# RENDICONTI del SEMINARIO MATEMATICO della UNIVERSITÀ DI PADOVA

# TULLIO ZOLEZZI

# Teoremi di esistenza nella teoria dei controlli ottimi in dimensione infinita

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 72-96

<a href="http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\_1968\_41\_72\_0">http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\_1968\_41\_72\_0</a>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

# $\mathcal{N}_{\text{UMDAM}}$

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques http://www.numdam.org/

# TEOREMI DI ESISTENZA NELLA TEORIA DEI CONTROLLI OTTIMI IN DIMENSIONE INFINITA

# TULLIO ZOLEZZI\*)

SUMMARY. We prove some existence theorems in infinite dimensional optimal control theory, in the following hypotheses:

- (i) the admissible controls are in some subset of  $L^p([0,T],Y)$   $(1 \le p \le \infty)$ , Y a given Banach space, satisfying some constraints;
- (ii) the states are of the form  $x(t) = a(t) + \int_0^t G(t, s) B(s) u(s) ds \in X, 0 \le t \le T$ , where u is the control, X a given Banach space, and a weakly convergent sequence of controls generates a strongly convergent sequence of states;
- (iii) assuming controllability, we minimize a real function  $u \longrightarrow \int_0^t f(t,x(t),u(t)) dt$  where f is convex with respect to the control u, lower semicontinuous with respect to x and to u, and measurable with respect to t. We obtain in this way existence of optimal controls for some classes of partial differential equations, or integral equations; some simple examples are also given. These results are independent on the known existence theorems.

## Introduzione.

In questo lavoro dimostro alcuni teoremi di esistenza del minimo per problemi di controllo in dimensione infinita. Il metodo usato è lo stesso di [3], i cui risultati vengono qui generalizzati e migliorati

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Genova.

<sup>\*)</sup> Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 9 del comitato nazionale per la matematica del C. N. R.

ampiamente. I teoremi dimostrati riguardano essenzialmente il seguente problema: minimizzare una funzione reale della forma

$$u \longrightarrow \int_{0}^{T} f(t, (Mu)(t), u(t)) dt,$$

dove

$$(Mu)(t) = a(t) + \int_{0}^{t} G(t, s) B(s) u(s) ds \in X, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

nell'insieme

$$F = \{u \in L^p(Y) : ||u|| \le N, u(t) \in U(t) \text{ q. o. in } [0, T], (Mu)(T) \in E\}$$

(v. più oltre per le notazioni); X ed Y sono dati spazi di Banach, si assume la controllabilità, e T>0 è fissato. I risultati si riferiscono ad un'ampia classe di spazi di Banach, riguardano i casi  $p=1,1< p<\infty, p=\infty$ , comprendono generalizzazioni e varianti del problema enunciato, e generalizzano ampiamente alcuni enunciati di [13] e di [14]. Problemi analoghi per equazioni differenziali più generali e per funzionali più particolari di quelli qui considerati (o senza esplicito riferimento a funzionali da minimizzare) sono stati studiati in [21] e [22].

NOTAZIONI. Se X,Y sono spazi di Banach,  $\mathcal{L}(X,Y)$  è lo spazio vettoriale degli operatori lineari con dominio in X e rango in Y;  $\mathcal{B}(X,Y)$  è lo spazio di Banach degli operatori lineari limitati di X in Y;  $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$ ;  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X) \cdot \mathcal{B}_0(X,Y)$  è lo spazio degli operatori affini limitati di X in Y.

Sia D uno spazio di Banach, sia T>0: allora se  $p\geq 1$  ed I è un sottinsieme misurabile secondo Lebesgue di  $[0,T],L^p(I,D)$  è lo spazio di Banach delle (classi di) funzioni  $f:I\to D$  tali che  $t\to \|f(t)\|^{p-1}f(t)$  è integrabile in I secondo Bochner rispetto

alla misura di Lebesgue, con la norma 
$$\left(\int\limits_0^T \|f(t)\|^p\ dt\right)^{1/p}; L^p(D) =$$
 $= L^p([0,T],D).$  Analogamente è definito  $L^\infty(I,D)$  ed  $L^\infty(D).$ 

Tutti i termini topologici senza ulteriori precisazioni s'intendono riferiti alla topologia forte dello spazio di Banach D.

C(D) è lo spazio di Banach delle funzioni  $f:[0,T] \to D$ , continue in [0,T], con la norma  $\sup_{0 \le t \le T} \|f(t)\|$ .

 $D^*$  è il coniugato di D.

 $\|\cdot\|$  indica la norma,  $\to$  la convergenza forte,  $\to$  la convergenza debole, in ogni spazio di Banach considerato.

Sia D uno spazio vettoriale, W un convesso non vuoto di D; una funzione  $f \colon W \to R^1$  si dice quasi convessa in W se  $\{x \in W \colon f(x) \le t\}$  è convesso per ogni  $t \in R^1$ .

Se  $D_2$  è uno spazio di funzioni definite in [0,T], se  $K\subset D_1$ , se  $M:D_1\to D_2$ , e se  $t\in [0,T], M(K)(t)=\{y:y=(Mx)(t),x\in K\}.$  Mis ([0,T]) è la classe dei sottoinsiemi di [0,T] che sono misurabili secondo Lebesgue: mis I è la misura di Lebesgue di I,CI è il complementare di  $I,\chi_I$  è la funzione caratteristica di I. Se D è uno spazio di Banach ed A,B ne sono sottinsiemi,  $\partial A$  è la frontiera di A,d(A,B) è la distanza di A da B,  $\overline{\text{co}}$  A è l'inviluppo chiuso convesso di A.

Sussiste la seguente variante di un noto teorema di Carathéodory.

LEMMA. Siano  $f_n \in L^1$ , n = 1, 2, ...; supponiamo che (a)  $s \to \lim \inf f_n(s) \in L^1$ ;

(b)  $\liminf_{\min I \to 0} \int_{I} f_n(s) ds \ge 0$ , uniformemente rispetto ad n.

