BERNHARD AMBERG

Gruppentheoretische Eigenschaften und Normalisatorbedingungen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 97-118

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__97_0>

GRUPPENTHEORETISCHE EIGENSCHAFTEN UND NORMALISATORBEDINGUNGEN

BERNHARD AMBERG *)

Die Begriffe der hyperabelschen, der hyperzyklischen und der hyperzentralen Gruppen lassen sich durch die folgenden Definitionen verallgemeinern :

Ist θ eine Klasse von geordneten Paaren $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ gruppentheoretischer Eigenschaften $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$, so heisst der Normalteiler N der Gruppe G ein θ-Normalteiler von G, in Zeichen $N\theta G$, wenn es ein Element $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ in θ gibt derart, dass N eine $\mathfrak{e}$-Gruppe und $G/\mathfrak{c}_G N$ eine $\mathfrak{f}$-Gruppe ist. Die Gruppe G heisst hyper-θ-Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen θ-Normalteiler besitzt.

Die Klasse θ bestehe nun insbesondere aus nur einem Element. Ferner sei $\mathfrak{u}$ die universelle Eigenschaft, Gruppe zu sein. Ist $\mathfrak{a}$ die Klasse der abelschen Gruppen, so ist hyper-$(\mathfrak{a}, \mathfrak{u})$ die Klasse der hyperabelschen Gruppen ; ist $\mathfrak{z}$ die Klasse der zyklischen Gruppen, so ist hyper-$(\mathfrak{z}, \mathfrak{u})$ die Klasse der hyperzyklischen Gruppen ; ist $\mathfrak{t}$ die triviale Gruppenklasse, so ist hyper-$(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ die Klasse der hyperzentralen Gruppen.

Hyperabelsche, hyperzyklische und hyperzentrale Gruppen lassen sich — unter Voraussetzung gewisser Endlichkeitsbedingungen — durch Forderungen charakterisieren, dass Untergruppen in irgendeinem Sinn « häufig » von ihrem Normalisator verschieden sind [vgl.

*) Indirizzo dell'A. : Mathematisches Seminar der Universität, 6 Frankfurt am Main, Robert-Mayer-Strasse 6-8.

R. BAER [4] und [5], B. I. PLOTKIN und K. A. HIRSCH]. Diese Tatsachen legen die Aufgabe nahe, die von einer gegebenen Klasse θ von geordneten Paaren gruppentheoretischer Eigenschaften abgeleitete Eigenschaft hyper-θ durch ähnliche «Normalisatorbedingungen» zu charakterisieren.

An die Klasse θ wird im allgemeinen die folgende Forderung gestellt:

(*) Ist $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ ein Element aus θ, so sind Faktoren von $\mathfrak{e}$-Gruppen bzw. $\mathfrak{f}$-Gruppen selber $\mathfrak{e}$-Gruppen bzw. $\mathfrak{f}$-Gruppen.

Der folgende Satz enthält eine Charakterisierung von hyper θ-Gruppen, die der Maximalbedingung für Untergruppen genügen.

SATZ: Genügt die Klasse θ der Forderung (*), sind alle zyklischen Gruppen hyper-θ-Gruppen, sind Erweiterungen von hyper-θ-Gruppen durch hyper-θ-Gruppen selber hyper-θ-Gruppen, besitzt die Gruppe G eine maximale hyper-θ-Untergruppe, so ist G dann und nur dann eine hyper-θ-Gruppe, wenn gilt:

(+) Ist $X = \mathfrak{n}_G X$ eine echte Untergruppe von G, so gibt es eine Untergruppe Y von G mit

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY}\, \theta\, XY/X_{XY}.$$

(vgl. Satz 2.1).

Ähnliche Kriterien kann man für artinsche Gruppen (= Gruppen mit Minimalbedingung für Untergruppen) beweisen (vgl. Satz 3.1 und Folgerung 3.6). Die in diesen Sätzen enthaltenen Voraussetzungen an die Klasse θ können für artinsche und auflösbare Gruppen erheblich abgeschwächt werden. Hier gilt der

SATZ: Genügt die Klasse θ der Forderung (*), sind zyklische Gruppen von Primzahlordnung hyper-θ-Gruppen, sind hyper-θ-Gruppen auflösbar, so ist die artinsche Gruppe G dann und nur dann eine hyper-θ-Gruppe, wenn gilt:

Ist die maximale Untergruppe X der Untergruppe U von G kein Normalteiler von U, so gibt es einen Normalteiler Y von U

mit den folgenden Eigenschaften:

$$U = XY, \quad X_U \subseteq Y, \quad Y/X_U \; \theta \; U/X_U.$$

(vgl. Satz 3.8).

Es konnte nicht entschieden werden, inwieweit die in diesen Sätzen enthaltenen Voraussetzungen an die Klasse θ abschwächbar sind. Es lässt sich aber zeigen, dass unter der Voraussetzung (*) eine Gruppe G dann und nur dann eine hyper-θ-Gruppe ist, wenn sie einer Verschärfung der Bedingung (+) genügt (vgl. Satz 1.8).

Diese Arbeit ist auf Anregung von Herrn Professor Dr. Reinhold Baer entstanden. Ihm und Herrn Privatdozent Dr. Otto Kegel danke ich herzlich für ihre Unterstützung.

BEZEICHNUNGEN

$\{...\}$ = von den eingeschlossenen Elementemengen erzeugte Untergruppe

$\mathfrak{n}_Y X$ = Normalisator der Untergruppe X der Gruppe Y in Y

$\mathfrak{c}_Y X$ = Zentralisator von X in Y

X^Y = Menge aller x^y mit x aus X, y aus Y

X_Y = Produkt aller in X enthaltenen Normalteiler von Y

$X \subset Y$ = X ist echte Untergruppe von Y

$|Y:X|$ = Index von X in Y

$X \circ M$ = Menge aller $x^{-1} m^{-1} xm$ mit x aus X, m aus der Teilmenge M von Y

ΦY = Frattiniuntergruppe von Y

$A \times B$ = Direktes Produkt der Gruppen A und B

Faktor = epimorphes Bild einer Untergruppe

auflösbare Gruppe = Gruppe, deren Ableitungen fast alle trivial sind

fastabelsche Gruppe = Gruppe, die einen abelschen Normalteiler mit endlichem Index enthält

artinsche Gruppe = Gruppe mit Minimalbedingung für Untergruppen

$\mathfrak{e}$-Gruppe = Gruppe mit der Eigenschaft $\mathfrak{e}$

Die Eigenschaft $\mathfrak{e}$ vererbt sich auf Untergruppen [Normalteiler/epimorphe Bilder], wenn Untergruppen [Normalteiler/epimorphe Bilder] von $\mathfrak{e}$-Gruppen selber $\mathfrak{e}$-Grupenp sind.

