RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO ZOLEZZI

Teoremi di esistenza nella teoria dei controlli ottimi in dimensione infinita

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 72-96

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__72_0>

TEOREMI DI ESISTENZA NELLA TEORIA DEI CONTROLLI OTTIMI IN DIMENSIONE INFINITA

TULLIO ZOLEZZI *)

SUMMARY. We prove some existence theorems in infinite dimensional optimal control theory, in the following hypotheses:

(i) the admissible controls are in some subset of $L^p([0,T], Y)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, Y a given Banach space, satisfying some constraints;

(ii) the states are of the form $x(t) = a(t) + \int_0^t G(t,s)\, B(s)\, u(s)\, ds \in X,\ 0 \leq t \leq T,$

where u is the control, X a given Banach space, and a weakly convergent sequence of controls generates a strongly convergent sequence of states;

(iii) assuming controllability, we minimize a real function $u \longrightarrow \int_0^T f(t, x(t), u(t))\, dt$

where f is convex with respect to the control u, lower semicontinuous with respect to x and to u, and measurable with respect to t.

We obtain in this way existence of optimal controls for some classes of partial differential equations, or integral equations; some simple examples are also given. These results are independent on the known existence theorems.

Introduzione.

In questo lavoro dimostro alcuni teoremi di esistenza del minimo per problemi di controllo in dimensione infinita. Il metodo usato è lo stesso di [3], i cui risultati vengono qui generalizzati e migliorati

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 9 del comitato nazionale per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Genova.

ampiamente. I teoremi dimostrati riguardano essenzialmente il seguente problema: minimizzare una funzione reale della forma

$$u \longrightarrow \int_0^T f(t, (Mu)(t), u(t))\, dt,$$

dove

$$(Mu)(t) = a(t) + \int_0^t G(t, s)\, B(s)\, u(s)\, ds \in X, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

nell'insieme

$$F = \{u \in L^p(Y) : \| u \| \leq N,\ u(t) \in U(t) \text{ q. o. in } [0, T],\ (Mu)(T) \in E\}$$

(v. più oltre per le notazioni); X ed Y sono dati spazi di Banach, si assume la controllabilità, e $T > 0$ è fissato. I risultati si riferiscono ad un'ampia classe di spazi di Banach, riguardano i casi $p = 1$, $1 < p < \infty$, $p = \infty$, comprendono generalizzazioni e varianti del problema enunciato, e generalizzano ampiamente alcuni enunciati di [13] e di [14]. Problemi analoghi per equazioni differenziali più generali e per funzionali più particolari di quelli qui considerati (o senza esplicito riferimento a funzionali da minimizzare) sono stati studiati in [21] e [22].

Notazioni. Se X, Y sono spazi di Banach, $\mathcal{L}(X, Y)$ è lo spazio vettoriale degli operatori lineari con dominio in X e rango in Y; $\mathcal{B}(X, Y)$ è lo spazio di Banach degli operatori lineari limitati di X in Y; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X, X)$; $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X) \cdot \mathcal{B}_0(X, Y)$ è lo spazio degli operatori affini limitati di X in Y.

Sia D uno spazio di Banach, sia $T > 0$: allora se $p \geq 1$ ed I è un sottinsieme misurabile secondo Lebesgue di $[0, T]$, $L^p(I, D)$ è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni $f : I \longrightarrow D$ tali che $t \longrightarrow \| f(t) \|^{p-1} f(t)$ è integrabile in I secondo Bochner rispetto alla misura di Lebesgue, con la norma $\left(\int_0^T \| f(t) \|^p\, dt \right)^{1/p}$; $L^p(D) = L^p([0, T], D)$. Analogamente è definito $L^\infty(I, D)$ ed $L^\infty(D)$.

Tutti i termini topologici senza ulteriori precisazioni s'intendono riferiti alla topologia forte dello spazio di Banach D.

$C(D)$ è lo spazio di Banach delle funzioni $f:[0, T] \rightarrow D$, continue in $[0, T]$, con la norma $\sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|$.

D^* è il coniugato di D.

$\|\cdot\|$ indica la norma, $\rightarrow$ la convergenza forte, $\rightharpoonup$ la convergenza debole, in ogni spazio di Banach considerato.

Sia D uno spazio vettoriale, W un convesso non vuoto di D; una funzione $f: W \rightarrow R^1$ si dice quasi convessa in W se $\{x \in W: f(x) \leq t\}$ è convesso per ogni $t \in R^1$.

Se D_2 è uno spazio di funzioni definite in $[0, T]$, se $K \subset D_1$, se $M: D_1 \rightarrow D_2$, e se $t \in [0, T]$, $M(K)(t) = \{y : y = (Mx)(t), x \in K\}$. Mis$([0, T])$ è la classe dei sottoinsiemi di $[0, T]$ che sono misurabili secondo Lebesgue: mis I è la misura di Lebesgue di I, CI è il complementare di I, χ_I è la funzione caratteristica di I. Se D è uno spazio di Banach ed A, B ne sono sottinsiemi, ∂A è la frontiera di A, $d(A, B)$ è la distanza di A da B, $\overline{\text{co}}\, A$ è l'inviluppo chiuso convesso di A.

Sussiste la seguente variante di un noto teorema di Carathéodory.

LEMMA. Siano $f_n \in L^1$, $n = 1, 2, \ldots$; supponiamo che

(a) $s \rightarrow \liminf f_n(s) \in L^1$;

(b) $\liminf_{\text{mis}\, I \rightarrow 0} \int_I f_n(s)\, ds \geq 0$, uniformemente rispetto ad n.

Allora $\int_0^T \liminf f_n(s)\, ds \leq \liminf \int_0^T f_n(s)\, ds$.

DIMOSTRAZIONE. La (b) equivale ad affermare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\int_I f_n(s)\, ds \geq -\varepsilon$ se mis $I < \delta$, per ogni n. Dato $\varepsilon > 0$, poniamo, per ogni naturale r, $I_r = \{s \in [0, T] : f_n(s) > \liminf f_n(s) - \varepsilon$ se $n \geq r\}$.

Allora lim mis $CI_r = 0$, quindi, per la (b), esiste $\bar{r}$ tale che risulta $\int_{CI_{\bar{r}}} f_n(s)\, ds \geq -\varepsilon$ per ogni n, e, per la (a), $\int_{CI_{\bar{r}}} \liminf f_n(s)\, ds < \varepsilon$.

Allora $\int_0^T f_n(s)\,ds = \int_{I_{\bar r}} f_n(s)\,ds + \int_{\complement I_{\bar r}} f_n(s)\,ds \geq \int_{I_{\bar r}} \liminf f_n(s)\,ds -$

$$-\,\varepsilon T + \int_{\complement I_{\bar r}} f_n(s)\,ds + \int_{\complement I_{\bar r}} \liminf f_n(s)\,ds - \int_{\complement I_{\bar r}} \liminf f_n(s)\,ds \geq$$

$\geq \int_0^T \liminf f_n(s)\,ds - \varepsilon(T+2)$, se $n > \bar r$, c. v. d.

Sul seguente teorema (v. [15] e [3]) (valido in ipotesi sostanzialmente più generali: v. [10]) si fonda il metodo usato nel presente lavoro. La versione sequenziale del teorema è enunciata e dimostrata in parentesi.

TEOREMA 1. *Siano X_1 ed X_2 spazi normati; sia $F \subset X_1$, con*

(i) *F non vuoto e convesso.*
Siano

(ii) *$M : (F,$ topologia debole$) \longrightarrow X_2$ (sequenzialmente) continuo;*

(iii) *$L \in \mathcal{B}(X_1)$;*
$h : L(F) \times M(F) \longrightarrow R^1$, tale che

(iv) *$u \longrightarrow h(u, v)$ é quasi convessa e semicontinua inferiormente in $L(F)$ per ogni $v \in M(F)$;*

(v) *$v \longrightarrow h(u, v)$ è semicontinua inferiormente in $M(F)$, uniformemente per $u \in L(F)$.*
Allora $u \longrightarrow h(Lu, Mu)$ è debolmente (sequenzialmente) semicontinua inferiormente in F.

DIMOSTRAZIONE. Posto $g(u, v) = h(Lu, Mv)$ si ha $g : F \times F \longrightarrow R^1$. Per le (iii), (iv), si verifica subito che

(1) $u \longrightarrow g(u, v)$ è quasi convessa e semicontinua inferiormente in F per ogni $v \in F$.

Si ha poi che

(2) $v \longrightarrow g(u, v)$ è debolmente (sequenzialmente) semicontinua inferiormente in F, uniformemente per $u \in F$.