Allora 
$$\int_{0}^{T} \liminf f_{n}(s) ds \leq \lim \inf \int_{0}^{T} f_{n}(s) ds.$$

DIMOSTRAZIONE. La (b) equivale ad affermare che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $\int_I f_n(s) ds \ge -\varepsilon$  se mis  $I < \delta$ , per ogni n. Dato

 $\varepsilon > 0$ , poniamo, per ogni naturale  $r, I_r = \{s \in [0, T] : f_n(s) > \lim \inf f_n(s) - \varepsilon \text{ se } n \ge r\}.$ 

Allora  $\lim \min CI_r = 0$ , quindi, per la (b), esiste r tale che risulta  $\int_{\mathcal{O}I_r^-} f_n(s) \, ds \ge -\varepsilon$  per ogni n, e, per la (a),  $\int_{\mathcal{O}I_r^-} \lim \inf f_n(s) \, ds < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{Allora} \int_{0}^{1} f_{n}\left(s\right) \, ds &= \int_{I_{r}^{-}} f_{n}\left(s\right) \, ds + \int_{OI_{r}^{-}} f_{n}\left(s\right) \, ds \geq \int_{I_{r}^{-}} \lim \, \inf f_{n}\left(s\right) \, ds - \\ &- \varepsilon T + \int_{OI_{r}^{-}} f_{n}\left(s\right) \, ds + \int_{OI_{r}^{-}} \lim \, \inf f_{n}\left(s\right) \, ds - \int_{OI_{r}^{-}} \lim \, \inf f_{n}\left(s\right) \, ds \geq \\ &\geq \int_{0}^{T} \lim \, \inf f_{n}\left(s\right) \, ds - \varepsilon \left(T + 2\right), \, \, \operatorname{se} \, \, n > \overline{r}, \, \, \operatorname{c.} \, \operatorname{v.} \, \operatorname{d.} \end{aligned}$$

Sul seguente teorema (v. [15] e [3]) (valido in ipotesi sostanzialmente più generali: v. [10]) si fonda il metodo usato nel presente lavoro. La versione sequenziale del teorema è enunciata e dimostrata in parentesi.

TEOREMA 1. Siano  $X_1$  ed  $X_2$  spazi normati; sia  $F \subset X_1$ , con

- (i) F non vuoto e convesso. Siano
- (ii)  $M: (F, topologia debole) \rightarrow X_2$  (sequenzialmente) continuo;
- (iii)  $L \in \mathcal{B}(X_1)$ ;  $h: L(F) \times M(F) \longrightarrow R^1$ , tale che
- (iv)  $u \rightarrow h(u, v)$  é quasi convessa e semicontinua inferiormente in L(F) per ogni  $v \in M(F)$ ;
- (v)  $v \rightarrow h(u, v)$  è semicontinua inferiormente in M(F), uniformemente per  $u \in L(F)$ .

Allora  $u \rightarrow h(Lu, Mu)$  è debolmente (sequenzialmente) semicontinua inferiormente in F.

DIMOSTRAZIONE. Posto g(u, v) = h(Lu, Mv) si ha  $g: F \times F \rightarrow R^1$ . Per le (iii), (iv), si verifica subito che

- (1)  $u \rightarrow g(u, v)$  è quasi convessa e semicontinua inferiormente in F per ogni  $v \in F$ .
  - Si ha poi che
- (2)  $v \rightarrow g(u, v)$  è debolmente (sequenzialmente) semicontinua inferiormente in F, uniformemente per  $u \in F$ .

(Infatti se  $v_n \in F$ , n = 1, 2, ..., se  $v \in F$  e se  $v_n \longrightarrow v$ , per la (ii) si ha  $Mv_n \longrightarrow Mv$ , e per la (v)  $\liminf_{n \to \infty} g(u, v_n) \ge g(u, v)$ , uniformemente

per  $u \in F$ ). Infatti siano  $v_0 \in F$ ,  $\varepsilon > 0$ ; dalla (v) esiste a > 0 tale che  $||Mv - Mv_0|| < a$  implica  $h(Lu, Mv) \ge h(Lu, Mv_0) - \varepsilon$ , uniformemente per  $u \in F$ ; per la continuità di M, esiste un intorno debole U di  $v_0$  tale che  $||Mv - Mv_0|| < a$  per ogni  $v \in U \cap F$ : allora  $h(Lu, Mv) \ge h(Lu, Mv_0) - \varepsilon$  per ogni  $v \in U \cap F$ , uniformemente per  $u \in F$ .

(Sia  $u_n \in F$ ,  $n = 1, 2, ..., u_0 \in F$ ,  $u_n \rightarrow u_0$ . Sia  $g(u_n, u_0) \rightarrow r$ , sia t > r, sia  $S_t = \{u \in F : g(u, u_0) \le t\}$ . Per la (1),  $S_t$  è debolmente chiuso; per n abbastanza grande,  $u_n \in S_t$  quindi  $u_0 \in S_t$  da cui  $g(u_0, u_0) \le t$ , da cui  $g(u_0, u_0) \le r$ , quindi  $\lim_{n \to \infty} \inf g(u_n, u_0) \ge g(u_0, u_0)$ . Poniamo f(u) = h(Lu, Mu). Si ha  $f(u_n) = g(u_n, u_0) + g(u_n, u_n) - g(u_n, u_0)$  per ogni n; per la (2) si ha che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste k tale che  $g(u_n, u_n) - g(u_u, u_0) > -\varepsilon$  per n > k da cui  $f(u_n) \ge g(u_n, u_0) - \varepsilon$  se n > k; essendo  $\liminf_{n \to \infty} g(u_n, u_0) \ge g(u_0, u_0)$ , si ha che  $\liminf_{n \to \infty} f(u_n) \in R^1$  e che  $\liminf_{n \to \infty} f(u_n) \ge g(u_0, u_0) - \varepsilon$ , quindi  $\liminf_{n \to \infty} f(u_n) \ge f(u_0)$ .