1. Es sei θ eine Klasse von geordneten Paaren $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ gruppentheoretischer Eigenschaften $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$. Die Klasse aller gruppentheoretischen Eigenschaften $\mathfrak{e}$, für die es eine gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{f}$ gibt, so dass $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ aus θ ist, heisst *erste Komponente* θ_1 von θ. Entsprechend ist die *zweite Komponente* θ_2 von θ definiert. Eine Komponente θ_i von θ hat die Eigenschaft $\mathfrak{w}$ oder erfüllt die Aussage $\mathfrak{W}$, wenn jedes $\mathfrak{e}$ in θ_i die Eigenschaft $\mathfrak{w}$ hat oder die Aussage $\mathfrak{W}$ erfüllt. Zum Beispiel vererbt sich θ_i auf Untergruppen [epimorphe Bilder], wenn für jedes $\mathfrak{e}$ in θ_i Untergruppen [epimorphe Bilder] von $\mathfrak{e}$-Gruppen selber $\mathfrak{e}$-Gruppen sind. Ebenso hat θ die Eigenschaft $\mathfrak{w}$ oder erfüllt die Aussage $\mathfrak{W}$, wenn dies von den beiden Komponenten von θ gilt.

Der Normalteiler N der Gruppe G heisst *θ-Normalteiler* von G, in Zeichen $N\theta G$, wenn es ein Paar $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ in θ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(a) N ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe,

(b) $G/\mathfrak{c}_G N$ ist eine $\mathfrak{f}$-Gruppe.

Es ist klar, dass $G/\mathfrak{c}_G N$ im wesentlichen mit der von G in N induzierten Automorphismengruppe übereinstimmt. Die Gruppe G heisst *θ-Gruppe*, wenn $G\theta G$ gilt.

LEMMA 1.1 : *Es seien N, M, K Normalteiler der Gruppe G mit $M \subseteq K$.*

(a) *Ist $K \subseteq N$, so ist dann und nur dann $N/K\,\theta\, G/K$, wenn $(N/M)/(K/M)\,\theta\,(G/M)/(K/M)$ gilt.*

Es ist dann und nur dann $NM/M\theta G/M$, wenn $N/(N\cap M)\theta G/(N\cap M)$ gilt.

(b) *Vererbt sich θ auf epimorphe Bilder, so folgt aus $N\theta G$, dass auch $NM/M\,\theta\, G/M$ gilt.*

(c) *Vererbt sich die zweite Komponente von θ auf Untergruppen und ist U eine N enthaltende Untergruppe von G, so folgt aus $N\theta G$, dass auch $N\theta U$ gilt.*

(d) *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf Normalteiler und die zweite Komponente von θ auf Faktoren, so folgt für jeden in N enthaltenen Normalteiler L der Untergruppe U von G aus $N\theta G$, dass auch $L\theta U$ gilt.*

(*e*) *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf Faktoren und die zweite Komponente von θ auf epimorphe Bilder, so folgt aus $N\theta G$ für zwei in N enthaltene Normalteiler R und S von G, dass auch $RS/S\,\theta\, G/S$ gilt.*

BEWEIS: Sind X und Y Normalteiler der Gruppe G mit $X \subseteq Y$, so versteht man unter dem Kommutatorquotienten $X \div Y$ von X und Y die Menge aller Elemente g aus G, für die $Y \circ g \subseteq X$ gilt. $X \div Y$ ist ein Normalteiler von G, und es ist $(X \div Y)/X = \mathfrak{c}_{G/X}(Y/X)$, so dass $G/(X \div Y)$ im wesentlichen mit der von G/X in Y/X induzierten Automorphismengruppe übereinstimmt.

(*a*): Es ist N/K genau dann eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, wenn $(N/M)/(K/M)$ eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Da der Normalteiler M von G in N und K enthalten ist, ist $(K \div N)/M = (K/M) \div (N/M)$ und damit

$$G/(K \div N) \simeq (G/M)/((K \div N)/M) = (G/M)/((K/M) \div (N/M)),$$

so dass die von G/K in N/K induzierte Automorphismengruppe zu der von $(G/M)/(K/M)$ in $(N/M)/(K/M)$ induzierten Automorphismengruppe isomorph ist. Hieraus folgt die erste Behauptung von (*a*).

Es ist genau dann NM/M eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, wenn $N/(N \cap M)$ eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Ferner ist $M \div NM = (N \cap M) \div N$ und damit

$$G/(M \div NM) = G/((N \cap M) \div N),$$

so dass die von G/M in NM/M induzierte Automorphismengruppe im wesentlichen mit der von $G/(N \cap M)$ in $N/(N \cap M)$ induzierten Automorphismengruppe übereinstimmt.

Für das folgende sei $N\theta G$ vorausgesetzt. Dann gibt es also ein Paar $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ in θ derart, dass N eine $\mathfrak{e}$-Gruppe und $G/\mathfrak{c}_G N$ eine $\mathfrak{f}$-Gruppe ist.

(*b*) Mit N ist auch das epimorphe Bild $NM/M \simeq N/(N \cap M)$ von N eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Ferner ist $\mathfrak{c}_G N$ in $M \div NM$ enthalten, und $G/(M \div NM)$ ist ein epimorphes Bild von $G/\mathfrak{c}_G N$ und daher ebenfalls eine $\mathfrak{f}$-Gruppe. Also gilt $NM/M\theta G/M$, und (*b*) ist bewiesen.

(*c*): Es ist $U/(\mathfrak{c}_G N \cap U) \simeq U\mathfrak{c}_G N/\mathfrak{c}_G N$ eine Untergruppe von $G/\mathfrak{c}_G N$, und daher ist nach Voraussetzung auch $U/(\mathfrak{c}_G N \cap U) = U/\mathfrak{c}_U N$ eine $\mathfrak{f}$-Gruppe. Also gilt $N\theta U$, und (*c*) ist bewiesen.

(d): Mit N ist nach Voraussetzung auch der Normalteiler L von N eine $\mathfrak{E}$-Gruppe. Aus (c) folgt, dass mit $G/\mathfrak{c}_G N$ auch $U/\mathfrak{c}_U N$ eine $\mathfrak{f}$-Gruppe ist. Wegen $\mathfrak{c}_U N \subseteq \mathfrak{c}_U L$ ist $U/\mathfrak{c}_U L$ ein epimorphes Bild von $U/\mathfrak{c}_U N$, und daher ist $U/\mathfrak{c}_U L$ ebenfalls eine $\mathfrak{f}$-Gruppe. Also gilt $L\theta U$, und (d) ist bewiesen.

(e): Als Faktor von N ist nach Voraussetzung auch RS/S eine $\mathfrak{E}$-Gruppe. Aus $R \subseteq N$ folgt $\mathfrak{c}_G N \subseteq \mathfrak{c}_G R$. Daher ist $G/\mathfrak{c}_G R$ als epimorphes Bild von $G/\mathfrak{c}_G N$ eine $\mathfrak{f}$-Gruppe. Also gilt $R\theta G$. Anwendung von (b) ergibt $RS/S\ \theta\ G/S$, so dass auch (e) bewiesen ist.