(Infatti se $v_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, se $v \in F$ e se $v_n \rightharpoonup v$, per la (ii) si ha $Mv_n \longrightarrow Mv$, e per la (v) $\liminf_{n \to \infty} g(u, v_n) \geq g(u, v)$, uniformemente per $u \in F$). Infatti siano $v_0 \in F, \varepsilon > 0$; dalla (v) esiste $a > 0$ tale che $\| Mv - Mv_0 \| < a$ implica $h(Lu, Mv) \geq h(Lu, Mv_0) - \varepsilon$, uniformemente per $u \in F$; per la continuità di M, esiste un intorno debole U di v_0 tale che $\| Mv - Mv_0 \| < a$ per ogni $v \in U \cap F$: allora $h(Lu, Mv) \geq \geq h(Lu, Mv_0) - \varepsilon$ per ogni $v \in U \cap F$, uniformemente per $u \in F$.

(Sia $u_n \in F, n = 1, 2, \ldots, u_0 \in F, u_n \rightharpoonup u_0$. Sia $g(u_n, u_0) \to r$, sia $t > r$, sia $S_t = \{u \in F : g(u, u_0) \leq t\}$. Per la (1), S_t è debolmente chiuso; per n abbastanza grande, $u_n \in S_t$ quindi $u_0 \in S_t$ da cui $g(u_0, u_0) \leq t$, da cui $g(u_0, u_0) \leq r$, quindi $\liminf_{n \to \infty} g(u_n, u_0) \geq g(u_0, u_0)$. Poniamo $f(u) = h(Lu, Mu)$. Si ha $f(u_n) = g(u_n, u_0) + g(u_n, u_n) - g(u_n, u_0)$ per ogni n; per la (2) si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste k tale che $g(u_n, u_n) - g(u_u, u_0) > -\varepsilon$ per $n > k$ da cui $f(u_n) \geq g(u_n, u_0) - \varepsilon$ se $n > k$; essendo $\liminf_{n \to \infty} g(u_n, u_0) \geq g(u_0, u_0)$, si ha che $\liminf_{n \to \infty} f(u_n) \in R^1$ e che $\liminf_{n \to \infty} f(u_n) \geq g(u_0, u_0) - \varepsilon$, quindi $\liminf_{n \to \infty} f(u_n) \geq \geq f(u_0)$).

Poniamo $f(u) = h(Lu, Mu)$. Sia $c \in R^1$: proviamo che $M_c = = \{u \in F : f(u) \leq c\}$ è debolmente chiuso in F. Sia u_0 nella chiusura debole di M_c in F. Allora per la (2) esiste per ogni $\varepsilon > 0$ un intorno debole U di u_0 tale che $g(u, v) \geq g(u, u_0) - \varepsilon$ se $u \in F, v \in U \cap F$. Sia $c_1 = c + \varepsilon$, sia $M_1 = \{u \in F : g(u, u_0) \leq c_1\}$. Per la (1) e per la (i), M_1 è debolmente chiuso. Sia U_1 un intorno debole di u_0 tale che $U_1 \subset U$. Allora esiste $\bar{u} \in U_1 \cap F \cap M_c$, quindi $g(\bar{u}, \bar{u}) \leq c$, e inoltre $g(\bar{u}, \bar{u}) \geq \geq g(\bar{u}, u_0) - \varepsilon$. Allora $g(\bar{u}, u_0) = g(\bar{u}, \bar{u}) - g(\bar{u}, \bar{u}) + g(\bar{u}, u_0) \leq c + + \varepsilon = c_1$ quindi $U_1 \cap M_1 \neq \Phi$, quindi $u_0 \in M_1$, per cui $g(u_0, u_0) \leq c$, quindi M_c è debolmente chiuso in F. c. v. d.

Consideriamo ora il caso $p = 1$. (L'ipotesi (5) del seguente teorema è scritta in forma parzialmente ridondante per comodità di esposizione delle dimostrazioni seguenti).

TEOREMA 2. *Siano X ed Y spazi di Banach: supponiamo che*

(1) *X sia separabile, Y sia separabile e riflessivo.*

Sia data $G : Z = \{(t, s) \in R^2 : 0 \leq s \leq t \leq T\} \to \mathcal{B}(X)$ tale che

(2) *G sia fortemente continua in Z, e continua da $\{(t, s) \in Z : t > s\}$ in ($\mathcal{B}(X)$, topologia uniforme).*

Siano dati $a \in C(X)$,

(3) $B \in L^{\infty}(\mathcal{B}(Y, X))$.

Sia $M : L^1(Y) \longrightarrow C(X)$ *definita da*

$(Mu)(t) = a(t) + \int_0^t G(t, s) B(s) u(s)\, ds,\ 0 \leq t \leq T$. *Siano dati*

(4) $E \subset X$, *non vuoto, chiuso e convesso.*

(5) $t \longrightarrow U(t)$, *da* $[0, T]$ *nei sottinsiemi non vuoti, chiusi e convessi di* Y, *tale che esista* $\varphi \in L^1$ *con* $\| v \| \leq \varphi(t)$ *q. o. in* $[0, T]$ *se* $v \in U(t)$, *e che risulti limitato* $\bigcup_{0 \leq s \leq t} U(s)$ *per quasi ogni* $t \in [0, T]$.

Supponiamo che

(6) $B(s)\, U(s)$ *sia relativamente compatto in* X, *q. o. in* $[0, T]$.

Sia dato $N > 0$. *Supponiamo che*

(7) $F = \{u \in L^1(Y) : \| u \| \leq N, u(t) \in U(t)$ *q. o. in* $[0, T], (Mu)(T) \in E\}$

sia non vuoto.

Sia $R_F = \bigcup_{0 \leq t \leq T} M(F)(t)$; *sia* $f : [0, T] \times R_F \times Y \longrightarrow R^1$ *tale che*

(8) $t \longrightarrow f(t, x(t), u(t)) \in L^1$ *per ogni* $x \in M(F)$, *per ogni* $u \in F$;

(9) $u \longrightarrow f(t, x, u)$ *sia convessa e semicontinua inferiormente in* Y *per quasi ogni* $t \in [0, T]$ *e per ogni* $x \in R_F$; $x \longrightarrow f(t, x, u)$ *sia semicontinua inferiormente in* R_F *per quasi ogni* $t \in [0, T]$, *uniformemente per* $u \in Y$; $s \longrightarrow \liminf f(s, x(s), u_k(s)) \in L^1$ *per ogui* $x \in M(F)$ *e per ogni* $\{u_k\} \subset F$ *convergente q. o. in* $[0, T]$;

(10) $\liminf_{mis\, I \to 0} \int_I f(s, x(s), u(s))\, ds \geq 0$ *uniformemente per* $(x, u) \in M(F) \times F$.

Allora $u \longrightarrow \int_0^T f(t, (Mu)(t), u(t))\, dt$ *ha minimo assoluto in* F.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col provare che

(i) F è debolmente compatto in $L^1(Y)$.

Posto infatti $F_1 = \{u \in L^1(Y) : \| u \| \leq N, u(t) \in U(t)$ q. o. in $[0, T]\}$, $F_2 = \{u \in L^1(Y) : (Mu)(T) \in E\}$, per la (5) e per la (4) si ha che F_1 ed F_2 sono convessi. Per il teorema di limitatezza uniforme ([2], II.3.21) esiste $G_0 > 0$ tale che, per la (2), $\| G(t,s) \| \leq G_0$ per ogni $(t,s) \in Z$. Poniamo $(Hu)(t) = \int_0^t G(t,s)\, B(s)\, u(s)\, ds$, $0 \leq t \leq T$, $u \in L^1(Y)$.

Allora, per la (3), si ha $\| Hu \| = \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t G(t,s)\, B(s)\, u(s)\, ds \right\| \leq$

$\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^T \| G(t,s) \| \, \| B(s)\, u(s) \| \, ds \leq G_0 \, \| B \| \, \| u \|$ per ogni $u \in L^1(Y)$.

