Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Maurizio Emaldi

Sui gruppi risolubili complementati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 42 (1969), p. 123-128

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1969__42__123_0>

SUI GRUPPI RISOLUBILI COMPLEMENTATI

di MAURIZIO EMALDI *)

In un Gruppo G un sottogruppo K si dice *complemento* di un sottogruppo H quando $G = H \cup K$ e $H \cap K = 1$. Un gruppo si dice *complementato* quando in esso ogni sottogruppo ammette un complemento. Invece un gruppo in cui ogni sottogruppo ammette un complemento con cui è permutabile si dice *completamente fattorizzabile.* Una caratterizzazione dei gruppi finiti risolubili complementati è stata data da Zacher in [11]. Caratterizzazioni dei gruppi completamente fattorizzabili sono state date, nel caso finito, da Hall in [8] e, nel caso generale, da Cernikov in [4] e dalla Cernikova in [3]. Nella presente nota si estendono ai gruppi infiniti alcuni risultati contenuti nel citato lavoro di Zacher. Lo stesso problema è stato considerato da Ene in [7].

1

Mediante la relazione di Dedekind si riconosce facilmente che:

(1.1) *Se N è un sottogruppo normale del Gruppo G e se H è un sottogruppo di G che contiene N, allora per ogni complemento C di N in G, l'intersezione $H \cap C$ è un complemento di N in H, normale in G se H è abeliano e normale in G.*

Non è difficile riconoscere che:

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, 35100 Padova.

(1.2) *Se N è un sottogruppo normale del gruppo complementato G, allora il gruppo-fattoriale G/N è pure complementato.*

Ricorrendo alla caratterizzazione del sottogruppo di Frattini quale insieme dei « non-generatori » ([9] vol. II, pag. 217), si verifica pure facilmente che:

(1.3) *Un gruppo complementato ha il sottogruppo di Frattini identico.*

Dimostriamo ora che:

(1.4) *Se N è un sottogruppo normale abeliano non identico del gruppo complementato G, allora N risulta unione di sottogruppi normali minimi di G.*

DIM. Anzi tutto dimostriamo che se T è un sottogruppo normale non identico di G contenuto in N, allora T contiene sottogruppi normali minimi di G. Infatti per (1.3) esiste in G almeno un sottogruppo massimo M tale che $M \cap T$ non contiene T. Poiché $M \cap T$ è normale in M e in T, esso è normale in $MT = G$. Per (1.1) esiste allora un complemento P di $M \cap T$ in T, con P normale non identico in G. Sia ora L un sottogruppo normale non identico di G contenuto in P. Risultando $P \cap M = 1 = L \cap M$ e $PM = G = LM$, si ha $L = P$ e, di conseguenza, P è un sottogruppo normale minimo di G. Premesso questo, sia H l'unione di tutti i sottogruppi normali minimi di G contenuti in N. Per (1.1) esiste un complemento F di H in N, con F normale in G. Se ora F non fosse identico, per quanto premesso F conterebbe sottogruppi normali minimi di G che non sarebbero contenuti in H. Pertanto, attesa la definizione di H, $F = 1$ e $H = N$.

In analogia a un teorema sui moduli semi-semplici ([5], pag. 61) si riconosce agevolmente che:

(1.5) *Se il sottogruppo N del gruppo G è unione di sottogruppi normali minimi di G e se P è un sottogruppo normale di G contenuto in N, allora esiste un complemento Q di P in N, con Q normale in G.*

Dimostriamo ancora che:

(1.6) *Se il gruppo G contiene un sottogruppo normale abeliano N tale che:*

a) *N è unione di sottogruppi normali minimi di G,*

b) *G si spezza* [1]) *sopra N,*

c) *G/N è complementato,*

allora G è complementato.

DIM. Per *b*), *c*) e (1.2) N ammette un complemento C in G, con C gruppo complementato. Sia H un sottogruppo qualsiasi di G. Indicato con K un complemento di $H \cap C$ in C, risulta $H \cap K = 1$ e $H \cup K = H \cup ((H \cap C) \cup K) = H \cup C \geqq C$. Poniamo $F = H \cup K$ e $L = F \cap N$. Allora L risulta normale in F e in N e, quindi, in $NF = NC = G$. Per *a*) e (1.5) esiste allora un complemento M di L in N, con M normale in G. Consideriamo il sottogruppo MK *di* G e dimostriamo che esso è un complemento di H in G. Intanto si ha $H \cup MK = FM = (FL)M = NF \geqq NC = G$. Sia poi h un elemento qualsiasi di $H \cap MK$. Allora $h = mk$ con m in M e k in K. Poiché M è normale in G, $k^{-1}h = k^{-1}mk$ è in M e quindi in $M \cap F = 1$. Allora $h = k$ e, quindi, $h = 1$. Dunque $H \cap MK = 1$.