Definition: Eine Gruppe heisst *hyper-θ-Gruppe*, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen θ-Normalteiler besitzt.

Lemma 1.2: *Ist die Gruppe G Produkt von [endlich oder unendlich vielen] sich gegenseitig zentralisierenden Normalteilern, die sämtlich hyper-θ-Gruppen sind, so ist G selbst eine hyper-θ-Gruppe.*

Beweis: Die Gruppe G sei Produkt einer Menge $\mathfrak{M}$ von Normalteilern, die sämtlich hyper-θ-Gruppen sind. Ist σ ein Epimorphismus von G auf $H \neq 1$, so ist H das Produkt der Normalteiler X^σ für X aus $\mathfrak{M}$. Wenn sich die Normalteiler X aus $\mathfrak{M}$ paarweise gegenseitig zentralisieren, so zentralisieren sich auch die Normalteiler X^σ von H für X aus $\mathfrak{M}$ paarweise gegenseitig. Aus $H \neq 1$ folgt $X^{*\sigma} \neq 1$ für wenigstens ein X^* aus $\mathfrak{M}$. Da X^* eine hyper-θ-Gruppe ist, gibt es also einen θ-Normalteiler $Y \neq 1$ von $X^{*\sigma}$. Da die übrigen X^σ den Normalteiler $X^{*\sigma}$ von H zentralisieren, ist Y auch ein Normalteiler von H, und die von H in Y induzierte Automorphismengruppe ist mit der von $X^{*\sigma}$ in Y induzierten Automorphismengruppe identisch. Es folgt, dass Y ein von 1 verschiedener θ-Normalteiler von H ist. Damit ist gezeigt, dass G eine hyper-θ-Gruppe ist.

Anmerkung: Aus Lemma 1.2 folgt, dass direkte Produkte von [beliebig vielen] hyper-θ-Gruppen selber hyper-θ-Gruppen sind.

Dagegen sind cartesische Produkte von hyper-θ-Gruppen bekanntlich im allgemeinen nicht wieder hyper-θ-Gruppen.

LEMMA 1.3 : (*a*) *Vererbt sich die erste Komponente von* θ *auf Untergruppen und die zweite Komponente von* θ *auf Faktoren, so gibt es zu jedem Normalteiler* $N \neq 1$ *der hyper-*θ*-Gruppe* G *einen* θ*-Normalteiler* E *von* G *mit* $1 \subset E \subseteq N$.

(*b*) *Vererbt sich* θ *auf Faktoren, so ist jeder Faktor einer hyper-*θ*-Gruppe ebenfalls eine hyper-*θ*-Gruppe.*

BEWEIS : Der Beweis von (*a*) verläuft im wesentlichen wie der Beweis von R. BAER [3], p. 17, Lemma 3.2. Der Beweis von (*b*) wird im wesentlichen wie der Beweis von R. BAER [2], p. 358, Satz 4.4 (*a*), geführt.

FOLGERUNG 1.4 : *Vererbt sich die erste Komponente von* θ *auf Untergruppen und die zweite Komponente von* θ *auf Faktoren, so ist die Gruppe* G *dann und nur dann eine hyper-*θ*-Gruppe, wenn gilt :*

Sind R *und* S *zwei Normalteiler von* G *mit* $S \subset R$, *so gibt es einen Normalteiler* N *von* G *mit* $S \subset N \subseteq R$ *und* $N/S\,\theta\, G/S$.

BEWEIS : Dies ergibt sich sofort aus Lemma 1.3 (*a*) und der Definition der hyper-θ-Gruppe.

HILFSATZ 1.5 : *Jede der beiden folgenden gruppentheoretischen Eigenschaften vererbt sich auf epimorphe Bilder* :

(+) *Zu jeder echten Untergruppe* $X = \mathfrak{n}_G X$ *der Gruppe* G *gibt es eine Untergruppe* Y *von* G *mit*

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY}\,\theta\, XY/X_{XY}.$$

(++) *Zu jeder maximalen Untergruppe* X *der Gruppe* G, *die kein Normalteiler von* G *ist, gibt es einen Normalteiler* Y *von* G *mit*

$$G = XY, \quad X_G \subseteq Y, \quad Y/X_G\,\theta\, G/X_G.$$

BEWEIS : Ist $A = \mathfrak{n}_H A$ eine echte Untergruppe des epimorphen Bildes H der (+) erfüllenden Gruppe G, ist weiter σ ein Epimorphismus von G auf H, so sei X das Urbild von A unter σ. Dann ist $(\mathfrak{n}_G X)^\sigma \subseteq \mathfrak{n}_H A = A$, so dass $\mathfrak{n}_G X$ im Urbild von A enthalten ist. Also wird $X = \mathfrak{n}_G X$, und es gibt wegen (+) eine Untergruppe Y von G mit

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY}\,\theta\, XY/X_{XY}.$$

Ist K der Kern von σ, so ist K ein in X enthaltener Normalteiler von G und damit auch von XY, so dass $K \subseteq X_{XY} \subseteq Y$ gilt. Es sei nun $B = Y^\sigma = Y/K$. Da Y von X normalisiert wird, wird auch B von A normalisiert, so dass $B^A = B$ gilt. Der grösste in X enthaltene Normalteiler von XY wird auf den grössten in A enthaltenen Normalteiler von $\{A, B\} = AB$ abgebildet. Also ist $(X_{XY})^\sigma = A_{AB}$. Da Untergruppen von Y auf Untergruppen von B abgebildet werden, folgt $A_{AB} \subseteq B$. Wäre $B \subseteq A$, also $Y/K \subseteq X/K$, so wäre auch $Y \subseteq X$. Also ist $B \not\subseteq A$. Aus Lemma 1.1 (a) folgt noch, dass auch $B/A_{AB}\,\theta\, AB/A_{AB}$ gilt. Damit sind alle verlangten Bedingungen nachgewiesen. Also vererbt sich (+) auf epimorphe Bilder. Die Epimorphismenvererblichkeit von (++) zeigt man analog.