Poniamo f(u)=h (Lu,Mu). Sia  $c\in R^1$ : proviamo che  $M_c=\{u\in F: f(u)\leq c\}$  è debolmente chiuso in F. Sia  $u_0$  nella chiusura debole di  $M_c$  in F. Allora per la (2) esiste per ogni  $\varepsilon>0$  un intorno debole U di  $u_0$  tale che  $g(u,v)\geq g(u,u_0)-\varepsilon$  se  $u\in F,v\in U\cap F$ . Sia  $c_1=c+\varepsilon$ , sia  $M_1=\{u\in F: g(u,u_0)\leq c_1\}$ . Per la (1) e per la  $(i),M_1$  è debolmente chiuso. Sia  $U_1$  un intorno debole di  $u_0$  tale che  $U_1\subset U$ . Allora esiste  $u\in U_1\cap F\cap M_c$ , quindi  $g(u,u)\leq c$ , e inoltre  $g(u,u)\geq 2$   $(u,u_0)-\varepsilon$ . Allora  $g(u,u_0)=g(u,u)-g(u,u)+g(u,u_0)\leq c+\varepsilon$  quindi  $(u,u_0)=g(u,u)$  e debolmente chiuso in  $(u,u_0)\in C$ , quindi  $(u,u_0)\in C$ , quindi (u,

Consideriamo ora il caso p=1. (L'ipotesi (5) del seguente teorema è scritta in forma parzialmente ridondante per comodità di esposizione delle dimostrazioni seguenti).

TEOREMA 2. Siano X ed Y spazi di Banach: supponiamo che

- (1) X sia separabile, Y sia separabile e riflessivo. Sia data  $G: Z = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le s \le t \le T\} \rightarrow \Im(X)$  tale che
- (2) G sia fortemente continua in Z, e continua da  $\{(t, s) \in Z : t > s\}$  in  $(\mathfrak{B}(X), topologia uniforme)$ . Siano dati  $a \in C(X)$ ,

(3) 
$$B \in L^{\infty}(\mathcal{B}(Y, X)).$$
  
 $Sia\ M: L^{1}(Y) \to C(X)\ definita\ da$   
 $(Mu)\ (t) = a\ (t) + \int_{-t}^{t} G\ (t, s)\ B\ (s)\ u\ (s)\ ds,\ 0 \le t \le T.$  Siano dati

- (4)  $E \subset X$ , non vuoto, chiuso e convesso.
- (5)  $t \to U(t)$ , da [0, T] nei sottinsiemi non vuoti, chiusi e convessi di Y, tale che esista  $\varphi \in L^1$  con  $||v|| \le \varphi$  (t) q. o. in [0, T] se  $v \in U(t)$ , e che risulti limitato  $\bigcup_{0 \le s \le t} U(s)$  per quasi ogni  $t \in [0, T]$ . Supponiamo che
- (6) B(s) U(s) sia relativamente compatto in X, q. o. in [0, T]. Sia dato N > 0. Supponiamo che
- (7)  $F = \{u \in L^1(Y) : ||u|| \le N, u(t) \in U(t) \text{ q. o. in } [0, T], (Mu)(T) \in E\}$ sia non vuoto.

  Sia  $R_F = \bigcup_{0 \le t \le T} M(F)(t); \text{ sia } f : [0, T] \times R_F \times Y \to R^1 \text{ tale che}$
- (8)  $t \rightarrow f(t, x(t), u(t)) \in L^1$  per ogni  $x \in M(F)$ , per ogni  $u \in F$ ;
- (9) u oup f(t, x, u) sia convessa e semicontinua inferiormente in Y per quasi ogni  $t \in [0, T]$  e per ogni  $x \in R_F$ ; x oup f(t, x, u) sia semicontinua inferiormente in  $R_F$  per quasi ogni  $t \in [0, T]$ , uniformemente per  $u \in Y$ ;  $s oup lim inf f(s, x(s), u_k(s)) \in L^1$  per ogni  $x \in M(F)$  e per ogni  $\{u_k\} \subset F$  convergente q. o. in [0, T];
- (10)  $\lim_{mis\ I\to 0} \inf_{I} \int_{I} f(s,x(s),u(s)) ds \ge 0$  uniformemente per  $(x,u)\in M(F)\times F$ .

  Allora  $u \to \int_{0}^{T} f(t,(Mu)(t),u(t)) dt$  ha minimo assoluto in F.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col provare che

(i) F è debolmente compatto in  $L^1(Y)$ .

Posto infatti  $F_1=\{u\in L^1(Y)\colon \|u\|\leq N,\, u\,(t)\in U\,(t)\,\,\mathrm{q.\,o.}$  in  $[0,T]\},$   $F_2=\{u\in L^1(Y)\colon (Mu)\,(T)\in E\},\,\,\mathrm{per\,\,la}\,\,(5)\,\,\mathrm{e\,\,per\,\,la}\,\,(4)\,\,\mathrm{si\,\,ha\,\,che}\,\,F_1$  ed  $F_2$  sono convessi. Per il teorema di limitatezza uniforme ([2],

