des itérations (9.52) convergera pour h suffisamment petit et n suffisamment grand vers u donné par (9.55) solution de (9.57) où (9.3), (9.4) où encore (9.49), (9.50), (9.51).

Quand, dans les itérations (9.52), on prend ρ donné par (9.54), nous obtenons au bout de $n=16$ itérations pour $h=10^{-1}$,

$$(9.57') \quad \| u_h^n - u \|_{L^2(\Omega)} = 8,5 \cdot 10^{-6} \quad \text{et} \quad \sup_x \left| \frac{u_h^n - u}{u} \right| < 4,5 \cdot 10^{-5}$$

u étant la solution exacte du problème (9.49), (9.50), (9.51) et donnée par (9.55). Pour $n \geq 16$, les résultats de (u_h^n) sont stationnaires.

La courbe 9.1 donne l'évolution de l'erreur $\|u_h^n - u\|_{L^2(\Omega)}^2$ en fonction du nombre n d'itérations pour divers choix du paramètre ρ_n dans les itérations (9.52).



9.5. *Résultats numériques sur le problème pénalisé.* Nous pouvons encore résoudre le problème (9.49), (9.50) et (9.51) en calculant (u_h^n)

(pour h et ϵ fixés suffisamment petits) à l'aide des itérations suivantes:

$$(9.58) \quad u_{\epsilon h}^n = u_{\epsilon h}^{n-1} - \rho_{\epsilon h} S_h^{-1} \left(J'_h u_{\epsilon h}^{n-1} + \frac{1}{\epsilon} B_h u_{\epsilon h}^{n-1} \right); \quad u_{\epsilon h}^0 = 0$$

avec J'_h donné par (9.20); B_h donné par (9.24) et $\rho_{\epsilon h}$ donné par (9.45).

Si on pose dans $f_h = f$ donné par (9.56) la suite $(u_{\epsilon h})$ calculée à l'aide des itérations (9.58) convergerait alors vers (pour ϵ et h suffisamment petits)

$$(9.59) \quad u = u(x, y) = \sqrt{45}(x-x^2)(y-y^2)$$

solution du problème exacte (9.57) où du problème équivalent (9.49), (9.50), (9.51).

Les expériences numérique effectuées conduisent aux résultats suivants:

Quand on se donne h petit ($h=10^{-1}$ pour l'expérience) et ϵ petit ($\epsilon=10^{-1}$) la solution $(u_{\epsilon h})$ obtenue à l'aide des itérations (9.58) devient vite stationnaire et l'erreur

$$(9.60) \quad \underline{\| u_{\epsilon h}^n - u \|_{L(\Omega)} = 3,410^{-4}} \text{ pour } (\epsilon = 10^{-1}, h = 10^{-1} \text{ et } n = 200)$$

et

$$(9.61) \quad \underline{\text{Sup}_x \left| \frac{u_{\epsilon h}^n - u}{u} \right| < 1,7.10^{-3}.}$$

Quand on prend ϵ encore plus petit la solution $(u_{\epsilon h})$ obtenue par (9.58) se stabilise au bout d'un grand nombre d'itérations et le gain en précision n'est pas très net mais néanmoins les résultats sont satisfaisants.

Nous avons alors procédé de la manière suivante:

1) on se donne $\epsilon_1 = 10^{-1}$ et on pose $u_{\epsilon_1, h}^0 = 0$ on calcule alors $(u_{\epsilon_1, h}^n)$ jusqu'à $n=200$ ce qui donne (9.60) et (9.61).

2) on pose alors $\epsilon = \epsilon_1/5 = 1/50$ et on pose $u_{\epsilon, h}^0 = u_{\epsilon_1, h}^n$ on calcule à l'aide de (9.58) la solution $(u_{\epsilon, h}^n)$ correspondante jusqu'à $n=200$ on a

alors

$$(9.62) \quad \underline{\|u_{\varepsilon_2 h}^n - u\|_{L^2(\Omega)} = 7,42 \cdot 10^{-5} \text{ pour } n=200}$$

$$(9.63) \quad \underline{\text{Sup}_x \left| \frac{u_{\varepsilon_2 h}^n - u}{u} \right| < 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ pour } n=200.}$$

3) on prend ensuite $\varepsilon_3 = \varepsilon_2/5 = 1/250$ et on pose $u_{\varepsilon_3 h}^0 = u_{\varepsilon_2 h}^n$ ce qui conduit à $(u_{\varepsilon_3 h}^n)$ avec

$$(9.64) \quad \underline{\|u_{\varepsilon_3 h}^n - u\|_{L^2(\Omega)} = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ pour } n=200}$$

$$(9.65) \quad \underline{\text{Sup}_x \left| \frac{u_{\varepsilon_3 h}^n - u}{u} \right| < 7 \cdot 10^{-5} \text{ pour } n=200.}$$