Hilfssatz 1.6 : (a) *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf epimorphe Bilder und die zweite Komponente von θ auf Faktoren, so gibt es zu jeder echten Untergruppe X der hyper θ-Gruppe G eine Untergruppe Y von G mit*

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY}\,\theta\, XY/X_{XY}.$$

(b) *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf Normalteiler und epimorphe Bilder und die zweite Komponente von θ auf Faktoren, ist X eine echte Untergruppe der hyper-θ-Gruppe G und ist* 1 *der einzige θ-Normalteiler von $\mathfrak{n}_G X/X$, so gibt es eine Untergruppe Y von G mit*

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY}\,\theta\, XY/X_{XY}, \quad Y \cap \mathfrak{n}_G X \subseteq X.$$

Beweis : Es sei X eine echte Untergruppe der hyper-θ-Gruppe G. Wegen $X_G \subseteq X \subset G$ ist X_G ein Normalteiler von G mit von 1 verschiedener Faktorgruppe G/X_G. Also gibt es einen Normalteiler

N von G mit $X_G \subset N$ und $N/X_G \,\theta\, G/X_G$. Da X_G der grösste in X enthaltene Normalteiler von G ist, folgt $N \not\subseteq X$. Aus $\{X, N\} = XN \subseteq G$ folgt $X_G \subseteq X_{XN}$. Ausserdem folgt aus $N/X_G \,\theta\, G/X_G$ wegen der Untergruppenvererblichkeit der zweiten Komponente von θ nach Lemma 1.1 (c) die Beziehung $N/X_G \,\theta\, XN/X_G$. Aus Lemma 1.1 (b) ergibt sich

$$(N/X_G)/((N \cap X_{XN})/X_G) \;\theta\; (XN/X_G)/((N \cap X_{XN})/X_G).$$

Anwendung von Lemma 1.1 (a) ergibt

$$N/(N \cap X_{XN}) \;\theta\; XN/(N \cap X_{XN}) \quad \text{und}$$

$$NX_{XN}/X_{XN} \;\theta\; XN/X_{XN}.$$

Die Untergruppe $Y = NX_{XN}$ wird natürlich von X normalisiert. Aus $N \not\subseteq X$ folgt $Y \not\subseteq X$, und es ist $X_{XY} = X_{XN} \subseteq Y$. Schliesslich gilt noch $Y/X_{XY} \,\theta\, XY/X_{XY}$. Damit ist ($a$) bewiesen.

Der beim Beweis von (a) benutzte Normalteiler N von G erfüllt $N/X_G \,\theta\, G/X_G$. Aus Lemma 1.1 (d) und (b) ergibt sich

$$(N \cap \mathfrak{n}_G X)/X_G \;\theta\; \mathfrak{n}_G X/X_G \quad \text{und} \quad (N \cap \mathfrak{n}_G X)\, X/X \;\theta\; \mathfrak{n}_G X/X.$$

Ist nun 1 der einzige θ-Normalteiler von $\mathfrak{n}_G X/X$, so folgt $(N \cap \mathfrak{n}_G X)\, X \subseteq X$, also $N \cap \mathfrak{n}_G X \subseteq X$. Setzt man wieder $Y = NX_{XN}$, so ist

$$X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y^X = Y, \quad Y/X_{XY} \,\theta\, XY/X_{XY}.$$

Ferner ist nach dem dedekindschen Modulsatz

$$Y \cap \mathfrak{n}_G X = NX_{XN} \cap \mathfrak{n}_G X = X_{XN}(N \cap \mathfrak{n}_G X) \subseteq X.$$

Damit ist auch (b) bewiesen.

FOLGERUNG 1.7: *Vererbt sich θ auf Faktoren, so gibt es zu jeder echten Untergruppe X einer Untergruppe U der hyper-θ-Gruppe G eine Untergruppe Y von U mit*

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY} \,\theta\, XY/X_{XY}.$$

Beweis: Diese Aussage folgt sofort durch Kombination von Lemma 1.3 (*b*) und Hilfssatz 1.6 (*a*).

Die in Hilfssatz 1.6 (*b*) abgeleitete Bedingung gibt bereits eine Charakterisierung der hyper-θ-Gruppen.

Satz 1.8: *Vererbt sich die erste Komponente von θ auf Normalteiler und epimorphe Bilder und die zweite Komponente von θ auf Faktoren, so sind die folgenden Eigenschaften der Gruppe G äquivalent:*
(I) *G ist eine hyper-θ-Gruppe.*
(II) *Ist X eine echte Untergruppe von G und ist 1 der einzige θ-Normalteiler von $\mathfrak{n}_G X/X$, so gibt es eine Untergruppe Y von G mit*

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY}\,\theta\, XY/X_{XY}, \quad Y \cap \mathfrak{n}_G X \subseteq X.$$

(III) *Ist X eine echte Untergruppe von G und ist 1 der einzige θ-Normalteiler von $\mathfrak{n}_G X/X$, so gibt es eine Untergruppe Y von G mit*

$$Y \not\subseteq X \quad \textit{und} \quad Y \cap \mathfrak{n}_G X \subseteq X.$$

Beweis: Es ergibt sich aus Hilfssatz 1.6 (*b*), dass (II) aus (I) folgt. (III) ist eine Abschwächung von (II).

Es werde nun Bedingung (III) von der Gruppe G erfüllt. Angenommen, G ist keine hyper-θ-Gruppe. Dann gibt es einen Normalteiler M von G so, dass 1 der einzige θ-Normalteiler von $G/M = \mathfrak{n}_G M/M$ ist. Aus (II) folgt die Existenz einer Untergruppe Y von G mit $Y = Y \cap G = Y \cap \mathfrak{n}_G M \subseteq X$ und $Y \not\subseteq X$, was nicht sein kann. Also folgt (I) aus (III).

2. Eine Charakterisierung von hyper-θ-Gruppen, die der Maximalbedingung für Untergruppen genügen, ist im folgenden Satz enthalten. Eine gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{w}$ heisst *erweiterungsvererblich*, wenn gilt:

Ist N ein Normalteiler der Gruppe G und sind N und die Faktorgruppe G/N beide $\mathfrak{w}$-Gruppen, so ist auch G eine $\mathfrak{w}$-Gruppe.

Satz 2.1: *Vererbt sich θ auf Faktoren, sind alle zyklischen Gruppen θ-Gruppen, ist hyper-θ erweiterungsvererblich, besitzt die*

Gruppe G eine maximale hyper-θ-Untergruppe, so sind die folgenden Eigenschaften von G äquivalent:

(I) *G ist eine hyper-θ-Gruppe.*

(II) *Ist $X = \mathfrak{n}_G X$ eine echte Untergruppe von G, so gibt es eine Untergruppe Y von G mit*

$$Y^X = Y, \quad X_{XY} \subseteq Y \not\subseteq X, \quad Y/X_{XY}\,\theta\, XY/X_{XY}.$$

Beweis: Es ergibt sich aus Hilfssatz 1.6 (a), dass (II) eine Folge von (I) ist.