II.3.21) esiste  $G_0 > 0$  tale che, per la (2),  $\|G(t,s)\| \le G_0$  per ogni  $(t,s)\in Z$ . Poniamo  $(Hu)(t)=\int G(t,s)\,B(s)\,u(s)\,ds,\,0\leq t\leq T,\,u\in L^1(Y).$ Allora, per la (3), si ha  $||Hu|| = \sup_{0 \le t \le T} \left\| \int_{0}^{t} G(t, s) B(s) u(s) ds \right\| \le t$  $\leq \sup_{0 \,\leq\, t \,\leq\, T} \int \parallel G\left(t,s\right) \parallel \parallel B\left(s\right) \,u\left(s\right) \parallel ds \leq G_0 \parallel B \parallel \parallel u \parallel \, \mathrm{per \ ogni \ } u \,\in\, L^1(Y).$ Allora  $M \in \mathcal{B}_0(L^1(Y), C(X))$ . Per la (4) si ha quindi che  $F_2$  è debolmente chiuso. Sia  $u_n \in F_1$ ,  $n = 1, 2, ..., u \in L^1(Y), u_n \to u$ , allora  $||u|| \leq N$ ; esiste inoltre  $\{u_{n_k}\}$  estratta da  $\{u_n\}$  tale che  $u_{n_k}(s) \to u(s)$ q. o. in [0, T]; per la (5) si ha  $u(s) \in U(s)$  q. o. in [0, T]. Allora  $F_4$ è debolmente chiuso. Per provare la (i) basta dimostrare che F, è debolmente sequenzialmente compatto. Sia infatti  $\{u_n\}$  una successione in  $F_i$ . Sia  $\{\overline{t_k}\} = [0, T]$ . Posto  $V(t) = \overline{co} \bigcup_{0 \le s \le t} U(s), 0 \le t \le T$ , si può supporre che  $V(t_k)$  sia limitato per ogni k, inoltre si ha  $\int u_n(s) ds \in t_1 \ V(t_1), \text{ per cui, dalla (5), esiste } \{u_n^{(1)}\} \text{ estratta da } \{u_n\}$ tale che  $\left\{\int u_n^{(1)}(s) ds\right\}$  è debolmente convergente; analogamente per ogni p > 1 naturale esiste  $\{u_n^{(p)}\}$  estratta da  $\{u_n^{(p-1)}\}$  tale che  $\left\{\int_{n}^{\nu}u_{n}^{(p)}\left(s\right)ds\right\}$ è debolmente convergente. Dati  $t\in[0,T],\ \varepsilon>0$ , esiste j tale che  $\left|\int \varphi\left(s\right)ds\right|<\varepsilon$ ; allora per ogni  $g\in Y^{*}$  e per ogni naturale  $k \ \ \mathrm{ed} \ \ r \ \ \mathrm{si} \ \ \mathrm{ha} \ \ \left| \ g \left( \ \int_{k}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \int_{r}^{t} u_{r}^{(r)} \left( s 
ight) \, ds 
ight) 
ight| \leq \left| \ g \left( \ \int_{k}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{r}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{r}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{r}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s 
ight) \, ds \ - \ \left| \ \int_{r}^{t} u_{k}^{(k)} \left( s$  $-\int_{0}^{\tau} u_{k}^{(k)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau} u_{k}^{(k)}(s) ds - \int_{0}^{\tau} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds - \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_{j}} u_{k}^{(j)}(s) ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_{0}^{\tau_$ 

$$-\int_0^{t_j} u_r^{(j)}(s) \, ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_0^{t_j} u_r^{(j)}(s) \, ds - \int_0^{t_j} u_r^{(r)}(s) \, ds \Big) \Big| + \Big| g \Big( \int_0^{t_j} u_r^{(r)}(s) \, ds - \int_0^{t_j} u_r^{(r)}(s) \, ds \Big) \Big| \le \|g\| \Big| \int_t^{t_j} \varphi(s) \, ds \Big| + 3\varepsilon + \|g\| \Big| \int_t^{t_j} \varphi(s) \, ds \Big| < (3+2\|g\|) \varepsilon \text{ se } k \text{ ed } r \text{ sono abbastanza grandi. Allora } \Big\{ \int_0^t u_k^{(k)}(s) \, ds \Big\} \Big\}$$
 è debolmente di Cauchy per ogni  $t \in [0,T]$ , quindi, per la (1), è debolmente convergente. Inoltre per ogni  $\varepsilon > 0$  per la (5) esiste  $\delta > 0$  tale che se  $I \in \min_{s \in I} ([0,T])$ , se  $\min_{s \in I} I < \delta$  e per ogni  $k$  si ha  $\int_0^t \|u_k^{(k)}(s)\| \, ds < \varepsilon$ . Allora, per una evidente estensione del teorema 4.2 di [11], si trova che  $\{u_k^{(k)}\}$  è debolmente di Cauchy in  $L^1(Y)$ , il quale per la (1) (v. [11]) è debolmente completo, pertanto la (i) è provata essendo  $F = F_1 \cap F_2$ .

Proviamo ora che

(ii)  $M: (F, \text{ topologia debole}) \rightarrow C(X)$  è continuo.

Per la (1) basta provare la sequenziale continuità di M. Allo scopo proviamo che  $M(F_1)(t)$  è relativamente compatto in X per ogni  $t \in [0, T]$ . Infatti siano  $t \in [0, T]$ ,  $f_n \in X^*$ , n = 0, 1, 2, ..., con  $f_n \rightarrow f_0$  nella X-topologia di  $X^*$ .

Sia  $\overline{f_n}(s)(y) = f_n G(t,s) B(s)(y), y \in X$ ,  $s \in [0,t]$ . Allora dalla (6), dalla (2) e per [4], corollario 3.2., si ha che  $\overline{f_n}(s) v(s) \to \overline{f_0}(s) v(s)$  q. o. in [0,t], uniformemente per  $v \in F_1$ . Sia  $I \in \min([0,t])$ : dalla (3) e dalla (5) si ha che  $\int |\overline{f_n}(s) v(s)| ds \le \int ||f_n|| ||G(t,s)|| ||B(s)|| ||v(s)|| ds \le \int ||f_n|| ||G(t,s)|| ||B(s)|| ||v(s)|| ds \le \int ||f_n|| ||G(t,s)|| |$ 