4) on poursuit l'expérience avec $\varepsilon_4 = \varepsilon_3/5 = 1/1250$ avec $u_{\varepsilon_4 h}^0 = u_{\varepsilon_3 h}^n$; on a alors

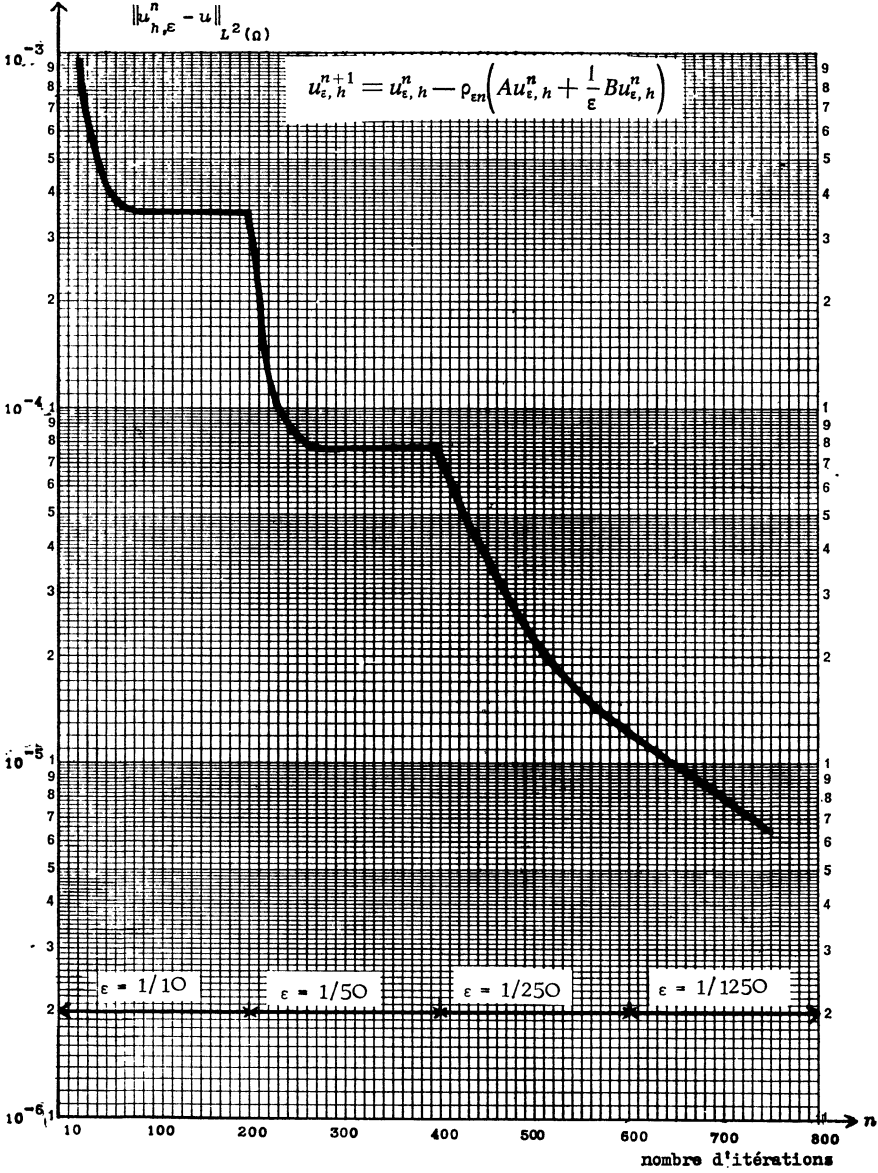
$$(9.66) \quad \boxed{\|u_{\varepsilon_4 h}^n - u\|_{L^2(\Omega)} = 5,71 \cdot 10^{-6} \text{ pour } n=160}$$

$$(9.67) \quad \boxed{\text{Sup}_x \left| \frac{u_{\varepsilon_4 h}^n - u}{u} \right| \leq 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ pour } n=160.}$$

Les résultats se présentent alors pour $u_{\varepsilon_4 h}^n$ (5, y) comme suit:

Colonne n. 5 $U_{\varepsilon_4 h}^n$ calculé	Iteration $N = 160$ U théorique	Erreur: $\left \frac{u_{\varepsilon_4 h}^n - u}{u} \right $
1.4490.10 ⁻¹	1.4490.10 ⁻¹	1.0446.10 ⁻⁵
2.5760.10 ⁻¹	2.5760.10 ⁻¹	8.7710.10 ⁻⁶
3.3810.10 ⁻¹	3.3809.10 ⁻¹	2.4020.10 ⁻⁵
3.8641.10 ⁻¹	3.8639.10 ⁻¹	3.5123.10 ⁻⁵
4.0251.10 ⁻¹	4.0249.10 ⁻¹	4.0198.10 ⁻⁵
3.8641.10 ⁻¹	3.8639.10 ⁻¹	3.5019.10 ⁻⁵
3.3810.10 ⁻¹	3.3809.10 ⁻¹	2.3788.10 ⁻⁵
2.5760.10 ⁻¹	2.5760.10 ⁻¹	8.4044.10 ⁻⁶
1.4490.10 ⁻¹	1.4490.10 ⁻¹	1.0940.10 ⁻⁵

La courbe n. 9.2 donne l'évolution de l'erreur $\|u_{\epsilon, h}^n - u\|_{L^2(\Omega)}$ en fonctions des itérations.



RÉMARQUE 9.3. Nous constatons dans la courbe n. 9.2 la présence de paliers correspondant à $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varepsilon_1 h}^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varepsilon_2 h}^n$ et par chance il n'y pas de palier pour $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varepsilon_3 h}^n$ ($n=200$).

L'exécution totale de ce programme de calcul de $u_{\varepsilon_1 h}$, $u_{\varepsilon_2 h}$, $u_{\varepsilon_3 h}$ et $u_{\varepsilon_4 h}$ en C.D.C. 3600 est de 11 mn 39 s.

Conclusion.

Les résultats numériques donnés par (9.57') du problème avec contraintes sont à peu de chose près du même ordre que les résultats donnés par (9.66), (9.67) du problème avec contraintes pénalisées.

Dans la méthode de résolution avec contraintes nous avons les convergences suivantes:

$$\text{i) } u_h^n \rightarrow u_h \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

$$\text{ii) } p_h u_h \rightarrow u \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Dans la méthode de résolution avec pénalisation des contraintes nous avons les convergences:

$$\text{iii) } u_{\varepsilon h}^n \rightarrow u_{\varepsilon h} \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

$$\text{iv) } p_h u_{\varepsilon h} \rightarrow u_{\varepsilon} \text{ quand } h \rightarrow 0$$

$$\text{v) } u_{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Nous voyons donc que pour un problème pouvant être résolu par les deux méthodes séparément on a les résultats suivants:

$$\| u_h^n - u_h \|_h + \| p_h u_h - u \| \sim \| u_{\varepsilon h}^n - u_{\varepsilon h} \|_h + \| u_{\varepsilon h} - u_{\varepsilon} \|_h + \| u_{\varepsilon} - u \| .$$

L'erreur $\| u_{\varepsilon} - u \|$ est donc négligeable pour $\varepsilon = 1/1250$.

Mais pour pouvoir faire $\varepsilon = 1/1250$ il semble que la manière qu'on vient de décrire ($\varepsilon_1 = 10^{-1}$ puis $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/5$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2/5$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_3/5$) soit inévitable.

L'exécution sur machine est plus longue pour la méthode avec pénalisation que pour la méthode avec projection.

Néanmoins la méthode de pénalisation des contraintes semble s'imposer chaque fois que la projection sur le convexe X des contraintes

n'est pas accessible numériquement, ce qui est le cas des applications du paragraphe 7.

BIBLIOGRAFIE

- [1] ANDERSON D. G.: *Iterative procedures for nonlinear integral equations*, J. Ass. for Comp. Mach., t. 12, 1965, pp. 547-560.
- [2] BENSOUSSAN A. et KENETH P.: *Sur l'analogie entre les méthodes de régularisation et de pénalisation*, (à paraître).
- [3] BREZIS H.: *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 18, 1968, fasc. 1, pp. 115-175.
- [4] BREZIS H. et SIBONY M.: *Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones*, Arch. for rat. Mec. and Anal., t. 28, 1968, pp. 59-82.
- [5] COURANT R.: *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration*, Bull. Amer. math. Soc., t. 49, 1943, pp. 1-23.
- [6] LIONS J.-L.: *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivés partielles*, Paris, Dunod, 1968 (Etudes mathématiques).
- [7.a] SIBONY M.: *Sur l'approximation d'équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone*, (à paraître dans 5 of Math. Ana. and Appl).
- [7.b] SIBONY M.: *Méthodes itératives pour les équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone*, (à paraître dans Calcolo).
- [8] VARGA R. S.: *Matrix iterative analysis*, Englewood Cliffs, Prentice Hall 1962 (Prentice Hall Series in automatic computation).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 gennaio 1970.