G erfülle nun die Bedingung (II). Nach Voraussetzung gibt es eine maximale hyper-θ-Untergruppe M von G. Angenommen, es ist $M \subset G$. Wäre $M \neq \mathfrak{n}_G M$, so gäbe es ein M normalisierendes Element g in G, das nicht in M enthalten ist. Dann ist M ein Normalteiler von $\{M, g\}$ und $\{M, g\}/M \simeq \{g\}/(M \cap \{g\})$ ist zyklisch. Aus den Voraussetzungen folgt, dass dann $\{M, g\}/M$ eine θ-Gruppe und also auch eine hyper-θ-Gruppe ist. Aus der Erweiterungsvererblichkeit der Eigenschaft hyper-θ ergibt sich, dass auch $\{M, g\}$ eine hyper-θ-Gruppe ist, was der Maximalität von M widerspricht. Also ist $M = \mathfrak{n}_G M$ und aus (II) folgt die Existenz einer Untergruppe Y von G mit

$$Y^M = Y, \quad M_{MY} \subseteq Y \not\subseteq M, \quad Y/M_{MY}\,\theta\, MY/M_{MY}.$$

Da sich θ auf Faktoren vererbt, ist mit M auch die Untergruppe M_{MY} von M eine hyper-θ-Gruppe; vgl. Folgerung 1.7. Aus der Erweiterungsvererblichkeit der Eigenschaft hyper-θ folgt dann, dass auch Y eine hyper-θ-Gruppe ist. Nun ist Y ein Normalteiler von MY und $MY/Y \simeq M/(Y \cap M)$ ist als epimorphes Bild einer hyper-θ-Gruppe ebenfalls eine hyper-θ-Gruppe. Dann folgt aus der Erweiterungsvererblichkeit der Eigenschaft hyper-θ, dass auch MY eine hyper-θ-Gruppe ist. Wegen $M \subset MY$ widerspricht dies der Maximalität von M. Aus diesem Widerspruch folgt, dass $G = M$ eine hyper-θ-Gruppe ist. Also folgt auch (I) aus (II).

Bemerkung 2.2: Bedingung (II) von Satz 2.1 wird von allen zyklischen Gruppen erfüllt. Dies zeigt die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung in Satz 2.1, dass zyklische Gruppen θ-Gruppen und also auch hyper-θ-Gruppen sind.

3. Im folgenden werden Gruppen mit Minimalbedingungen betrachtet. Eine gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{w}$ heisst *lokal*, wenn Gruppen, deren endlich erzeugbare Untergruppen $\mathfrak{w}$-Gruppen sind, selbst die Eigenschaft $\mathfrak{w}$ haben.

SATZ 3.1: *Vererbt sich θ auf Faktoren, sind zyklische Gruppen von Primzahlordnung θ-Gruppen, ist hyper-θ erweiterungsvererblich und lokal, so sind die folgenden Eigenschaften der artinschen Gruppe G äquivalent:*

(I) *G ist eine hyper-θ-Gruppe.*

(II) *Ist die maximale Untergruppe X der Untergruppe U von G kein Normalteiler von U, so gibt es einen Normalteiler Y von U mit*

$$U = XY, \quad X_U \subseteq Y, \qquad Y/X_U \,\theta\, U/X_U \,.$$

BEWEIS: Es ergibt sich aus Folgerung 1.7, dass (II) eine Folge von (I) ist.

Es werde nun Bedingung (II) von der Gruppe G erfüllt. Angenommen, G ist keine hyper-θ-Gruppe. Da G artinsch ist, gibt es unter den Untergruppen X von G, die keine hyper-θ-Gruppen sind, eine minimale A mit folgenden Eigenschaften:

(1) A ist keine hyper-θ-Gruppe;

(2) Jede echte Untergruppe von A ist eine hyper-θ-Gruppe.

Angenommen, A ist nicht endlich erzeugbar. Dann ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von A eine echte Untergruppe von A und daher wegen (2) eine hyper-θ-Gruppe. Dann ist also A lokal eine hyper-θ-Gruppe, und es folgt aus der Voraussetzung, dass A selbst eine hyper-θ-Gruppe ist. Dies widerspricht (1), so dass also gilt:

(3) A ist endlich erzeugbar.

Als endlich erzeugbare Gruppe besitzt A maximale Untergruppen. Ist M eine solche, so ist $M \subset A$, und es folgt aus (2), dass M eine hyper-θ-Gruppe ist. Wäre $M \neq \mathfrak{n}_A M$, so wäre M ein Normalteiler von A und A/M wäre frei von eigentlichen Untergruppen, also zyklisch von Primzahlordnung. Nach Voraussetzung ist dann A/M eine θ-Gruppe und daher auch eine hyper-θ-Gruppe. Da Erweiterungen von hyper-θ-Gruppen durch hyper-θ-Gruppen selbst hyper-θ-Gruppen sind, ist also A eine hyper-θ-Gruppe, was (1) widerspricht. Also gilt $M = \mathfrak{n}_A M \subset A$. Aus (II) folgt nun die Existenz eines Normalteilers W von A mit

$$A = WM, \quad M_A \subseteq W, \quad W/M_A \; \theta \; A/M_A .$$

Wegen (2) ist M_A als echte Untergruppe von A eine hyper-θ-Gruppe. Wäre $W = A$, so wäre wegen der Erweiterungsvererblicheit der Eigenschaft hyper-θ auch A eine hyper-θ-Gruppe, was (1) widerspricht. Also ist $W \subset A$, so dass W wegen (2) eine hyper-θ-Gruppe ist. Nun ist mit M auch das epimorphe Bild $A/W = WM/W \simeq \simeq M/(M \cap W)$ von M eine hyper-θ-Gruppe. Aus der Erweiterungsvererblichkeit der Eigenschaft hyper-θ folgt, dass auch A eine hyper-θ-Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch zu (1) ergibt sich, dass auch (I) aus (II) folgt.

Satz 3.2: *Vererbt sich θ auf Faktoren, sind zyklische Gruppen von Primzahlordnung θ-Gruppen, genügen die Normalteiler der Gruppe G der Minimalbedingung und der Maximalbedingung, so sind die folgenden Eigenschaften von G äquivalent:*

(I) *G ist eine hyper-θ-Gruppe.*

(II) (*a*) *Zu jeder maximalen Untergruppe X von G, die kein Normalteiler von G ist, gibt es einen Normalteiler Y von G mit*

$$G = XY, \quad X_G \subseteq Y, \quad Y/X_G \; \theta \; G/X_G .$$

(*b*) *Ist der minimale Normalteiler M des epimorphen Bildes H von G der einzige minimale Normalteiler von H, ist M in der Frattiniuntergruppe ΦH von H enthalten und H/M eine hyper-θ-Gruppe, so ist M ein θ-Normalteiler von H.*

Beweis: Gilt (I), so folgt (II.a) aus Hilfssatz 1.6 (*a*) und (II.*b*) aus Lemma (1.3) (*a*).

Es werde nun Bedingung (II) von der Gruppe G erfüllt. Angenommen, G ist keine hyper-θ-Gruppe. Da sich Bedingung (II) nach Hilfssatz 1.5 auf epimorphe Bilder vererbt, folgt aus der Maximalbedingung für Normalteiler von G die Existenz eines epimorphen Bildes F von G mit folgenden Eigenschaften:

(1) F ist keine hyper-θ-Gruppe; F erfüllt (II).

(2) Jedes echte epimorphe Bild von F ist eine hyper-θ-Gruppe.