striamo ora che  $M(F_1)$  è equicontinuo in [0, T], in C(X). Infatti siano  $u \in F_1$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $0 \le t_1 < t_2 \le T$ . Allora  $\|(Hu)(t_1) - (Hu)(t_2)\| \le T$  $\leq \Big\| \int\limits_{s}^{t_{2}} G\left(t_{2}\,,s\right) B\left(s\right) u\left(s\right) ds - \int\limits_{s}^{t_{1}} G\left(t_{2}\,,s\right) B\left(s\right) u\left(s\right) ds \, \Big\| + \Big\| \int\limits_{0}^{t_{2}} (G\left(t_{2}\,,s\right) - \left(s\right) ds + \left(s\right) \left(s\right) ds \Big\| + \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) ds \Big\| + \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) ds \Big\| + \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) ds \Big\| + \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) ds \Big\| + \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) \left(s\right) ds \Big\| + \left(s\right) \left($  $-\left.G\left(t_{1},s\right)\right)B\left(s\right)u\left(s\right)ds\left\|\leq\int^{t_{1}}_{\parallel}G\left(t_{2}\,,s\right)\parallel\parallel B\left(s\right)u\left(s\right)\parallel ds+\int^{t_{1}}_{\parallel}G(t_{1},s)-\left(s\right)\left\|H\left(s\right)u\left(s\right)\parallel ds\right\|$ —  $G(t_2, s) \parallel \parallel B(s) u(s) \parallel ds$ . Se  $t_1 = 0$ , si ha, per la (2), la (3) e la (5), che  $\|(Hu)(t_2) - (Hu)(0)\| \le \int_{-\infty}^{\infty} G(t_2, s) \|\|B(s)\|\|u(s)\| ds \le C$  $\leq G_0 \parallel B \parallel \int_{0}^{s_2} \varphi(s) ds$ , da cui è evidente che  $M(F_1)$  è equicontinuo in  $t_1 = 0$ . Se  $t_1 > 0$ , sia  $\delta > 0$  tale che  $t_1 - \delta > 0$ . Allora  $\parallel \left(Hu\right)\left(t_{1}\right)-\left(Hu\right)\left(t_{2}\right)\parallel \leq \int\limits_{-s}^{t_{1}}\parallel G\left(t_{2}\,,\,s\right)\parallel \parallel B\left(s\right)u\left(s\right)\parallel ds \,+\, \int\limits_{-s}^{t_{1}}\parallel G\left(t_{1}\,,\,s\right)-\left(Hu\right)\left(t_{2}\right)\parallel ds \,+\, \int\limits_{-s}^{t_{1}}\parallel G\left(t_{1}\,,\,s\right)-\left(Hu\right)\left(t_{2}\right)\parallel ds \,+\, \int\limits_{-s}^{t_{2}}\parallel G\left(t_{2}\,,\,s\right)\parallel ds \,+\, \int\limits_{-s}^{t_{1}}\parallel G\left(t_{2}\,,\,s\right)\parallel ds \,+\, \int\limits_{-s}^{t_{2}}\parallel G\left(t_{2}\,,\,s\right)\parallel ds \,+\,$  $- G(t_2, s) \parallel \parallel B(s) u(s) \parallel ds + \int_{-\infty}^{t_1-s} ||G(t_1, s) - G(t_2, s) \parallel \parallel B(s) u(s) \parallel ds;$ ora si ha che  $\int_{-1}^{1} \mid G\left(t_{1}\,,\,s\right) \,-\, \left.G\left(t_{2}\,,\,s\right) \mid\mid \mid \mid B\left(s\right)\,u\left(s\right) \mid\mid ds \leq 2\,G_{0}\,\varepsilon \mid\mid B\mid\mid$ se  $\delta$  è abbastanza piccolo (in dipendenza di  $\varepsilon$ ), uniformemente per  $u \in F_4$ ; con tale scelta di  $\delta$ , osservato che G è, per la (2), uniformemente continua tra il compatto  $\{(s,t) \in Z: 0 \le s \le t_1 - \delta, t_1 \le t_2 \le t_3 - \delta, t_4 \le t_4 - \delta \}$  $\leq t \leq T$ } e (% (X), topologia uniforme), risulta  $\int ||G(t_1, s) -$ —  $G\left(t_{2}\,,s\right)\parallel\parallel B\left(s\right)\,u\left(s\right)\parallel ds\leq N\,\varepsilon\parallel B\parallel \ \ \mathrm{se}\ \ \mid t_{2}-t_{1}\mid \ \ \mathrm{\grave{e}}\ \ \ \mathrm{abbastanza}$ piccolo (in dipendenza di  $\varepsilon$  e  $t_1$ ), uniformemente per  $u \in F_1$ , ed infine  $\int \parallel G(t_2,s) \parallel \parallel B(s) u(s) \parallel ds \leq G_0 \varepsilon \parallel B \parallel$  se  $\mid t_2-t_1 \mid$  è abbastanza piccolo (in dipendenza di  $\varepsilon$ ), uniformemente per  $u \in F_1$ ; si conclude allora che  $M(F_1)$  è equicontinuo in ogni punto  $t_1 \in [0, T.]$ 

Allora ([5], teor. 7.5.7.), per la (i), la (ii) è provata, infatti se  $u_n \in F$ ,  $n=1,2,\ldots,u\in F$ , e  $u_n\longrightarrow u$  si ha  $M(u_n)\longrightarrow M(u)$ , ma essendo  $M(F_1)$ relativamente compatto in C(X), si ha che esiste  $\{u_{n_k}\}$  estratta dalla  $\{u_n\}$  tale che  $M(u_{n_k}) \longrightarrow M(u)$ .

Poniamo adesso

$$h\left(x,\,u\right) = \int_{0}^{T} f\left(t,\,x\left(t\right),\,u\left(t\right)\right)\,dt.$$

Per la (8) si ha  $h: M(F) \times F \rightarrow R^1$ .

Proviamo che

(iii)  $u \rightarrow h(x, u)$  è quasi convessa e semicontinua inferiormente in F per ogni  $x \in M(F)$ .

