

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO CHICCO

**Un teorema sulle correnti intere a supporto
non compatto**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 42 (1969), p. 299-303

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1969__42__299_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN TEOREMA SULLE CORRENTI INTERE A SUPPORTO NON COMPATTO

di MAURIZIO CHICCO *)

È noto il seguente:

TEOREMA 1. « Dato un insieme $E \subset R^n$ di perimetro finito e un insieme di Borel L , nella famiglia degli insiemi B che verificano la condizione

$$B - L = E - L$$

ne esiste uno di perimetro minimo, cioè esiste un insieme \tilde{B} tale che

$$\tilde{B} - L = E - L, \quad P(\tilde{B}) = \inf \{ P(B) : B - L = E - L \} »$$

(Vedi [1] e [2]).

Interpretando un insieme di misura e perimetro finiti come una corrente intera n -dimensionale, si pone il problema di estendere il precedente risultato alle correnti intere k -dimensionali. Ciò è fatto nel teorema 4 del presente lavoro.

La terminologia usata è quella di [3] e [4]. Seguendo H. Federer ([4] pag. 62), diremo $D^k(R^n)$ lo spazio delle forme differenziali k -dimensionali a coefficienti infinitamente differenziabili e a supporto compatto in R^n . Gli elementi dello spazio $D_k(R^n)$, duale di $D^k(R^n)$, sono correnti k -dimensionali il cui supporto non è necessariamente limitato. Ovviamente è $E_k(R^n) \subset D_k(R^n)$.

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Via L. Battista Alberti 4, 16100 Genova.

DEFINIZIONE. « Una corrente $T \in D_k(\mathbb{R}^n)$ si dice localmente rettificabile se, per ogni aperto limitato $A \subset \mathbb{R}^n$, la corrente $T \cap A \in E_k(\mathbb{R}^n)$ è rettificabile. Una corrente $T \in D_k(\mathbb{R}^n)$ si dice localmente intera se T e ∂T sono localmente rettificabili ».

Indichiamo con $I'_k(\mathbb{R}^n)$ il sottospazio delle correnti localmente intere di $D_k(\mathbb{R}^n)$.

LEMMA. « Sia $T \in I'_k(\mathbb{R}^n)$, $f(x)$ una funzione lipschitziana tale che, posto

$$A_s = \{x : x \in \mathbb{R}^n, f(x) > s\},$$

A_s sia limitato per ogni s . Allora $T \cap A_s \in I_k(\mathbb{R}^n)$ per quasi tutti gli s ».

Segue subito dai teoremi 3.10 e 8.14 di [3].

TEOREMA 2. « Siano α, β due funzioni definite sulla famiglia degli insiemi aperti limitati di \mathbb{R}^n ed a valori reali positivi.

Allora l'insieme:

$$Z = I'_k(\mathbb{R}^n) \cap \{T : M(T \cap A) \leq \alpha(A), M[(\partial T) \cap A] \leq \beta(A)\}$$

è debolmente compatto ».

Basta dimostrare che una qualunque successione $\{T_i\}$ di correnti di Z contiene una sottosuccessione convergente ad una corrente di Z . Sia d un numero compreso tra 0 e 1. Posto

$$S_t = \{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| < t\}$$

dal teorema 3.10 di [3] segue:

$$\frac{1}{d} \int_j^{j+d} M[\partial(T_i \cap S_t)] dt \leq \beta(S_{j+d}) + \frac{1}{d} \alpha(S_{j+d}) = c(j, d).$$

Per il lemma di Fatou si ha:

$$\frac{1}{d} \int_j^{j+d} \liminf_{i \rightarrow \infty} M[\partial(T_i \cap S_t)] dt \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \int_j^{j+d} M[\partial(T_i \cap S_t)] dt \leq c(j, d)$$

per $j=1, 2, 3, \dots$

Ne segue l'esistenza di un numero η e di una sottosuccessione $\{T_{i'}\}$ di $\{T_i\}$ tali che:

$$j \leq \eta \leq j + d,$$

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} M[\partial(T_i \cap S_\eta)] \leq c(j, d),$$

$$M[\partial(T_{i'} \cap S_\eta)] \leq c(j, d).$$

Le correnti $T_{i'} \cap S_\eta$ stanno nell'insieme

$$I_k(\bar{S}_\eta) \cap \{T : M(T) \leq \alpha(S_\eta), M(\partial T) \leq c(j, d)\}$$

che è compatto per il teorema 8.13 di [3]. Esiste quindi una sottosuccessione $\{T_{i''}\}$ di $\{T_{i'}\}$ tale che $\{T_{i''} \cap S_\eta\}$ sia convergente.

Ponendo ora $j=1$ si trova, col ragionamento precedente, una sottosuccessione $\{T_{i,1}\}$ di $\{T_i\}$ che converge in S_1 ; per $j=2$ si può estrarre da $\{T_{i,1}\}$ una sottosuccessione convergente in S_2 ; e così via. La successione $\{T_{j,j}\}$ è (debolmente) convergente in tutto R^n ; si verifica subito che la corrente limite sta in Z . c.v.d.