Da F keine hyper-θ-Gruppe ist, ist $F \neq 1$ und besitzt nach Voraussetzung minimale Normalteiler. Angenommen, es gibt zwei verschiedene minimale Normalteiler A und B von F. Wegen (2) sind F/A und F/B hyper-θ-Gruppen, und aus Lemma 1.2 folgt, dass auch das direkte Produkt $F/A \times F/B$ eine hyper-θ-Gruppe ist. Nun ist $A \cap B = 1$, und daher ist F einer Untergruppe von $F/A \times F/B$ isomorph. Anwendung von Lemma 1.3 (b) ergibt, dass auch F eine hyper-θ-Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch zu (1) folgt, dass $A = B$ ist. Also gilt:

(3) F besitzt genau einen minimalen Normalteiler M.

Wegen (2) ist F/M eine hyper-θ-Gruppe. Wäre M ein θ-Normalteiler von F, so wäre wegen (2) auch F eine hyper-θ-Gruppe, was (1) widerspricht. Also gilt:

(4) M ist kein θ-Normalteiler von F, doch F/M ist eine hyper-θ-Gruppe.

Wäre M in der Frattiniuntergruppe ΦF von F enthalten, so folgte aus (II.b), dass F eine hyper-θ-Gruppe ist, was (1) widerspricht. Also gilt:

(5) $$M \not\subseteq \Phi F.$$

Wegen (5) ist $\Phi F \neq F$, und es gibt eine maximale Untergruppe S von F mit $M \not\subseteq S$. Ist $S = 1$, so folgt aus der Maximalität von S, dass F zyklisch von Primzahlordnung ist. Nach Voraussetzung ist dann F eine θ-Gruppe, also auch eine hyper-θ-Gruppe. Aus diesem Widerspruch zu (1) folgt $S \neq 1$. Wäre S ein Normalteiler von F, so würde $M \subseteq S$ aus (3) folgen, was der Wahl von S widerspricht. Also ist $S \subseteq \mathfrak{n}_F S \subset F$, und aus der Maximalität von S folgt $S = \mathfrak{n}_F S$. Wegen (II.a) gibt es also einen Normalteiler N von F mit

$$F = SN, \quad S_F \subseteq N, \quad N/S_F \, \theta \, F/S_F.$$

Wäre $S_F \neq 1$, so würde aus (2) $M \subseteq S_F \subseteq S$ folgen, was der Wahl von S widerspricht. Also ist $S_F = 1$, so dass $N = N/S_F$ ein θ-Normalteiler von $F = F/S_F$ ist. Wegen $S \subset F = SN$ ist $N \neq 1$. Nach (3) ist $M \subseteq N$, und aus $N \, \theta \, F$ folgt nach Lemma 1.1 (e) auch $M \, \theta \, F$. Aus diesem Widerspruch zu (4) ergibt sich, dass auch (I) aus (II) folgt.

Bemerkung 3.3: Nach B. Huppert, p. 418, Beispiel 1, gibt es eine endliche, auflösbare Gruppe G mit den folgenden Eigenschaften: G enthält einen Normalteiler P der Ordnung 3^{10}. Die Frattiniuntergruppe $\Phi P = P'$ von P ist elementarabelsch und enthält einen minimalen Normalteiler M von G der Ordnung 3^4. Ist p ein Teiler der Ordnung von G, so sind die Ordnungen der p-Hauptfaktoren von $G/\Phi G$ sämtlich $\leq p^2$.

Es sei nun $\mathfrak{C}$ die folgende Gruppenklasse: $\mathfrak{C}$ enthalte alle endlichen Gruppen, deren Ordnungen 3 nicht als Teiler haben, ferner alle Gruppen der Ordnung 3^2 und alle Untergruppen dieser Gruppen. Die Klasse θ bestehe aus dem Paar $(\mathfrak{C}, \mathfrak{U})$, wobei $\mathfrak{U}$ die universelle Eigenschaft bedeutet. Es ist klar, dass θ die Voraussetzungen von Satz 3.2 erfüllt.

Jede maximale Untergruppe S von G enthält $\Phi P \subseteq \Phi G$. Da die Ordnungen der p-Hauptfaktoren von $G/\Phi G$ sämtlich $\leq p^2$ sind, ist $G/\Phi G$ eine hyper-θ-Gruppe. Hieraus folgt, dass Bedingung (II.a) von Satz 3.2 von $[G/\Phi G$ und$]$ G erfüllt wird; vgl. Folgerung 1.7. Da aber der minimale Normalteiler M von G kein $\mathfrak{C}$-Normalteiler von G ist, ist G keine hyper-θ-Gruppe. Damit ist gezeigt, dass die Bedingung (II.b) in Satz 3.2 unentbehrlich ist.

Bemerkung 3.4: Bedingung (II.b) von Satz 3.2 ist sicher dann erfüllt, wenn eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt ist:

(+) Alle elementarabelschen Primärgruppen sind θ-Gruppen.

(++) Ist $G/\Phi G$ eine hyper-θ-Gruppe, so ist auch G eine hyper-θ-Gruppe.

Die Bedingung (++) bedeutet, dass die Eigenschaft hyper-θ gesättigt (oder vom Frattinityp) ist. Sie wird etwa von den endlichen hyperzentralen, hyperzyklischen und hyperabelschen Gruppen erfüllt.

HILFSSATZ 3.5: *Vererbt sich θ auf Faktoren, so sind die folgenden Eigenschaften der artinschen und fastabelschen Gruppe G äquivalent:*

(I) *G ist eine hyper-θ-Gruppe.*

(II) *Jede endliche Untergruppe von G ist eine hyper-θ-Gruppe.*

(III) *Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild H von G besitzt einen von 1 verschiedenen, endlichen θ-Normalteiler.*

BEWEIS: Wegen Folgerung 1.7 sind Untergruppen von hyper-θ-Gruppen selber hyper-θ-Gruppen, so dass (II) aus (I) folgt.

Als artinsche und fastabelsche Gruppe ist G lokal endlich; vgl. etwa R. BAER [3], p. 7/8, Satz 2.1. Gilt nun (II), so ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine endliche hyper-θ-Gruppe. Es sei nun $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G. Mit G hat auch H folgende Eigenschaften:

(*) H ist artinsch und fastabelsch; jede endlich erzeugbare Untergruppe von H ist eine endliche hyper-θ-Gruppe.

Ist erstens H endlich, so ist H wegen (*) eine hyper-θ-Gruppe, die dann natürlich einen von 1 verschiedenen θ-Normalteiler besitzt. Ist zweitens H unendlich, so sei D der Durchschnitt aller Untergruppen X von H mit endlichem Index $|H:X|$. Da H artinsch ist, ist D eine unendliche, abelsche, charakteristische Untergruppe von H mit endlicher Faktorgruppe H/D, vgl. R. BAER [3], p. 7/8, Satz 2.1. Folglich bilden die Elemente quadratfreier Ordnung in D eine von 1 verschiedene, endliche, charakteristische Untergruppe K von D und also von H, vgl. L. FUCHS, p. 68, 19. Da K und H/D endlich sind, gibt es eine endlich erzeugbare Untergruppe L von H mit $K \subseteq L$ und $H = LD$. Da wegen (*) L eine hyper-θ-Gruppe und K ein Normalteiler von L ist, gibt es nach Lemma 1.3 (a) einen

θ-Normalteiler A von L mit $1 \subset A \subseteq K$. Da D eine abelsche Obergruppe von K und A ist, ist A ein Normalteiler von $LD = H$, und H und L induzieren dieselbe Automorphismengruppe in A. Also ist A ein endlicher θ-Normalteiler von H. Damit ist gezeigt, dass (III) aus (II) folgt. Dass schliesslich auch (I) aus (III) folgt, ist trivial.