La quasi convessità è ovvia dalla (9). Siano poi  $x \in M(F)$ ,  $u_n \in F$ ,  $n=1,2,\ldots, u_n \to u$  in  $L^1(Y)$ , allora esiste  $\{u_n\}$  estratta da  $\{u_n\}$ tale che risulta  $u_{n_k}(s) \to u(s)$  q. o. in [0, T]. Per la (9) si ha  $\liminf f(s, x(s), u_{n_k}(s)) \ge f(s, x(s), u(s)) \quad \text{q. o. in } [0, T], \quad s \to \infty$ 

$$ightarrow \lim \inf_{k \to \infty} f(s, x(s), u_{n_k}(s)) \in L^1$$
, e infine, per il lemma,  $\int_0^s f(s, x(s), u(s)) ds \le \int_0^s f(s, x(s), u(s)) ds$ 

(iv)  $x \rightarrow h(x, u)$  è semicontinua inferiormente in M(F), uniformemente per  $u \in F$ .

Infatti sia  $x \in M(F)$ ,  $x_n \in M(F)$ ,  $n = 1, 2, ..., x_n \rightarrow x$  in C(X). Sia  $\varepsilon > 0$ . Per la (9), per quasi ogni  $s \in [0, T]$  esiste un naturale k tale che  $f(s, x_n(s), u(s)) \ge f(s, x(s), u(s)) - \varepsilon$  se n > k, uniformemente rispetto ad  $u \in F$ . Per ogni naturale r sia  $I_r = \{s \in [0, T] : f(s, x_n(s), t) \in F$  $u(s) \ge f(s, x(s), u(s)) - \varepsilon$  se n > r. Dalla (9) si ha allora che  $\lim \min ([0, T] - I_r) = 0$  (uniformemente rispetto ad  $u \in F$ ). Per la (10) esiste dunque  $\overline{r}$  tale che per ogni  $u \in F$  è  $\int_{CI^{-}} f(s, x(s), u(s)) ds \ge -\varepsilon$ 

$$\operatorname{e}\int\limits_{\mathcal{O}I_{r}^{-}}^{r}f\left(s,\,x_{n}\left(s\right),\,u\left(s\right)\right)\,ds\geq-\varepsilon\,\operatorname{per\,\,ogni}\,n.\,\,\operatorname{Allora}\int\limits_{0}^{r}f\left(s,\,x_{n}\left(s\right),\,u\left(s\right)\right)\,ds=$$

$$= \int_{\tilde{I}_{r}^{-}} f(s, x_{n}(s), u(s)) ds + \int_{\tilde{O}\tilde{I}_{r}^{-}} f(s, x_{n}(s), u(s)) ds \ge -\varepsilon + \int_{\tilde{I}_{r}^{-}} f(s, x(s), u(s)) ds - \varepsilon + \int_{\tilde{I}_{r}^{-}} f(s, x(s), u(s)) ds \ge -\varepsilon + \int_{\tilde{I}_{r}^{-}} f(s, x(s), u(s)) ds - \varepsilon + \int_{\tilde{I}_{r}^{-}} f(s, x(s), u(s)) ds \ge -\varepsilon + \int_{\tilde{I}_{r}^$$

Dalle (i), (ii), (iii), (iv), dal teorema 1 e dalla (7) si ha la tesi, c. v. d..

Nel teorema seguente è studiato un caso notevole per il quale si può ottenere un teorema d'esistenza con ipotesi analoghe a quelle del precedente teorema, però senza ricorrere ad ipotesi di compattezza (v. (6) del teorema 2) e di regolarità dei vincoli (v. (5) dello stesso teorema), e di G (v. la (2)).

TEOREMA 3. Siano X ed Y spazi di Banach: supponiamo che

(1) X sia riflessivo e separabile, Y sia separabile e di tipo (L) (secondo [7]).

Sia Z come nel teorema 2. Siano dati  $a \in C(X)$ ,  $p \ge 1$ ,

- (2)  $G: Z \rightarrow \mathfrak{B}(X)$  fortemente continua;
- (3)  $B \in L^{\infty}(\Im(Y, X))$ . Sia M definito come nel teorema 2. Siano dati inoltre
- (4)  $E \subset X$ , non vuoto, chiuso e convesso;
- (5)  $t \to U(t)$ , da [0, T] nei sottinsiemi non vuoti, chiusi e convessi di Y, tale che esiste  $\varphi \in L^p$  con  $||v|| \le \varphi(t)$  q. o. in [0, T] se  $v \in U(t)$ .

  Supponiamo che N > 0, e che
- (6)  $F = \{u \in L^p(Y) : ||u|| \le N, u(t) \in U(t) \text{ q. o. in } [0, T], (Mu)(T) \in E\}$  sia non vuoto.

Siano  $R_F$  ed f come nel teorema 2, e supponiamo che ne valgano le (8), (9), (10).

Allora esiste  $\overline{u} \in F$  tale che per ogni  $u \in F$  risulta  $\int_{0}^{T} f(t, (M\overline{u})(t), ..., \overline{u}(t)) dt \leq \int_{0}^{T} f(t, (Mu)(t), u(t)) dt.$ 

(i)  $M: (F, \text{ topologia debole di } L^1(Y)) \longrightarrow L^q(X)$  è sequenzialmente continuo.

Proviamo ora che

(ii) F è debolmente compatto in  $L^1(Y)$ .