Allora $M \in \mathcal{B}_0(L^1(Y), C(X))$. Per la (4) si ha quindi che F_2 è debolmente chiuso. Sia $u_n \in F_1$, $n = 1, 2, \ldots$, $u \in L^1(Y)$, $u_n \rightarrow u$, allora $\| u \| \leq N$; esiste inoltre $\{u_{n_k}\}$ estratta da $\{u_n\}$ tale che $u_{n_k}(s) \rightarrow u(s)$ q. o. in $[0, T]$; per la (5) si ha $u(s) \in U(s)$ q. o. in $[0, T]$. Allora F_1 è debolmente chiuso. Per provare la (i) basta dimostrare che F_1 è debolmente sequenzialmente compatto. Sia infatti $\{u_n\}$ una successione in F_1. Sia $\overline{\{t_k\}} = [0, T]$. Posto $V(t) = \overline{co} \bigcup_{0 \leq s \leq t} U(s)$, $0 \leq t \leq T$, si può supporre che $V(t_k)$ sia limitato per ogni k, inoltre si ha $\int_0^{t_1} u_n(s)\, ds \in t_1 \, V(t_1)$, per cui, dalla (5), esiste $\{u_n^{(1)}\}$ estratta da $\{u_n\}$ tale che $\left\{ \int_0^{t_1} u_n^{(1)}(s)\, ds \right\}$ è debolmente convergente; analogamente per ogni $p > 1$ naturale esiste $\{u_n^{(p)}\}$ estratta da $\{u_n^{(p-1)}\}$ tale che $\left\{ \int_0^{t_p} u_n^{(p)}(s)\, ds \right\}$ è debolmente convergente. Dati $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$, esiste j tale che $\left| \int_t^{t_j} \varphi(s)\, ds \right| < \varepsilon$; allora per ogni $g \in Y^*$ e per ogni naturale k ed r si ha $\left| g\left(\int_0^t u_k^{(k)}(s)\, ds - \int_0^t u_r^{(r)}(s)\, ds \right) \right| \leq \left| g\left(\int_0^t u_k^{(k)}(s)\, ds - \right.\right.$

$\left.\left. - \int_0^{t_j} u_k^{(k)}(s)\, ds \right) \right| + \left| g\left(\int_0^{t_j} u_k^{(k)}(s)\, ds - \int_0^{t_j} u_k^{(j)}(s)\, ds \right) \right| + \left| g\left(\int_0^{t_j} u_k^{(j)}(s)\, ds - \right.\right.$

$$- \int_0^{t_j} u_r^{(j)}(s)\, ds\Big)\Big| + \Big| g\Big(\int_0^{t_j} u_r^{(j)}(s)\, ds - \int_0^{t_j} u_r^{(r)}(s)\, ds\Big)\Big| + \Big| g\Big(\int_0^{t_j} u_r^{(r)}(s)\, ds -$$

$$- \int_0^{t} u_r^{(r)}(s)\, ds\Big)\Big| \leq \| g \| \Big| \int_t^{t_j} \varphi(s)\, ds \Big| + 3\varepsilon + \| g \| \Big| \int_t^{t_j} \varphi(s)\, ds \Big| <$$

$< (3 + 2\, \| g \|)\, \varepsilon$ se k ed r sono abbastanza grandi. Allora $\left\{ \int_0^t u_k^{(k)}(s)\, ds \right\}$ è debolmente di Cauchy per ogni $t \in [0, T]$, quindi, per la (1), è debolmente convergente. Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ per la (5) esiste $\delta > 0$ tale che se $I \in \text{mis}([0, T])$, se $\text{mis}\, I < \delta$ e per ogni k si ha $\int_I \| u_k^{(k)}(s) \|\, ds < \varepsilon$. Allora, per una evidente estensione del teorema 4.2 di [11], si trova che $\{u_k^{(k)}\}$ è debolmente di Cauchy in $L^1(Y)$, il quale per la (1) (v. [11]) è debolmente completo, pertanto la (i) è provata essendo $F = F_1 \cap F_2$.

Proviamo ora che

(ii) M: (F, topologia debole) $\rightarrow C(X)$ è continuo.

Per la (1) basta provare la sequenziale continuità di M. Allo scopo proviamo che $M(F_1)(t)$ è relativamente compatto in X per ogni $t \in [0, T]$. Infatti siano $t \in [0, T]$, $f_n \in X^*$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, con $f_n \rightarrow f_0$ nella X-topologia di X^*.

Sia $\overline{f_n}(s)(y) = f_n\, G(t, s)\, B(s)(y)$, $y \in X$, $s \in [0, t]$. Allora dalla (6), dalla (2) e per [4], corollario 3.2., si ha che $\overline{f_n}(s)\, v(s) \rightarrow \overline{f_0}(s)\, v(s)$ q. o. in $[0, t]$, uniformemente per $v \in F_1$. Sia $I \in \text{mis}([0, t])$: dalla (3) e dalla (5) si ha che $\int_I |\overline{f_n}(s)\, v(s)|\, ds \leq \int_I \| f_n \|\, \| G(t,s) \|\, \| B(s) \|\, \| v(s) \|\, ds \leq$

$$\leq f^*\, G_0 \int_I \| B(s) \|\, \varphi(s)\, ds \leq f^*\, G_0\, \| B \| \int_I \varphi(s)\, ds \quad \text{per ogni} \quad v \in F_1,$$

dove f^* è una costante. Per un teorema di convergenza di Lebesgue ([9], XI-10-22) si deduce che $(f_n - f_0) \int_0^t G(t, s)\, B(s)\, u(s)\, ds \rightarrow 0$ uniformemente per $u \in F_1$. Dal corollario 3.2. di [4] si conclude che $M(F_1)(t)$ è relativamente compatto in X per ogni $t \in [0, T]$. Dimostriamo ora che $M(F_1)$ è equicontinuo in $[0, T]$, in $C(X)$. Infatti siano $u \in F_1$, $\varepsilon > 0$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$. Allora $\| (Hu)(t_1) - (Hu)(t_2) \| \leq$ $\leq \left\| \int_0^{t_2} G(t_2, s) B(s) u(s) ds - \int_0^{t_1} G(t_2, s) B(s) u(s) ds \right\| + \left\| \int_0^{t_1} (G(t_2, s) - \right.$ $\left. - G(t_1, s)) B(s) u(s) ds \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \| G(t_2, s) \| \, \| B(s) u(s) \| ds + \int_0^{t_1} \| G(t_1, s) -$ $- G(t_2, s) \| \, \| B(s) u(s) \| ds$. Se $t_1 = 0$, si ha, per la (2), la (3) e la (5), che $\| (Hu)(t_2) - (Hu)(0) \| \leq \int_0^{t_2} \| G(t_2, s) \| \, \| B(s) \| \, \| u(s) \| ds \leq$ $\leq G_0 \| B \| \int_0^{t_2} \varphi(s) ds$, da cui è evidente che $M(F_1)$ è equicontinuo in $t_1 = 0$. Se $t_1 > 0$, sia $\delta > 0$ tale che $t_1 - \delta > 0$. Allora $\| (Hu)(t_1) - (Hu)(t_2) \| \leq \int_{t_1}^{t_2} \| G(t_2, s) \| \, \| B(s) u(s) \| ds + \int_{t_1-\delta}^{t_1} \| G(t_1, s) -$ $- G(t_2, s) \| \, \| B(s) u(s) \| ds + \int_0^{t_1-\delta} \| G(t_1, s) - G(t_2, s) \| \, \| B(s) u(s) \| ds$;

ora si ha che $\int_{t_1-\delta}^{t_1} \| G(t_1, s) - G(t_2, s) \| \, \| B(s) u(s) \| ds \leq 2 G_0 \varepsilon \| B \|$ se δ è abbastanza piccolo (in dipendenza di ε), uniformemente per $u \in F_1$; con tale scelta di δ, osservato che G è, per la (2), uniformemente continua tra il compatto $\{(s, t) \in Z : 0 \leq s \leq t_1 - \delta, t_1 \leq$ $\leq t \leq T\}$ e $(\mathcal{B}(X)$, topologia uniforme), risulta $\int_0^{t_1-\delta} \| G(t_1, s) -$ $- G(t_2, s) \| \, \| B(s) u(s) \| ds \leq N \varepsilon \| B \|$ se $| t_2 - t_1 |$ è abbastanza piccolo (in dipendenza di ε e t_1), uniformemente per $u \in F_1$, ed infine $\int_{t_1}^{t_2} \| G(t_2, s) \| \, \| B(s) u(s) \| ds \leq G_0 \varepsilon \| B \|$ se $| t_2 - t_1 |$ è abbastanza piccolo (in dipendenza di ε), uniformemente per $u \in F_1$; si conclude allora che $M(F_1)$ è equicontinuo in ogni punto $t_1 \in [0, T.]$

Allora ([5], teor. 7.5.7.), per la (i), la (ii) è provata, infatti se $u_n \in F$, $n = 1, 2, \dots, u \in F$, e $u_n \rightharpoonup u$ si ha $M(u_n) \rightharpoonup M(u)$, ma essendo $M(F_1)$ relativamente compatto in $C(X)$, si ha che esiste $\{u_{n_k}\}$ estratta dalla $\{u_n\}$ tale che $M(u_{n_k}) \longrightarrow M(u)$.