Inoltre ([2], pag. 385) si ha che:

(1.7) *Se il gruppo G induce un gruppo localmente finito* [2]) *di automorfismi sul suo sottogruppo normale minimo abeliano N, allora N è un gruppo periodico.*

Ricordiamo infine ([3], pag 274) che:

(1.8) *Il gruppo non identico G è completamente fattorizzabile se, e solo se, G contiene un sottogruppo normale abeliano N tale che:*

a) *N è prodotto diretto di sottogruppi normali ciclici di ordine primo di G,*

b) *G si spezza sopra N,*

c) *G/N è prodotto diretto di sottogruppi ciclici di ordine primo.*

---

[1]) Per la definizione vedasi ([9] vol. II, pag. 149).
[2]) Per la definizione vedasi ([9] vol. II, pag. 153).

2

(2.1) TEOREMA. *Un gruppo risolubile complementato è un gruppo periodico.*

DIM. Sia $G=G^{(0)}\geqq G^{(1)}\geqq \dots \geqq G^{(n-1)}\geqq G^{(n)}=1$ la serie derivata del gruppo risolubile complementato G e procediamo facendo induzione sulla lunghezza di tale serie. Sia $n=1$. Allora il teorema è vero in quanto per (1.1) G risulta prodotto diretto di sottogruppi ciclici di ordine primo. Sia $n>1$. Per (1.4) $G^{(n-1)}$ risulta unione di sottogruppi normali minimi di G. Sia allora T un sottogruppo normale minimo di G contenunto in $G^{(n-1)}$. Indicato con $C_G(T)$ il centralizzante di T in G, per (1.2) $G/C_G(T)$ è risolubile complementato. Siccome $G^{(n-1)}\leqq C_G(T)$, per l'ipotesi di induzione, $G/C_G(T)$ è periodico. Ma allora per (1.7) T è pure periodico. Ne segue che $G^{(n-1)}$ è periodico. Siccome per l'ipotesi di induzione pure $G/G^{(n-1)}$ è periodico a causa della (1.2), anche G risulta periodico.

(2.2) TEOREMA. *Il gruppo non identico risolubile G è complementato se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

a) l'unione N di tutti i sottogruppi normali nilpotenti di G coincide con la unione di tutti i sottogruppi normali minimi di G,

b) G si spezza sopra N,

c) G/N è complementato.

DIM. La sufficienza della condizione segue da (1.6). La condizione è anche necessaria. Infatti la *a*) segue da (1.4) e dal fatto che per (1.1) ogni sottogruppo normale nilpotente di G è abeliano; la *b*) segue dalla definizione di gruppo complementato; la *c*) segue da (1.2).

(2.3) COROLLARIO. *Il gruppo non identico risolubile G è complementato se, e solo se, G risulta prodotto di $t\geqq 1$ sottogruppi abeliani a due a due permutabili, $G=N_1N_2 \dots N_t$, tali che:*

a) $N_i \cap (N_{i+1} \dots N_t)=1$ per $i=1, 2, \dots, t-1$,

b) N_i è l'unione di tutti i sottogruppi normali nilpotenti di $N_iN_{i+1} \dots N_t$ e coincide con l'unione di tutti i sottogruppi normali minimi di $N_iN_{i+1} \dots N_t$ per $i=1, 2, \dots, t$.

(2.4) TEOREMA. *Il gruppo non identico G è risolubile complementato se, e solo se, G possiede una serie ascendente invariante* [3]) *finita a fattori abeliani* $1=F_0 \leqq F_1 \leqq \ldots \leqq F_r = G$ *tale che:*

a) F_i/F_{i-1} *è l'unione di tutti i sottogruppi normali nilpotenti di* G/F_{i-1} *e coincide con l'unione di tutti i sottogruppi normali minimi* G/F_{i-1} *per* $i=1, 2, \ldots, r$,

b) G/F_{i-1} *si spezza sopra* F_i/F_{i-1} *per* $i=1, 2, \ldots, r$.