Infatti siano  $F_1 = \{u \in L^p(Y) : ||u|| \le N, u(t) \in U(t) \text{ q. o. in } [0, T]\},$  $F_2 = \{u \in L^p(Y) : (Mu)(T) \in E\}.$  Per la (5)  $F_1$  è convesso. Sia  $u_n \in F_1$ ,  $n = 1, 2, ..., u \in L^1(Y)$ ,  $u_n \to u$  in  $L^1(Y)$ . Allora existe  $\{u_{n_k}\}$ estratta da  $\{u_n\}$  tale che  $u_{n_k}(s) \longrightarrow u(s)$  q. o. in [0, T], perciò, per la (5),  $u(s) \in U(s)$  q. o. in [0, T]. Sempre per la (5) risulta  $||u_{n_k}(s)|| \leq \varphi(s)$ per ogni k e q. o. in [0, T], pertanto  $u_{n_k} \to u$  in  $L^p(Y)$ , e quindi  $u \in F$ . Allora  $F_1$  è debolmente chiuso in  $L^1(Y)$ . Proviamo ora che  $F_4$  è debolmente sequenzialmente compatto in  $L^1(Y)$ . Per il teorema 8 di [7] esiste, per la (1), una funzione  $b: L^1(Y) \longrightarrow L^1(\Omega, \mu)$ , dove  $\Omega$  è compatto e totalmente disconnesso,  $\mu$  è una misura non negativa, e b è biunivoca, lineare, isometrica, e isomorfismo di reticolo. Basta dunque provare che  $b(F_1)$  è debolmente sequenzialmente compatto in  $L^{1}(\Omega, \mu)$ . Allo scopo, siano  $u \in L^{1}(Y)$ ,  $I \in \text{mis}([0, T])$ . Allora esiste una successione di combinazioni lineari  $u_n = \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k^{(n)} v_k^{(n)},$  $n=1,2,\ldots$ , di quasi-unità  $v_{k}^{(n)} \in L^{1}(Y)$  (v. [19], cap. XII, par. 6, per la terminologia: le quasi-unità sono dette « elementi caratteristici» in [7]), tale che  $u_n \longrightarrow u$  in  $L^1(Y)$ . Essendo  $v_k^{(n)}$  quasi-unità per ogni k ed n, si ha che per quasi ogni  $s \in [0, T]$   $v_k^{(n)}(s)$  è quasiunità di Y. Inoltre posto  $x_0(s) = 1$  per quasi ogni  $s \in [0, T]$ , 1 essendo un'unità di Y, si ha che  $x_0$  è un'unità di  $L^1(Y)$  (v. [7]); si

verifica allora direttamente che  $\chi_I v_k^{(n)} = \chi_I x_0 \wedge v_k^{(n)}$  per ogni k ed n. Dato che  $\chi_I u_n \to \chi_I u$  in  $L^1(Y)$ , si ha

$$\begin{split} & \overset{q(n)}{\underset{k=1}{\sum}} \, \alpha_k^{(n)} \, b \, (\chi_I \, x_0) \, \mathbf{A} \, b \, (v_k^{(n)}) = \overset{q(n)}{\underset{k=1}{\sum}} \, \alpha_k^{(n)} \, b \, (\chi_I \, x_0 \, \mathbf{A} \, v_k^{(n)}) = \overset{q(n)}{\underset{k=1}{\sum}} \, \alpha_k^{(n)} \, b \, (\chi_I \, v_k^{(n)}) = \\ & = b \left( \chi_I \, \overset{q(n)}{\underset{k=1}{\sum}} \, \alpha_k^{(n)} \, v_k^{(n)} \right) = b \, (\chi_I \, u_n) \longrightarrow b \, (\chi_I \, u). \end{split}$$

Da [7] si ha che l'insieme delle quasi-unità di  $L^1(Y)$ , cui appartiene  $\chi_I x_0$ , ha per immagine mediante b l'insieme di tutte le funzioni caratteristiche delle parti contemporaneamente chiuse ed aperte di  $\Omega$ : pertanto per ogni k ed n esiste un insieme  $\Omega_k^{(n)}$  chiuso ed aperto in  $\Omega$  tale che b  $(v_k^{(n)}) = \chi_{\Omega_k^{(n)}}$ , ed inoltre esiste  $\Omega(I)$  aperto e chiuso

in  $\Omega$  tale che  $b\left(\chi_{I}x_{0}\right)=\chi_{\Omega(I)},$  per cui  $b\left(\chi_{I}u\right)=\lim\sum_{k=1}^{q(n)}\chi_{k}^{(n)}\chi_{\Omega(I)}$  A

$$\lambda \chi_{\Omega_k^{(n)}} = \lim \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k^{(n)} \chi_{\Omega(I)} \chi_{\Omega_k^{(n)}} = \lim \chi_{\Omega(I)} b(u_n) = \chi_{\Omega(I)} b(u). \text{ Essendo}$$

$$b$$
 isometria, si ha anche  $\int\limits_{I} \parallel u\left(s\right)\parallel ds = \int\limits_{\Omega\left(I\right)} \mid b\left(u\right)\mid d\mu$ ; per la stessa

ragione si ha mis  $I = \mu(\Omega(I))$ . Dato che il  $\sigma$ -anello dello spazio mensurale  $(\Omega, \mu)$  differisce solo per insiemi di misura  $\mu$  nulla dalla classe delle parti di  $\Omega$  contemporaneamente aperte e chiuse, si deduce che, per la (5),  $b(F_4)$  è debolmente sequenzialmente compatto in  $L^1(\Omega, \mu)$  ([2], IV.8.11), quindi ([2], V.6.1)  $F_4$  è debolmente compatto in  $L^1(Y)$ . Sia ora  $H_T \colon L^1(Y) \to X$  con  $H_T(u) = (Hu)(T)$ . Sia  $Q \colon C(X) \to X$  con Q(y) = y(T). Allora  $H_T = QH$  però  $Q \in \mathcal{B}(C(X), X)$  pertanto essendo  $H \in \mathcal{B}(L^p(Y), C(X))$ , si ha che  $H_T$  è continuo tra  $(L^p(Y), \text{ topologia debole})$  ed (X, topologia debole).

Allora  $H_T^{-1}(E) = F_2$  è, per la (4), debolmente chiuso in  $L^p(Y)$  quindi la (ii) è provata.