Poniamo adesso

$$h(x, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t))\, dt.$$

Per la (8) si ha $h: M(F) \times F \longrightarrow R^1$.

Proviamo che

(iii) $u \longrightarrow h(x, u)$ è quasi convessa e semicontinua inferiormente in F per ogni $x \in M(F)$.

La quasi convessità è ovvia dalla (9). Siano poi $x \in M(F)$, $u_n \in F$, $n = 1, 2, \dots$, $u_n \longrightarrow u$ in $L^1(Y)$, allora esiste $\{u_{n_k}\}$ estratta da $\{u_n\}$ tale che risulta $u_{n_k}(s) \longrightarrow u(s)$ q. o. in $[0, T]$. Per la (9) si ha $\liminf\limits_{k \to \infty} f(s, x(s), u_{n_k}(s)) \geq f(s, x(s), u(s))$ q. o. in $[0, T]$, $s \longrightarrow$ $\longrightarrow \liminf\limits_{k \to \infty} f(s, x(s), u_{n_k}(s)) \in L^1$, e infine, per il lemma, $\int_0^T f(s, x(s), u(s))\, ds \leq$ $\leq \int_0^T \liminf\limits_{k \to \infty} f(s, x(s), u_{n_k}(s))\, ds \leq \liminf\limits_{k \to \infty} \int_0^T f(s, x(s), u_{n_k}(s))\, ds$, da cui la (iii). Proviamo ora che

(iv) $x \longrightarrow h(x, u)$ è semicontinua inferiormente in $M(F)$, uniformemente per $u \in F$.

Infatti sia $x \in M(F)$, $x_n \in M(F)$, $n = 1, 2, \dots, x_n \longrightarrow x$ in $C(X)$. Sia $\varepsilon > 0$. Per la (9), per quasi ogni $s \in [0, T]$ esiste un naturale k tale che $f(s, x_n(s), u(s)) \geq f(s, x(s), u(s)) - \varepsilon$ se $n > k$, uniformemente rispetto ad $u \in F$. Per ogni naturale r sia $I_r = \{s \in [0, T] : f(s, x_n(s), u(s)) \geq f(s, x(s), u(s)) - \varepsilon$ se $n > r\}$. Dalla (9) si ha allora che $\lim \operatorname{mis}([0, T] - I_r) = 0$ (uniformemente rispetto ad $u \in F$). Per la (10) esiste dunque $\bar{r}$ tale che per ogni $u \in F$ è $\int_{CI_{\bar{r}}} f(s, x(s), u(s))\, ds \geq -\varepsilon$ e $\int_{CI_{\bar{r}}} f(s, x_n(s), u(s))\, ds \geq -\varepsilon$ per ogni n. Allora $\int_0^T f(s, x_n(s), u(s))\, ds =$

$$= \int_{I_{\bar r}} f(s, x_n(s), u(s))\, ds + \int_{CI_{\bar r}} f(s, x_n(s), u(s))\, ds \geq -\varepsilon + \int_{I_{\bar r}} f(s, x(s), u(s))\, ds -$$

$$- \varepsilon T \geq -\varepsilon (T + 2) + \int_0^T f(s, x(s), u(s))\, ds \text{ se } n > \bar r \text{ e per ogni } u \in F,$$

da cui la (iv).

Dalle (i), (ii), (iii), (iv), dal teorema 1 e dalla (7) si ha la tesi, c. v. d..

Nel teorema seguente è studiato un caso notevole per il quale si può ottenere un teorema d'esistenza con ipotesi analoghe a quelle del precedente teorema, però senza ricorrere ad ipotesi di compattezza (v. (6) del teorema 2) e di regolarità dei vincoli (v. (5) dello stesso teorema), e di G (v. la (2)).

TEOREMA 3. *Siano X ed Y spazi di Banach: supponiamo che*

(1) *X sia riflessivo e separabile, Y sia separabile e di tipo (L) (secondo* [7]).

Sia Z come nel teorema 2. *Siano dati $a \in C(X)$, $p \geq 1$,*

(2) *$G: Z \to \mathcal{B}(X)$ fortemente continua;*

(3) $B \in L^\infty(\mathcal{B}(Y, X))$.
Sia M definito come nel teorema 2. *Siano dati inoltre*

(4) *$E \subset X$, non vuoto, chiuso e convesso;*

(5) *$t \to U(t)$, da $[0, T]$ nei sottinsiemi non vuoti, chiusi e convessi di Y, tale che esiste $\varphi \in L^p$ con $\| v \| \leq \varphi(t)$* q. o. *in $[0, T]$ se $v \in U(t)$.*
Supponiamo che $N > 0$, e che

(6) $F = \{u \in L^p(Y) : \| u \| \leq N, u(t) \in U(t)$ q. o. *in* $[0, T], (Mu)(T) \in E\}$

sia non vuoto.

Siano R_F ed f come nel teorema 2, e supponiamo che ne valgano le (8), (9), (10).

Allora esiste $\bar{u} \in F$ *tale che per ogni* $u \in F$ *risulta* $\int_0^T f(t, (M\bar{u})(t),$ $\bar{u}(t))\, dt \leq \int_0^T f(t, (Mu)(t), u(t))\, dt.$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo q reale, $q > 1$. Sia $H: L^1(Y) \to L^q(X)$ come nella dimostrazione del teorema 2; per le (2), (3) si ha che $H \in \mathcal{B}(L^1(Y), L^q(X))$. Per la (1) H è dunque debolmente compatto tra $L^1(Y)$ ed $L^q(X)$. Per la (1) $L^1(Y)$ è spazio di Banach di tipo (L) con unità, allora per il teorema 7 di [7] e per un teorema di Dunford-Pettis ([8], teor. 1) si deduce che

(i) $M: (F,$ topologia debole di $L^1(Y)) \to L^q(X)$ è sequenzialmente continuo.

Proviamo ora che

(ii) F è debolmente compatto in $L^1(Y)$.

Infatti siano $F_1 = \{u \in L^p(Y): \|u\| \leq N, u(t) \in U(t)$ q. o. in $[0, T]\}$, $F_2 = \{u \in L^p(Y): (Mu)(T) \in E\}$. Per la (5) F_1 è convesso. Sia $u_n \in F_1$, $n = 1, 2, \ldots$, $u \in L^1(Y)$, $u_n \to u$ in $L^1(Y)$. Allora esiste $\{u_{n_k}\}$ estratta da $\{u_n\}$ tale che $u_{n_k}(s) \to u(s)$ q. o. in $[0, T]$, perciò, per la (5), $u(s) \in U(s)$ q. o. in $[0, T]$. Sempre per la (5) risulta $\|u_{n_k}(s)\| \leq \varphi(s)$ per ogni k e q. o. in $[0, T]$, pertanto $u_{n_k} \to u$ in $L^p(Y)$, e quindi $u \in F$. Allora F_1 è debolmente chiuso in $L^1(Y)$. Proviamo ora che F_1 è debolmente sequenzialmente compatto in $L^1(Y)$. Per il teorema 8 di [7] esiste, per la (1), una funzione $b: L^1(Y) \to L^1(\Omega, \mu)$, dove Ω è compatto e totalmente disconnesso, μ è una misura non negativa, e b è biunivoca, lineare, isometrica, e isomorfismo di reticolo. Basta dunque provare che $b(F_1)$ è debolmente sequenzialmente compatto in $L^1(\Omega, \mu)$. Allo scopo, siano $u \in L^1(Y)$, $I \in$ mis $([0, T])$. Allora esiste una successione di combinazioni lineari $u_n = \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k^{(n)} v_k^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, di quasi-unità $v_k^{(n)} \in L^1(Y)$ (v. [19], cap. XII, par. 6, per la terminologia: le quasi-unità sono dette «elementi caratteristici» in [7]), tale che $u_n \to u$ in $L^1(Y)$. Essendo $v_k^{(n)}$ quasi-unità per ogni k ed n, si ha che per quasi ogni $s \in [0, T]$ $v_k^{(n)}(s)$ è quasi-unità di Y. Inoltre posto $x_0(s) = 1$ per quasi ogni $s \in [0, T]$, 1 essendo un'unità di Y, si ha che x_0 è un'unità di $L^1(Y)$ (v. [7]); si verifica allora direttamente che $\chi_I v_k^{(n)} = \chi_I x_0 \wedge v_k^{(n)}$ per ogni k ed n. Dato che $\chi_I u_n \to \chi_I u$ in $L^1(Y)$, si ha

$$\sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k^{(n)} b(\chi_I x_0) \wedge b(v_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k^{(n)} b(\chi_I x_0 \wedge v_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k^{(n)} b(\chi_I v_k^{(n)}) =$$

$$= b\left(\chi_I \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k^{(n)} v_k^{(n)}\right) = b(\chi_I u_n) \to b(\chi_I u).$$