TEOREMA 3. « Sia $X \in I'_k(R^n)$, $k < n$, $\partial X = 0$, $M(X) < +\infty$. Allora esiste una corrente $Y \in I'_{k+1}(R^n)$ tale che $\partial Y = X$ e $M(Y) \leq cM(X)^{(k+1)/k}$, ove c è una costante che dipende solo da k e da n ».

Dal teorema 3.10 di [3] segue:

$$\int_0^{+\infty} M[\partial(X \cap S_t)] dt = M(X)$$

pertanto esiste una successione di numeri reali $\{t_m\}$ tale che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = +\infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} M[\partial(X \cap S_{t_m})] = 0.$$

Si ha:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X \cap S_{t_m} = X, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} M(X \cap S_{t_m}) = M(X),$$

$$\partial(X \cap S_{t_m}) \in I_{k-1}(R^n), \quad \partial[\partial(X \cap S_{t_m})] = 0.$$

Dal teorema 6.2 di [3] segue l'esistenza di correnti Q_m tali che:

$$Q_m \in I_k(R^n), \quad \partial Q_m = \partial(X \cap S_{t_m}),$$

$$M(Q_m) \leq c \cdot M[\partial(X \cap S_{t_m})]^{k/(k-1)}$$

e quindi $\lim_{m \rightarrow \infty} M(Q_m) = 0$. Analogamente si trova:

$$X \cap S_{t_m} - Q_m \in I_k(R^n), \quad \partial(X \cap S_{t_m} - Q_m) = 0$$

ed esistono pertanto correnti $Y_m \in I_{k+1}(R^n)$ tali che:

$$\partial Y_m = X \cap S_{t_m} - Q_m,$$

$$M(Y_m) \leq c \cdot M(X \cap S_{t_m} - Q_m)^{(k+1)/k} \leq c \cdot \{M(X \cap S_{t_m})^{(k+1)/k} + M(Q_m)^{(k+1)/k}\}.$$

Si verifica subito che la successione $\{Y_m\}$ sta in un insieme del tipo

$$I'_{k+1}(R^n) \cap \{T : M(T) \leq a, \quad M(\partial T) \leq b\}$$

che è compatto per il teorema precedente; esiste quindi una sottosuccessione $\{Y_{m'}\}$ di $\{Y_m\}$ convergente ad una corrente $Y \in I'_{k+1}(R^n)$. Risulta:

$$M(Y) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} M(Y_m) \leq$$

$$\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} c \cdot \{M(X \cap S_{t_m})^{(k+1)/k} + M(Q_m)^{(k+1)/k}\} \leq c \cdot M(X)^{(k+1)/k},$$

$$\partial Y = \lim_{m' \rightarrow \infty} \partial Y_{m'} = \lim_{m \rightarrow \infty} (X \cap S_{t_m} - Q_m) = X.$$

c.v.d.

TEOREMA 4. « Sia $T_0 \in I'_k(R^n)$, $M(\partial T_0) < +\infty$, L un insieme chiuso di R^n . Posto

$$W = I'_k(R^n) \cap \{T : \text{spt} \partial(T - T_0) \subset L\}$$

esiste una corrente $\tilde{T} \in W$ tale che

$$M(\partial \tilde{T}) \leq M(\partial T) \quad \text{per ogni} \quad T \in W \text{ »}.$$

Posto $\xi = \inf \{M(\partial T) : T \in W\}$, sia $\{T_i\}$ una successione di correnti

di W tale che:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M(\partial T_i) = \xi, \quad M(\partial T_i) \leq c < +\infty.$$

Allora le correnti $\{\partial T_i\}$ stanno nell'insieme

$$I'_{k-1}(R^n) \cap \{T : M(T) \leq c, \quad \partial T = 0\}$$

che è compatto per il teorema 2. Esiste quindi una corrente X limite di una sottosuccessione di $\{\partial T_i\}$.

Si ha:

$$M(X) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} M(\partial T_i) = \xi, \quad \partial X = 0, \quad \text{spt}(\partial T_0 - X) \subset L.$$

Per il teorema 3 esiste una corrente $\tilde{T} \in I'_k(R^n)$ tale che $\partial \tilde{T} = X$; risulta $\tilde{T} \in W$ e $M(\partial \tilde{T}) = \xi$.

c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DE GIORGI E.: *Frontiere orientate di misura minima*, Editrice tecnico-scientifica, Pisa, 1961.
- [2] MUSMECI R.: *Estensione di un teorema sull'esistenza di un insieme di perimetro minimo*, Lincei, Rend. sc. fis. mat. nat. vol. 32 (1962), pag. 852-856.
- [3] FEDERER H., FLEMING W.: *Normal and integral currents*, Annals of math. (2), vol. 72 (1960), pag. 458-560.
- [4] FEDERER H.: *Some theorems on integral currents*, Trans. Am. Math. Soc. vol. 117 (1965), pag. 43-67.

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 gennaio 1969.