DIM. La condizione è necessaria. Per dimostrare questo facciamo induzione sulla lunghezza della serie derivata di G. Se la serie derivata di G ha lunghezza uno, allora l'affermazione è vera in quanto per (1.1) G risulta prodotto diretto di sottogruppi ciclici di ordine primo. Supponiamo ora che la serie derivata di G abbia lunghezza maggiore di uno e indichiamo con F l'unione di tutti i sottogruppi normali nilpotenti di G. Allora per (1.1) e (1.4) F_1 risulta unione di sottogrppi normali minimi di G. Inoltre G si spezza sopra F_1. Ora la serie derivata di G/F_1 ha lunghezza minore di quella di G e quindi, per (1.2) e per l'ipotesi di induzione, G/F_1 possiede una serie ascendente invariante finita a fattori abeliani $F_1/F_1 \leqq F_2/F_1 \leqq \ldots \leqq F_r/F_1 = G/F_1$ soddisfacente alle condizioni *a*) e *b*). Ma allora la serie di sottogruppi $1=F_0 \leqq F_1 \leqq \ldots \leqq F_r = G$ è una serie ascendente invariante finita a fattori abeliani di G soddisfacente alle condizioni *a* e *b*).

La condizione è anche sufficiente. Per questo facciamo induzione sulla lunghezza r della serie ipotizzata. Per $r=1$ l'affermazione è vera in quanto per *a*) G risulta prodotto diretto di sottogruppi ciclici di ordine primo. Supponiamo $r>1$ e consideriamo G/F_1. Per G/F_1 valgono le condizioni *a*) e *b*) e quindi, per l'ipotesi di induzione, G/F_1 è un gruppo risolubile complementato. Ma allora per (1.6) pure G è risulbile complementato.

OSSERVAZIONE. Il teorema ora dimostrato fornisce anche una caratterizzazione dei nC-gruppi risolubili, in base a un risultato di Napolitani [10]. E non è difficile riconoscere mediante il teorema (2.2) il risultato di Curzio [6] che un gruppo risolubile complementato con condizione massimale per i sottogruppi è finito.

---

[3]) Per la definizione vedasi ([9] vol. II, pag. 173).

(2.5) TEOREMA. *Il gruppo non identico G è completamente fattorizzabile se, e solo se, G è complementato e possiede una serie ascendente invariante a fattori ciclici.*

DIM. La necessità della condizione segue da (1.8). La condizione è anche sufficiente. Infatti per (1.1) G è periodico. Inoltre G' è uno ZA-gruppo [4]) ([1], pag. 21) e quindi per (1.1) esso è abeliano. Per (1.4) G' risulta allora prodotto diretto di sottogruppo normali ciclici di ordine primo di G. Per (1.2) G/G' risulta prodotto diretto di sottogruppi ciclici di ordine primo. Ma allora per (1.8) G è completamente fattorizzabile.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAER R: *Supersoluble groups,* Proc. Amer. Math. 6 (1955) 16-32.

[2] BAER R.: *Irreducible groups of automorphisms of abelian groups,* Pacific J. Math. 14 (1964), 385-406.

[3] CERNIKOVA N. V.: *Gruppi con sottogruppi complementati,* Mat. Sbornik, N. S. 39 (1956), 273-292.

[4] CERNIKOV S. N.: *Gruppi con sistemi di sottogruppi complementati,* Mat. Sbornik, N. S. 35 (1954), 93-128.

[5] CHEVALLEY C.: *Fundamental concepts of algebra,* Academic Press, New York, (1960).

[6] CURZIO M.: *Alcuni criteri di finitezza per i gruppi a condizione massimale.* Ricerche di Mat. Univ. Napoli, 9 (1960), 248-254.

[7] ENE D.: *Sui* K*-gruppi infiniti.* Studii si Cecertari Mat. 4, 15 (1964), 455-458.

[8] HALL P.: *Complemented groups,* Journ. London Math. Soc. 12 (1937), 201-204.

[9] KUROSH A. G.: *The theory of groups,* Chelsea, New York, (1960).

[10] NAPOLITANI F.: *Sui gruppi risolubili complementati,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 38 (1967), 118-120.

[11] ZACHER G.: *Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 22 (1953), 111-122.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° settembre 1968.

---

4) Per la definizione vedasi ([9] vol. II, pag. 218).