Da [7] si ha che l'insieme delle quasi-unità di $L^1(Y)$, cui appartiene $\chi_I x_0$, ha per immagine mediante b l'insieme di tutte le funzioni caratteristiche delle parti contemporaneamente chiuse ed aperte di Ω: pertanto per ogni k ed n esiste un insieme $\Omega_k^{(n)}$ chiuso ed aperto in Ω tale che $b(v_k^{(n)}) = \chi_{\Omega_k^{(n)}}$, ed inoltre esiste $\Omega(I)$ aperto e chiuso in Ω tale che $b(\chi_I x_0) = \chi_{\Omega(I)}$, per cui $b(\chi_I u) = \lim \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k^{(n)} \chi_{\Omega(I)} \wedge \wedge \chi_{\Omega_k^{(n)}} = \lim \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k^{(n)} \chi_{\Omega(I)} \chi_{\Omega_k^{(n)}} = \lim \chi_{\Omega(I)} b(u_n) = \chi_{\Omega(I)} b(u)$. Essendo b isometria, si ha anche $\int_I \| u(s) \| ds = \int_{\Omega(I)} | b(u) | d\mu$; per la stessa ragione si ha $\operatorname{mis} I = \mu(\Omega(I))$. Dato che il σ-anello dello spazio mensurale (Ω, μ) differisce solo per insiemi di misura μ nulla dalla classe delle parti di Ω contemporaneamente aperte e chiuse, si deduce che, per la (5), $b(F_1)$ è debolmente sequenzialmente compatto in $L^1(\Omega, \mu)$ ([2], IV.8.11), quindi ([2], V.6.1) F_1 è debolmente compatto in $L^1(Y)$. Sia ora H_T: $L^1(Y) \to X$ con $H_T(u) = (Hu)(T)$. Sia $Q: C(X) \to X$ con $Q(y) = y(T)$. Allora $H_T = QH$ però $Q \in \mathcal{B}(C(X), X)$ pertanto essendo $H \in \mathcal{B}(L^p(Y), C(X))$, si ha che H_T è continuo tra ($L^p(Y)$, topologia debole) ed (X, topologia debole).

Allora $H_T^{-1}(E) = F_2$ è, per la (4), debolmente chiuso in $L^p(Y)$ quindi la (ii) è provata.

Dalla (i) e dalla (ii) e per la (1) si deduce (per [2], V. 6.3.) che

(iii) M: (F, topologia debole di $L^1(Y)) \to L^q(X)$ è continuo.

Sia $h: M(F) \times F \to R^1$ come nel teorema 2. Con la stessa dimostrazione della (iii) nel teorema 2 si prova che

(iv) $u \to h(x, u)$ è quasi convessa e semicontinua inferiormente in (F, topologia di $L^1(Y)$), per ogni $x \in M(F)$.

Proviamo che

(v) $x \longrightarrow h(x, u)$ è semicontinua inferiormente in $(M(F)$, topologia di $L^q(X))$ uniformemente per $u \in F$.

Sia infatti $x_n \in M(F)$, $n = 1, 2, \dots, x \in M(F)$, con $x_n \longrightarrow x$ in $L^q(X)$; allora esiste $\{x_k\}$ estratta da $\{x_n\}$ tale che $x_k(s) \longrightarrow x(s)$ q. o. in $[0, T]$. Con la stessa dimostrazione usata per provare le (iv) del teorema 2 si ottiene la (v).

Dalle (ii), (iii) (iv), (v), per la (6) e per il teorema 1 si ha la tesi, c. v. d.

Consideriamo ora il caso $p > 1$.

TEOREMA 4. *Siano X, Y spazi di Banach, con*

(1) $$X \text{ separabile, } Y \text{ separabile e riflessivo.}$$

Siano dati Z e G come nel teorema 2: supponiamo che ne valga la (2). Siano $a \in C(X)$, $p > 1$, $p + q = pq$,

(2) $$B \in L^q(\mathcal{B}(Y, X));$$

(3) $$E \subset X, \text{ non vuoto, chiuso e convesso.}$$

$M : L^p(Y) \longrightarrow C(X)$ sia definito come nel teorema 2. Siano $R_0 \subset X$ non vuoto, $N > 0$; sia data l'applicazione $(t, x) \longrightarrow U(t, x)$, da $[0, T] \times R_0$ nei sottinsiemi non vuoti di Y, tale che, posto per ogni $\delta > 0$, $U(t, x, \delta) = \bigcup_{\|(s, y)-(t, x)\| \leq \delta} U(s, y)$, risulti

(4) $$\bigcap_{\delta>0} \overline{co}\, U(t, x, \delta) = U(t, x).$$

Supponiamo che

(5) *$B(s)\, U(s, y)$ sia relativamente compatto in X,* q. o. *in $[0, T]$ e per ogni $y \in R_0$;*

(6) *$F = \{u \in L^p(Y) : \|u\| \leq N, u(t) \in U(t, (Mu)(t))$* q. o. *in $[0, T]$, $(Mu)(T) \in E\}$ sia non vuoto.*

Siano dati R_F ed f come nel teorema 2: *supponiamone le* (8), (9), (10). *Allora la funzione* $u \longrightarrow \int_0^T f(t, (Mu)(t), u(t))\, dt$ *ha minimo assoluto in* F.

Dimostrazione. Proviamo che

(i) $M : (F$, topologia debole$) \longrightarrow C(X)$ è continuo.

Per la (1) e per il fatto che $p > 1$, basta provare la versione sequenziale della (i). Come nella dimostrazione del teorema 2 si ha che $M \in \mathcal{B}_0(L^p(Y), C(X))$ e che $M(F_1)$ è equicontinuo in $C(X)$ (si usano le (2) e (2) del teorema 2).

Inoltre, posto $F_1 = \{u \in L^p(Y) : \| u \| \leq N, u(t) \in U(t, (Mu)(t))$ q. o. in $[0, T]\}$ si ha che $M(F_1)(t)$ è relativamente compatto in X per ogni $t \in [0, T]$: infatti sia $\{f_n\}$ una successione in X^* con $f_n \longrightarrow f_0$ nella X-topologia di X^*, e sia $t \in [0, T]$. Posto $\overline{f}_n(s)(y) = f_n\, G(t, s)\, B(s)(y)$, $y \in X$, $s \in [0, t]$, $n = 1, 2, \ldots$, si ha che $\overline{f}_n(s) \in Y^*$ per ogni s ed n, e, per le (5) ed (1) (v. [4], corollario 3.2.), che $\overline{f}_n(s)\, v(s) \longrightarrow \overline{f}_0(s)\, v(s)$ q. o. in $[0, t]$, uniformemente per $v \in F_1$. Inoltre $\int_I | \overline{f}_n(s)\, v(s) |\, ds \leq$

$$\leq \int_I \| f_n \|\, \| G(t, s) \|\, \| B(s) \|\, \| v(s) \|\, ds \leq f^*\, G_0\, N \left(\int_I \| B(s) \|^q\, ds \right)^{1/q}, \text{dove}$$

f^* è una costante, per ogni $I \in \operatorname{mis}([0, T])$, per ogni n e per ogni $v \in F_1$. Allora per il teorema XI.10.22 di [9] si ha che $(f_n - f_0) \int_0^t G(t, s)\, B(s)\, v(s)\, ds \longrightarrow 0$ uniformemente per $v \in F_1$. Sempre per il corollario 3.2 di [4] e per la (1) si ha dunque la relativa compattezza di $M(F_1)(t)$ in X per ogni $t \in [0, T]$. Allora $M(F_1)$ è relativamente compatto in $C(X)$ ([5], teorema 7.5.7.). Sia $u_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, $u \in F$, $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(Y)$; allora $Mu_n \rightharpoonup Mu$ in $C(X)$ però esistono $y \in C(X)$ ed $\{u_{n_k}\}$ estratta da $\{u_n\}$ tali che $Mu_{n_k} \longrightarrow y$ in $C(X)$, cioè $Mu_{n_k} \longrightarrow Mu$, da cui la (i).