FOLGERUNG 3.6: *Vererbt sich θ auf Faktoren und sind elementarabelsche Primärgruppen θ-Gruppen, so sind die folgenden Eigenschaften der artinschen Gruppe G äquivalent:*

(I) *G ist eine fastabelsche hyper-θ-Gruppe.*

(II) (a) *Ist X eine maximale Untergruppe der Untergruppe U von G, aber kein Normalteiler von U, so gibt es einen Normalteiler Y von U mit*

$$U = XY, X_U \subseteq Y, Y/X_U \, \theta \, U/X_U .$$

(b) *θ-Faktoren von G sind fastabelsch.*

(III) (a) *Ist X eine maximale Untergruppe der endlichen Untergruppe U von G, aber kein Normalteiler von U, so gibt es einen Normalteiler Y von U mit*

$$U = XY, X_U \subseteq Y, Y/X_U \, \theta \, U/X_U .$$

(b) *G ist fastabelsch.*

BEWEIS: Es ist klar, dass (II. b) aus (b) folgt, und es ergibt sich aus Folgerung 1.7, dass auch (II. a) aus (I) folgt.

Ist die maximale Untergruppe X der Untergruppe U der (II) erfüllenden Gruppe G kein Normalteiler von U, so gibt es einen Normalteiler Y von U mit

$$U = XY, \; X_U \subseteq Y, \; Y/X_U \, \theta \, U/X_U .$$

Ist $Y = U$, so ist U/X_U ein θ-Faktor von G, also nach (II. b) fastabelsch. Aus B. AMBERG, Folgerung 4, folgt nun, dass G fastabelsch ist. Nun ist es klar, dass (III) eine Folge von (II) ist.

Gilt (III), so ist G als artinsche und fastabelsche Gruppe lokal endlich, vgl. R. BAER [3], p. 7/8, Satz 2.1. Daher folgt aus (III. a) wegen Satz 3.2 und Bemerkung 3.4, dass jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine endliche hyper-θ-Gruppe ist. Aus Hilfssatz 3.5 ergibt sich, dass G selbst eine hyper-θ-Gruppe ist. Also folgt (I) aus (III).

Bemerkung 3.7: Die Voraussetzung in Folgerung 3.6, dass elementarabelsche Primärgruppen θ-Gruppen sind, wurde nur bei der Anwendung von Satz 3.2 benutzt. Nach Bemerkung 3.4 kann sie etwa auch durch folgende Forderung ersetzt werden:

Zyklische Gruppen von Primzahlordnung sind θ-Gruppen, und hyper-θ ist gesättigt (vom Frattinityp).

Satz 3.8: *Vererbt sich θ auf Faktoren, sind zyklische Gruppen von Primzahlordnung θ-Gruppen, so sind die folgenden Eigenschaften der artinschen Gruppe G äquivalent*:

(I) *G ist eine auflösbare hyper-θ-Gruppe.*

(II) (a) *Ist die maximale Untergruppe X der Untergruppe U von G kein Normalteiler von U, so gibt es einen Normalteiler Y von U mit*

$$U = XY,\ X_U \subseteq Y,\ Y/X_U\ \theta\ U/X_U\ .$$

(b) *Hyper-θ-Untergruppen von G sind auflösbar.*

Beweis: Aus Folgerung 1.7 ergibt sich, dass (II) aus (I) folgt.

Die Gruppe G erfülle nun Bedingung (II), und es sei E eine endliche und auflösbare Untergruppe von G. Angenommen, E ist keine hyper θ-Gruppe. Dann gibt es unter den endlichen Faktoren von E, die keine hyper-θ-Gruppen sind, einen F von minimaler Ordnung. Da sich (II. a) auf Untergruppen und wegen Hilfssatz 1.5 auch auf epimorphe Bilder vererbt, gilt:

(1) F erfüllt Bedingung (II. a), ist aber keine hyper-θ-Gruppe.

(2) Jeder echte Faktor von F ist eine hyper-θ-Gruppe.

Da F keine hyper-θ-Gruppe ist, ist $F \neq 1$ und besitzt also minimale Normalteiler. Gäbe es zwei verschiedene minimale Normalteiler A und B von F, so wäre $A \cap B = 1$, so dass F einer Untergruppe des direkten Produktes $F/A \times F/B$ isomorph wäre. Wegen (2) sind F/A und F/B hyper-θ-Gruppen, so dass wegen Lemma 1.2 auch $F/A \times F/B$ eine hyper-θ-Gruppe ist. Dann ist nach Lemma 1.3 (b) aber auch F eine hyper-θ-Gruppe, was (1) widerspricht. Also gilt:

(3) F besitzt genau einen minimalen Normalteiler M.

Es ergibt sich aus (2), dass F/M eine hyper-θ-Gruppe ist. Wäre M ein θ-Normalteiler von F, so würde aus (2) folgen, dass F eine hyper-θ-Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch zu (1) folgt:

(4) F/M ist eine hyper-θ-Gruppe, aber M ist kein θ-Normalteiler von F.

Angenommen, M ist nicht in der Frattiniuntergruppe ΦF von F enthalten. Wegen (2) genügt jedes echte epimorphe Bild von F der Bedingung (II.b) von Satz 3.2, und hieraus folgt, dass F selbst dieser Bedingung (II.b) genügt. Mit (II.a) folgt dann aus diesem Satz, dass F im Widerspruch zu (1) eine hyper-θ-Gruppe ist. Also gilt:

(5) $$M \subseteq \Phi F.$$

Die Frattiniuntergruppe einer endlichen Gruppe ist nilpotent, vgl. etwa R. Kochendörffer, p. 203, (9.3.5). Also ist der minimale Normalteiler M von F eine elementarabelsche p-Gruppe. Angenommen, es ist $F = \mathfrak{C}_F M$. Dann ist M im Zentrum $\mathfrak{Z}F$ von F enthalten, und jede Untergruppe von M ist ein Normalteiler von F. Aus der Minimalität von M folgt dann, dass M zyklisch von Primzahlordnung p ist. Wäre p ein Teiler der Ordnung von F/M, so wäre M einer Untergruppe der hyper-θ-Gruppe F/M isomorph, also nach Lemma 1.3 (b) selbst eine hyper-θ-Gruppe. Da aber M ein im Zentrum von F enthaltener zyklischer Normalteiler von Primzahlordnung ist, wäre M sogar ein θ-Normalteiler von F, was (4) widerspricht. Also ist p kein Teiler der Ordnung von F/M. Es folgt, dass die Ordnungen von M und F/M teilerfremd sind, so dass nach dem Satz von Schur und Zassenhaus F über M zerfällt, was wegen (5) nicht sein kann; vgl. etwa R. Kochendörffer, p. 117, (6.2.2), und p. 202, (9.3.2). Aus diesem Widerspruch folgt:

(6) $$\mathfrak{c}_F M \subset F.$$

Natürlich enthält dann $F/\mathfrak{c}_F M$ einen von 1 verschiedenen, auflösbaren Normalteiler, und es folgt aus R. BAER [1], p. 656, Lemma 2:

(7) $F/\mathfrak{c}_F M$ besitzt einen Normalteiler mit zu p teilerfremder Ordnung.