Proviamo ora che

(ii) F è debolmente compatto in $L^p(Y)$.

Per la (1) basta provare che F è debolmente sequenzialmente chiuso. Sia $u_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, $u \in L^p(Y)$, $u_k \rightharpoonup u$ in $L^p(Y)$. Allora

$\| u \| \leq N$, $(Mu_k)(T) \rightarrow (Mu)(T)$ per la (i), per cui, dalla (3), si ha che $(Mu)(T) \in E$. Sia $t_0 \in (0, T)$. Dalla equicontinuità di $M(F)$ provata nella (i) si ha che per ogni $\delta > 0$ esiste $\bar{\varepsilon}$ con $0 < \bar{\varepsilon} < \delta$ tale che $[t_0 - \bar{\varepsilon}, t_0 + \bar{\varepsilon}] \subset [0, T]$ e $\| (Mu)(t_0) - (Mu_k)(t) \| \leq \delta$ per ogni $t \in [t_0 - \bar{\varepsilon}, t_0 + \bar{\varepsilon}]$ e per k abbastanza grande (in dipendenza di δ). Allora per gli stessi k e q. o. in $[t_0 - \bar{\varepsilon}, t_0 + \bar{\varepsilon}]$ si ha $u_k(t) \in U(t_0, (Mu)(t_0), \delta)$. Quindi per gli stessi k e per ogni ε con $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ risulta $(1/2\varepsilon) \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_k(s)\, ds \in \overline{co}\, U(t_0, (Mu)(t_0), \delta)$, da cui $(1/2\varepsilon) \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u(s)\, ds \in \overline{co}\, U(t_0, (Mu)(t_0), \delta)$ e quindi $u(t_0) \in \overline{co}\, U(t_0, (Mu)(t_0), \delta)$ per ogni $\delta > 0$ e per quasi ogni $t_0 \in [0, T]$. Allora dalla (4) si conclude che $u \in F$, per cui la (ii) è provata.

Sia h come nella dimostrazione del teorema 2: come in tale teorema se ne provano le (iii) e (iv), che con le (i) e (ii) e con la (6) forniscono la tesi, c. v. d.

Consideriamo infine il caso $p = \infty$.

TEOREMA 5. *Siano X, Y spazi di Banach: supponiamo che*

(1) *Y sia separabile e riflessivo; X sia separabile.*

Sia data G come nel teorema 2 e verificante le stesse ipotesi che in tale teorema. Sia

(2) *$B \in L^q(\mathcal{B}(Y, X))$ per qualche q reale e maggiore di 1.*

Sia $M : L^\infty(Y) \rightarrow C(X)$ definito come nel teorema 4. Siano poi $N > 0$,

(3) *$E \subset X$, non vuoto, chiuso e convesso;*

(4) *$t \rightarrow U(t)$, da $[0, T]$ nei sottinsiemi non vuoti, chiusi e convessi di Y;*

(5) *$B(s)\, U(s)$ relativamente compatto in X,* q. o. *in* $[0, T]$;

(6) $F = \{u \in L^\infty(Y) : \| u \| \leq N,\ u(t) \in U(t)$ q. o. *in* $[0, T],\ (Mu)(T) \in E\}$

sia non vuoto.

Sia f come nel teorema 2, e supponiamo che ne soddisfi le ipotesi. Allora la funzione $u \to \int_0^T f(t, (Mu)(t), u(t))\, dt$ *ha minimo assoluto in F.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p + q = pq$. Proviamo che

(i) F è debolmente compatto in $L^p(Y)$.

Infatti, dalla (1), si ha che $L^p(Y)$ è separabile e riflessivo (v. [1]); per le (3) e (4) F è convesso; sia $u_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, $u_n \to u$ in $L^p(Y)$; allora esiste $\{u_{n_k}\}$ estratta da $\{u_n\}$ tale che $u_{n_k}(s) \to u(s)$ q. o. in $[0, T]$, pertanto, per la (4), $u(s) \in U(s)$ q. o. in $[0, T]$ e $\| u(s) \| \leq N$ q. o. in $[0, T]$, per cui $u \in L^\infty(Y)$, ed anche $\| u \| \leq N$. Inoltre $G(T, s) B(s) u_{n_k}(s) \to G(T, s) B(s) u(s)$ q. o. in $[0, T]$, e $\| G(T, s) B(s) u_{n_k}(s) \| \leq N G_0 \| B(s) \|$ per ogni k e q. o. in $[0, T]$, dove G_0 è una costante, quindi $(Mu)(T) \in E$ per la (3). Allora $u \in F$: la (i) è quindi provata.

Posto $F_1 = \{u \in L^\infty(Y) : \| u \| \leq N, u(t) \in U(t) \text{ q. o. in } [0, T]\}$, proviamo che

(ii) $M : (F_1$, topologia debole di $L^p(Y)) \to C(X)$ è continuo.

Osserviamo che $M(F)$ è, per le ipotesi fatte su G, equicontinuo in $[0, T]$; la dimostrazione è la stessa che nel teorema 2. Analogamente si ha che $M(F_1)(t)$ è relativamente compatto in X per ogni $t \in [0, T]$. Di qui, essendo, per la (2), $M \in \mathcal{B}_0(L^p(Y), C(X))$, quindi continuo tra ($L^p(Y)$, topologia debole) e ($C(X)$, topologia debole), si ha la (ii). La tesi segue come nel teorema precedente, per la (i), la (ii), e dalla (6), c. v. d.

NOTA 1. Un altro caso importante, oltre a quello dal teorema 3, nel quale l'ipotesi « $B(s)\, U(s)$, q. o. in $[0, T]$, sia relativamente compatto in X » si può evitare, si ottiene supponendo $p = \infty$ ed Y di tipo (M) con unità (secondo [16]): basta applicare, come nel teorema 3, lo stesso teorema di Dunford-Pettis ad $L^\infty(Y)$. In questo caso però la difficoltà consiste nel trovare condizioni sufficientemente generali sui dati che assicurino la debole (sequenziale) compattezza di F in $L^\infty(Y)$.

COROLLARIO. *Nelle ipotesi di uno qualsiasi dei precedenti teoremi 2, 3, 4, 5, l'insieme W dei punti di minimo assoluto in F per* *la funzione* $u \longrightarrow \int_0^T f(t, (Mu)(t), u(t))\, dt$ *è sequenzialmente compatto (nella topologia relativamente alla quale* F *è sequenzialmente compatto).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{u_k\}$ una successione in W, e, per la compattezza sequenziale di F, sia $\{u_j\}$ estratta da $\{u_k\}$ con $u_j \rightharpoonup u \in F$. Posto $g(u) = \int_0^T f(t, (Mu)(t), u(t))\, dt$, per la semicontinuità inferiore sequenziale di g si ha che $\liminf_{j \to \infty} g(u_j) = \inf\{g(v) : v \in F\} \geq g(u)$, per cui $u \in W$, c.v.d.

NOTA 2. Il precedente corollario consente la risoluzione di più generali problemi variazionali di quelli fin qui trattati (per esempio problemi di « minimax)».

NOTA 3. Sia data la famiglia di problemi di Cauchy in X

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) + C(t); \\ x(0) = x^0, \end{cases}$$

con $A : [0, T] \longrightarrow \mathcal{L}(X)$, $C : [0, T] \longrightarrow X$, $u \in L^p(Y)$, $x^0 \in X$ (e B come nei teoremi precedenti). Sono allora note (v. per esempio (17]) condizioni sufficienti perchè esista la funzione di Green G per il problema $(*)$, che soddisfi la (2) del teorema 2 (la quale si riferisce pertanto, in tali condizioni, a funzioni a valori operatori assai più generali delle funzioui di Green). Pertanto i teoremi precedenti generalizzano alcuni risultati di [13] e [14]. In questo caso $(Mu)(t) = G(t, 0)\, x^0 + \int_0^t G(t, s)\, C(s)\, ds + \int_0^t G(t, s) B(s) u(s)\, ds$: si tratta quindi di « mild solutions » del problema $(*)$.

NOTA 4. I precedenti teoremi si applicano anche, per esempio, al più generale problema seguente: minimizzare la funzione $u \longrightarrow \int_0^T f(t, (Mu)(t), (Lu)(t))\, dt + f_0((Mu)(s))$, nell'insieme $F = \{u \in L^p(Y) :$

$\|u\| \leq N$, $u(t) \in U(t)$ q.o. in $[0, T]$, $(Mu)(t) \in E$ per ogni $t \in I\}$, dove $L \in \mathcal{B}(L^p(Y))$, $I \subset [0, T]$, ed $s \in [0, T]$ sono tra i dati del problema (v. teorema 1).

Nota 5. Una condizione sufficiente perchè si verifichi, nella (5) del teorema 2, che « $\bigcup_{0 \leq s \leq t} U(s)$ sia debolmente sequenzialmente compatto per ogni $t \in [0, T]$ », ferme restando le altre ipotesi, è che $s \longrightarrow U(s)$ sia debolmente semicontinua superiormente in $[0, T]$ (v. teorema 3 nel cap. VI di [12]).

Nota 6. Se, nel teorema 4, i vincoli non dipendono dagli stati cioè se l'applicazione $(t, x) \longrightarrow U(t, x)$ è sostituita, nei dati, dalla $t \longrightarrow U(t)$, il teorema sussiste ancora con i nuovi vincoli sostituendo alla (4) la seguente

(4') per ogni $t \in [0, T]$, $U(t)$ è non vuoto, chiuso e convesso;

(e modificando in modo ovvio le (5) e (6)), ferme restandone le altre ipotesi.

È immediato verificare infatti che F, con i nuovi vincoli, è debolmente sequenzialmente chiuso in $L^p(Y)$. Quindi nessuna ipotesi di « regolarità di movimento » è necessaria sui vincoli per la validità del teorema 4 se essi non dipendono dagli stati.

Nota 7. È interessante osservare che il teorema 4 non dipende essenzialmente dalla riflessività di Y, nel senso che (supponendo per semplicità che i vincoli $t \longrightarrow U(t)$ non dipendano dagli stati), esso sussiste se, lasciandone invariate le altre ipotesi, si sostituiscono rispettivamente le (1), (4), con le seguenti

(1') X sia separabile, Y^* separabile e di tipo D (secondo [11]);

(4') $t \longrightarrow U(t)$, da $[0, T]$ nei sottoinsiemi non vuoti, chiusi e convessi di Y sia tale che per quasi ogni $t_0 \in (0, T)$ esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $\overline{co} \bigcup_{|t - t_0| \leq \varepsilon_0} U(t)$ sia debolmente sequenzialmente compatto in Y.

(La (1') è più generale della (1), infatti $Y^* = l^1$ la verifica senza verificare la (1). La (4') è meno generale della (4) in questo caso (v. nota 6), ed è verificata se $U(s)$ è debolmente sequenzialmente compatto per ogni $s \in [0, T]$, e se $s \longrightarrow U(s)$ è debolmente semicontinua superiormente in $[0, T]$ (v. nota 5)).

Infatti basta provare che, con le nuove ipotesi, F_1 è debolmente sequenzialmente compatto in $L^p(Y)$. Sia $c\colon L^p(Y) \to L^p(Y)^{**}$ l'isomorfismo canonico; allora, posto $S_N = \{u \in L^p(Y) : \|u\| \leq N\}$, si ha $c(F_1) \subset c(S_N)$, che ha $L^p(Y)^*$-chiusura in $L^p(Y)^{**}$ uguale a $S_N^{**} = \{v \in L^p(Y)^{**} : \|v\| \leq N\}$, che è $L^p(Y)^*$-compatto in $L^p(Y)^{**}$, pertanto $c(F_1)$ è $L^p(Y)^*$-relativamente compatto in $L^p(Y)^{**}$. Sia $u_n \in F_1$, $n = 1, 2, \dots$, allora esiste $\{u_j\}$ estratta da $\{u_n\}$ tale che $c(u_j) \to u_0$, nella $L^p(Y)^*$-topologia di $L^p(Y)^{**}$ (infatti per la (1′) $L^p(Y)^*$ è separabile perchè $L^p(Y)^* = L^q(Y^*)$ (v. [11]), quindi $(c(F_1)$, $L^p(Y)^*$-topologia di $L^p(Y)^{**})$ è metrizzabile).

Allora, per quasi ogni $t_0 \in (0, T)$, con ε_0 scelto in modo che si verifichi la (4′), e con $t_0 \pm \varepsilon_0 \in (0, T)$, si ha in particolare che $\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} bu_j(t)\,dt \to \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_0(t)(b)\,dt$ se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e per ogni $b \in Y^*$. $u_0\colon [0, T] \to Y^{**}$ è dunque (v. [1]) scalarmente misurabile e tale che $t \to \|u_0(t)\| \in L^p$. Inoltre per ogni j e per ogni ε con $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ risulta $(1/2\varepsilon)\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_j(s)\,ds \in$ $\in \overline{co}\, U(t_0, \varepsilon)$. Sia $\iint_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_0(t)\,dt$ l'integrale debole (secondo Gelfand-Dunford). Si ottiene $\lim_{\varepsilon \to 0+} (1/2\varepsilon)\left(\iint_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_0(s)\,ds\right)(b) = \lim_{\varepsilon \to 0+} (1/2\varepsilon)\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_0(s)(b)\,ds =$ $= u_0(t_0)(b)$ per ogni $b \in Y^*$ e per quasi ogni $t_0 \in (0, T)$ (in dipendenza di b), e quindi, scrivendo la precedente uguaglianza per ogni b di una parte numerabile densa in Y^*, si trova $\lim_{\varepsilon \to 0+} (1/2\varepsilon)\iint_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_0(s)\,ds =$ $= u_0(t_0)$ per quasi ogni $t_0 \in (0, T)$. Per la (4′), fissato ε con $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esiste $\{u_k\}$ estratta da $\{u_j\}$ tale che $\left\{(1/2\varepsilon)\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_j(s)\,ds\right\}$ è debolmente convergente ad un limite a_ε, quindi $(1/2\varepsilon)\iint_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_0(s)\,ds = a_\varepsilon \in \overline{co}\, U(t_0, \varepsilon_0)$.

Allora $u_0(t_0) \in \overline{co}\, U(t_0, \varepsilon_0)$ per quasi ogni $t_0 \in [0, T]$. Quindi u_0 è debolmente misurabile tra $[0, T]$ ed Y, il quale è separabile, quindi per il teorema di Pettis si conclude che $u_0 \in L^p(Y)$, da cui la debole sequenziale compattezza di F_1 in $L^p(Y)$.

NOTA 8. L'ipotesi, nella (9) del teorema 2, che $u \longrightarrow f(t, x, u)$ sia convessa per quasi ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $x \in R_F$, può essere sostituita da ogni ipotesi su $u \longrightarrow f(t, x, u)$ (più debole della convessità) che assicuri che $u \longrightarrow h(x, u)$ sia quasi convessa in F per ogni $x \in M(F)$. L'ipotesi di convessità di E (che implica quella di F) nei teoremi 3 (ipotesi (4)) e 4 (ipotesi 3)) si può eliminare, come risulta dalle relative dimostrazioni, se $u \longrightarrow \int_0^T f(t, x(t), u(t))\, dt$ verifica le opportune ipotesi in un convesso contenente F.

NOTA 9. Se nel teorema 2 si suppone che

(8′) $t \longrightarrow f(t, x(t), u(t)) \in L^1$ per ogni $x \in M(F)$ e per ogni $u \in L^1(Y)$ con $\| u \| \leq N$;

(9′) $u \longrightarrow f(t, x, u)$ sia convessa e continua in Y per ogni $(t, x) \in \in [0, T] \times R_F$;

(10′) $x \longrightarrow f(t, x, u)$ sia continua in R_F, uniformemente per $(t, u) \in [0, T] \times Y$;

e si sopprimono le (8), (9), (10), ferme restandone le altre ipotesi, allora si possono ottenere ancora le (iii) e (iv). Infatti: per dimostrare la (iv) poniamo $K(t) = M(F)(t)$, $0 \leq t \leq T$. Per le (i) ed (ii) si ha che $K(t)$ è compatto per ogni $t \in [0, T]$. Sia S una sfera aperta in X, sia $t_0 \in [0, T]$ con $K(t_0) \subset S$; allora $d(K(t_0), \partial S) > 0$; per l'equicontinuità di $M(F)$ in $[0, T]$ si ha che $K(t) \subset S$ se $| t - t_0 |$ è abbastanza piccolo.

Quindi (v. [12], cap. VI) K è semicontinua superiormente in $[0, T]$ e pertanto $R_F = K([0, T])$ è compatto. Allora $x \longrightarrow f(t, x, u)$ è uniformemente continua in R_F, uniformemente per $(t, u) \in [0, T] \times F$ per la (10′), da cui la (iv) (in forma assai più forte del necessario). Infine basta osservare che le (8′) e (10′) assicurano la (iii) (in forma assai più forte del necessario), per una immediata generalizzazione vettoriale del teorema 2.1. di [6] (v. anche [18], par 19.2). Le stesse conclusioni si possono ottenere con altre varianti e raffinamenti delle (8′), (9′), (10′). Infine una condizione sufficiente perchè si verifichi la (10) del teorema 2 è che esista $c \in L^1$ tale che risulti, q.o. in $[0, T]$, $f(t, x(t), u(t)) \geq c(t)$ per ogni $(x, u) \in M(F) \times F$.