Nun folgt aus R. BAER [1], p. 655, (E), die Existenz einer Untergruppe S von F mit folgenden Eigenschaften:

(8) $$M \cap S = 1, S\mathfrak{c}_F M = F.$$

Wäre $SM = F$, so folgte aus der Minimalität und Kommutativität von M, dass S eine maximale Untergruppe von F ist; vgl. etwa R. BAER [1], p. 642, Lemma 1. Aus $M \subseteq \Phi F$ folgte dann $S \subset F = SM = S$, was nicht sein kann. Also ist $SM \subset F$, und SM ist wegen (2) eine hyper-θ-Gruppe. Da S und F wegen (8) dieselbe Automorphismengruppe in M induzieren, ist M auch minimaler Normalteiler von SM, so dass M ein θ-Normalteiler von SM und F ist, vgl. Lemma 1.3 (a). Aus diesem Widerspruch zu (4) folgt:

(8) Jede endliche, auflösbare Untergruppe von G ist eine hyper-θ-Gruppe.

Angenommen, G ist keine hyper-θ-Gruppe. Da G artinsch ist, gibt es unter den Untergruppen von G, die keine hyper-θ-Gruppen sind, eine minimale W mit folgenden Eigenschaften:

(9) W ist keine hyper-θ-Gruppe.

(10) Jede echte Untergruppe von W ist eine hyper-θ-Gruppe.

Angenommen, W ist nicht endlich erzeugbar. Dann ist jede endlich erzeugbare Untergruppe von W eine echte Untergruppe von W, also wegen (10) eine hyper-θ-Gruppe und wegen (II.b) sogar auflösbar. Insbesondere ist W lokal auflösbar, und es folgt etwa aus B. AMBERG, Folgerung B, dass W selbst artinsch, auflösbar und fastabelsch ist. Es ergibt sich nun aus (8), dass jede endliche Untergruppe von W eine hyper-θ-Gruppe ist, so dass W wegen Hilfssatz 3.5 eine hyper-θ-Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch zu (9) folgt:

(11) W ist endlich erzeugbar.

Angenommen, W ist nicht auflösbar. Wegen (11) besitzt W eine maximale Untergruppe R. Wegen $R \subset W$ und (10) ist R eine hyper-θ-Gruppe, so dass R nach (II.b) auflösbar ist. Wäre $R \neq \mathfrak{n}_W R$, so wäre R ein Normalteiler von W, und W/R wäre frei von eigentlichen Untergruppen, also zyklisch von Primzahlordnung. Mit R und W/R ist auch W auflösbar, was der Annahme widerspricht. Also ist $R = \mathfrak{n}_W R$, und wegen (II.a) gibt es einen Normalteiler S von W mit folgenden Eigenschaften:

(12) $$W = RS, \quad R_W \subseteq W, \quad S/R_W \, \theta \, W/R_W.$$

Da R_W eine echte Untergruppe von W ist, ist R_W wegen (10) eine hyper-θ-Gruppe, und aus (II.b) ergibt sich die Auflösbarkeit von R_W. Wäre $W = S$, so wäre W/R_W wegen (12) eine θ-Gruppe, und Anwendung von (II.*b*) zeigte die Auflösbarkeit von W/R_W. Mit R_W und W/R_W ist aber auch W auflösbar, und dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also ist $S \subset W$. Wegen (10) ist S eine hyper-θ-Gruppe, und die Anwendung von (II.b) zeigt die Auflösbarkeit von S. Nun ist mit R auch das epimorphe Bild $W/S = RS/S \simeq R/(R \cap S)$ von R auflösbar. Mit S und W/S ist aber auch W auflösbar, und aus diesem Widerspruch zur Annahme folgt:

(13) W ist auflösbar.

Wegen (11) und (13) ist W eine endlich erzeugbare, auflösbare und artinsche Gruppe. Anwendung von R. BAER [3], p. 18, Lemma 3.3, ergibt die Endlichkeit von W. Nun ergibt sich aus (8), dass W eine hyper-θ-Gruppe ist. Dies widerspricht (9). Also ist (I) doch eine Folge von (II).

BEMERKUNG 3.9: Aus dem in Bemerkung 3.3 angegebenen Beispiel ergibt sich, dass die Untergruppenvererblichkeit von Bedingung (II.a) in Satz 3.8 unentbehrlich ist.

BEMERKUNG 3.10: Die in den Sätzen dieses Abschnitts erscheinende Voraussetzung, dass zyklische Gruppen von Primzahlordnung θ-Gruppen sind, ist unentbehrlich, da etwa Bedingung (II.a) von Satz 3.8 von allen zyklischen Gruppen von Primzahlordnung erfüllt wird. Ähnliche Bemerkungen gelten für die übrigen Sätze mit dieser Voraussetzung.

LITERATURVERZEICHNIS

B. AMBERG, *Gruppen mit Minimalbedingung für Subnormalteiler*, erscheint demnächst im Arch. der Math.

R. BAER,

[1] *Nilpotent characteristic subgroups of finite groups*, Amer. Journal of Math. 75 (1953), 633-664.

[2] *Abzählbar erkennbare gruppentheoretische Eigenschaften*, Math. Z. 79 (1962), 344-363.

[3] *Gruppen mit Minimalbedingung*, Math. Ann. 150 (1963), 1-44.

[4] *Local and global hypercentrality and supersolubility*, Indagationes Math. 28 (1966), 93-126.

[5] *Normalisatorreiche Gruppen*, Rend. Math. Padova 38 (1967), 358-450.

L. FUCHS, *Abelian groups*, Budapest (1958).

K. A. HIRSCH, *Über lokal nilpotente Gruppen*, Math. Z. 63 (1955), 290-294.

B. HUPPERT, *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*, Math. Z. 60 (1954), 409-434.

R. KOCHENDÖRFFER, *Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigung der endlichen Gruppen*, Leipzig (1966).

B. I. PLOTKIN, *On some criteria of locally nilpotent groups*, Amer. Math. Soc. Transl. 2, 17 (1961), 1-8 (Übers. aus dem Russ.: Uspechi Mat. Nauk (N. S.) 9 (1954), 3 (16), 181-186).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17-2-68.