NOTA 10. Sono note condizioni necessarie e sufficienti perchè sia verificata l'ipotesi di controllabilità (la (7) del teorema 2, e analoghe dei teoremi 3, 4, 5) (v. [23]), in casi particolari.

ESEMPI. Il seguente è un esempio di applicazione del teorema 3. Siano $n \geq 2$, Ω aperto limitato in R^n. Consideriamo (per ogni u) l'equazione, supposta parabolica

$$\partial x/\partial t = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t, s)\, \partial^2 x/\partial s_i\, \partial s_k + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, s)\, \partial x/\partial s_i + c(t, s)\, x +$$
$$+ \int_{\Omega} K(t, s, \omega)\, u(t, \omega)\, d\omega + d(t, s),$$

e le condizioni

$$x(0, s) = y(s), \quad s \in \Omega;$$

$$(\partial x/\partial n)(t, s) = 0, \quad s \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq T,$$

dove $\partial/\partial n$ è la derivata normale, $\partial\Omega$, a_{ik}, b_i $(i, k = 1, \ldots, n)$, c, d, sono abbastanza regolari insieme con $(t, s) \to K(t, s, \omega)$ in $[0, T] \times \bar{\Omega}$ cosicchè esista una sola soluzione (per ogni u) del precedente problema rappresentabile mediante la funzione di Green la quale verifichi la (2) del teorema 3 (la (2) del teorema 2 è verificata se $\partial\Omega$ è abbastanza regolare e se a_{ik}, b_i $(i, k = 1, \ldots, n)$, c, d, $(t, s) \to K(t, s, \omega)$ sono lipschitziani (v. [17] e [20])). Siano

$$Y = L^1(\Omega), \quad X = H^{2,2}(\Omega), \quad u \in L^1(L^1(\Omega)).$$

La (3) del teorema 3 è verificata se

$$s \to K(t, s, \omega) \in H^{2,2}(\Omega); \ \omega \to K(t, s, \omega) \in L^\infty(\Omega);$$

$$t \to \operatorname*{ess.\,sup.}_{\omega \in \Omega} |K(t, s, \omega)| \in L^\infty.$$

Nel seguito C_1, C_2, C_3 indicano date costanti. Sia

$E = \{z \in H^{2,2}(\Omega):$

$$\left| \int_\Omega \left[\sum_{i,k=1}^{n} p_{ik}(s) z_{ik}(s) + \sum_{i=1}^{n} p_i(s) z_i(s) + p(s) z(s) + p_0(s) \right] ds \right| \leq C_1 \}$$

non vuoto, dove p_{ik}, $p_i (i, k = 1, \dots, n)$, p, p_0 sono date funzioni di $L^2(\Omega)$.

Allora la (4) del teorema 3 è verificata. Sia $U(t) = \{v \in L^1(\Omega):$ $g(t, v(s)) \leq 0$ q.o. in $\Omega\}$ non vuoto per ogni $t \in [0, T]$, dove supponiamo $x \longrightarrow g(t, x)$ convessa, $g(t, x) \geq C_2\, q(t) + C_3 \,|\, x \,|$, con $q \in L^1$, $q(t) \leq 0$ q.o. in $[0, T]$, $C_2\, C_3 \neq 0$. Allora la (5) del teorema 3 è verificata.

Sia infine

$$f(t, x, u) = \int_\Omega f_1(t, x(s), u(s))\, ds, \quad \text{dove supponiamo che}$$

$$f_1(t, x, u) \geq f_0(t) \text{ per ogni } (x, u), \text{ per qualche } f_0 \in L^1;$$

$u \longrightarrow f_1(t, x, u)$ sia convessa, mentre $x \longrightarrow f_1(t, x, u)$ sia semicontinua inferiormente, uniformemente rispetto ad u. Allora le (8), (9), (10) del teorema 2 sono verificate.

Analoghi esempi si possono costruire riguardo agli altri teoremi del presente lavoro. In particolare, si può dare un analogo esempio di applicazione per il teorema 2, assumendo $Y = L^p(\Omega)$, $X = C^0(\overline{\Omega})$ (funzioni continue in $\overline{\Omega}$), $p > 1$, e supponendo che K (con le notazioni dell'esempio precedente) definisca $B(t)$ come operatore lineare limitato da $L^p(\Omega)$ in $C^0(\overline{\Omega})$, e che $U(t)$ sia definito analogamente (consideriamo per semplicità solo il caso di vincoli indipendenti dagli stati); se si suppone che $s \longrightarrow K(t, s, \omega)$ sia continuo in $\overline{\Omega}$, uniformemente rispetto ad ω, la (6) del teorema 2 risulta verificata. Infine i precedenti teoremi si possono anche applicare a problemi di controllo descritti da equazioni integrali, o integro-differenziali.

BIBLIOGRAFIA

[1] DIEUDONNÈ, *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym* (V). Can. J. Math. 3 (1951), 129-139.

[2] DUNFORD-SCHWARTZ, *Linear Operators*, part. I. Interscience, 1958.

[3] ZOLEZZI, *Teoremi di esistenza nella teoria dei controlli ottimi in dimensione finita.* Rend. Sem. Mat. Padova (1967), vol. 34, 163-176.

[4) PHILLIPS, *On linear transformations.* Trans. A. M. S. vol. 48 (1940), 516-541.

[5] DIEUDONNÉ, *Foundations of modern analysis.* Academic Press, 1960.

[6] KRASNOSEL'SKII, *Topological methods in the theory of non linear integral equations.* Pergamon Press, 1964.

[7] KAKUTANI, *Concrete representation of abstract* (L)*-spaces and the mean ergodic theorem.* Ann. of Math. vol. 42 n. 2 (1941), 523-537.

[8] GROTHENDIECK, *Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$. Can. J. Math. vol. 5 (1953), 129-173.

[9] GRAVES, *Theory of functions of a real variable.* II edizione. McGraw-Hill, 1956.

[10] BROWDER, *Remarks on the direct methods of the calculus of variations.* Arch. Rat. Mech. An. 20 (1965), 251-258.

[11] BOCHNER - TAYLOR, *Linear Functionals on certain spaces of abstractly-valued functions.* Ann. of Math. vol. 39 n. 4 (1938), 913-944.

[12] BERGE, *Topological spaces,* Oliver and Boyd, 1963.

[13] FRIEDMAN, *Optimal control for parabolic equations.* J. Math. An. Appl. vol. 18 n. 3 (1967), 479-491.

[13] FRIEDMAN, *Optimal control in Banach spaces.* J. Math. An. Appl. vol. 19 n. 1 (1967), 35-55.

[14] BALAKRISHNAN, *Optimal control problems in Banach spaces* J. Siam. Control, ser. A, vol. 3 n. 1 (1965) 152-180.

[15] NASHED, *Supportably and weakly convex functionals with applications to approximation theory and nonlinear programming.* J. Math. An. Appl. 18 (1967) 504-521.

[16] KAKUTANI, *Concrete representation of abstract* (M)*-spaces.* Ann. of. Math. 42 (1941), 994-1024.

[17] POULSEN, *Evolutionsgleichungen in Banach-Raeumen.* Math. Zeitschrift. 90 (1965), 286-309.

[18] VAINBERG, *Variational methods for the study of nonlinear operators.* Holden-Day, 1964.

[19] YOSIDA, *Functional Analysis.* Springer, 1966.

[20] FRIEDMAN, *Remarks on nonlinear parabolic equations.* Proceedings of Symp. in Applied. Math. vol. XVII (1964), 3-23

[21] LIONS, *On some optimization problems for linear parabolic equations.* Functional Analysis and Optimization, edited by E. Caianiello, 115-131. Academic Press, 1966.

[22] LIONS, *Optimisation pour certaines classes d'équations d'évolutions non linéaires.* Ann. Mat. Pura e Appl. 72 (1966), 275-294.

[23] CONTI, *On some aspects of linear control theory.* Math. Theory of Control. Proc. of a Conference held at the U. S. C. L. A. (1967), edited by Balakrishnan and Neustadt. Academic Press 1967, 285-300.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 30 marzo 1968.