Dalla (i) e dalla (ii) e per la (1) si deduce (per [2], V. 6.3.) che

(iii)  $M: (F, \text{ topologia debole di } L^1(Y)) \to L^q(X)$  è continuo.

Sia  $h:M(F) imes F \to R^1$  come nel teorema 2. Con la stessa dimostrazione della (iii) nel teorema 2 si prova che

(iv)  $u \to h(x, u)$  è quasi convessa e semicontinua inferiormente in  $(F, \text{ topologia di } L^1(Y))$ , per ogni  $x \in M(F)$ .

Proviamo che

(v)  $x \to h(x, u)$  è semicontinua inferiormente in  $(M(F), \text{ topologia di } L^q(X))$  uniformemente per  $u \in F$ .

Sia infatti  $x_n \in M(F)$ ,  $n = 1, 2, ..., x \in M(F)$ , con  $x_n \to x$  in  $L^q(X)$ ; allora esiste  $\{x_k\}$  estratta da  $\{x_n\}$  tale che  $x_k(s) \to x(s)$  q. o. in [0, T]. Con la stessa dimostrazione usata per provare le (iv) del teorema 2 si ottiene la (v).

Dalle (ii), (iii) (iv), (v), per la (6) e per il teorema 1 si ha la tesi, c. v. d.

Consideriamo ora il caso p > 1.

TEOREMA 4. Siano X, Y spazi di Banach, con

(1) X separabile, Y separabile e riflessivo.

Siano dati Z e G come nel teorema 2: supponiamo che ne valga la (2). Siano  $a \in C(X), p > 1, p + q = pq$ ,

$$(2) B \in L^q(\mathfrak{R}(Y,X));$$

(3) 
$$E \subset X$$
, non vuoto, chiuso e convesso.

 $M: L^p(Y) \to C(X)$  sia definito come nel teorema 2. Siano  $R_0 \subset X$  non vuoto, N > 0; sia data l'applicazione  $(t, x) \to U(t, x)$ , da  $[0, T] \times R_0$  nei sottinsiemi non vuoti di Y, tale che, posto per ogni  $\delta > 0$ ,  $U(t, x, \delta) = \bigcup_{\|(s, y) - (t, x)\| \le \delta} U(s, y)$ , risulti

(4) 
$$\bigcap_{\delta>0} \overline{co} \ U(t, x, \delta) = U(t, x).$$

Supponiamo che

- (5) B(s) U(s, y) sia relativamente compatto in X, q. o. in [0, T] e per ogni  $y \in R_0$ ;
- (6)  $F = \{u \in L^p(Y) : ||u|| \le N, u(t) \in U(t, (Mu)(t)) \text{ q. o. in } [0, T], (Mu)(T) \in E\} \text{ sia non vuoto.}$

Siano dati  $R_F$  ed f come nel teorema 2: supponiamone le (8),(9),(10). Allora la funzione  $u \to \int\limits_0^T f\left(t, (Mu)\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt$  ha minimo assoluto in F.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che

(i)  $M: (F, \text{ topologia debole}) \rightarrow C(X)$  è continuo.

Per la (1) e per il fatto che p > 1, basta provare la versione sequenziale della (i). Come nella dimostrazione del teorema 2 si ha che  $M \in \mathcal{P}_0(L^p(Y), C(X))$  e che  $M(F_1)$  è equicontinuo in C(X) (si usano le (2) e (2) del teorema 2).

Inoltre, posto  $F_1 = \{u \in L^p(Y) : || u || \leq N, u(t) \in U(t, (Mu)(t)) \text{ q. o.}$  in  $[0, T]\}$  si ha che  $M(F_1)(t)$  è relativamente compatto in X per ogni  $t \in [0, T]$ : infatti sia  $\{f_n\}$  una successione in  $X^*$  con  $f_n \to f_0$  nella X-topologia di  $X^*$ , e sia  $t \in [0, T]$ . Posto  $\overline{f_n}(s)(y) = f_n G(t, s) B(s)(y), y \in X, s \in [0, t], n = 1, 2, ..., \text{ si ha che } \overline{f_n}(s) \in Y^*$  per ogni  $s \text{ ed } n, \text{ e, per le } (5) \text{ ed } (1) \text{ (v. } [4], \text{ corollario } 3.2.), \text{ che } \overline{f_n}(s) \text{ v } (s) \to \overline{f_0}(s) \text{ v } (s) \text{ q. o.}$  in [0, t], uniformemente per  $v \in F_1$ . Inoltre  $\int_I |\overline{f_n}(s) v(s)| ds \leq \int_I ||f_n|| || G(t, s)|| ||B(s)|| ||v(s)|| ds \leq f^* G_0 N \left(\int_I ||B(s)||^q ds\right)^{1/q}, \text{dove } f^*$  è una costante, per ogni  $I \in \text{mis } ([0, T]), \text{ per ogni } n \text{ e per ogni } v \in F_1$ . Allora per il teorema XI.10.22 di [9] si ha che  $(f_n - f_0) \int_0^I G(t, s) B(s) v(s) ds \to 0$  uniformemente per  $v \in F_1$ . Sempre per il corollario 3.2 di [4] e per la (1) si ha dunque la relativa

compattezza di  $M(F_1)(t)$  in X per ogni  $t \in [0, T]$ . Allora  $M(F_1)$  è relativamente compatto in C(X) ([5], teorema 7.5.7.). Sia  $u_n \in F$ ,  $n = 1, 2, \ldots, u \in F, u_n \longrightarrow u$  in  $L^p(Y)$ ; allora  $Mu_n \longrightarrow Mu$  in C(X) però esistono  $y \in C(X)$  ed  $\{u_{n_k}\}$  estratta da  $\{u_n\}$  tali che  $Mu_{n_k} \longrightarrow y$  in C(X), cioè  $Mu_{n_k} \longrightarrow Mu$ , da cui la (i).

Proviamo ora che

(ii) F è debolmente compatto in  $L^{p}(Y)$ .

Per la (1) basta provare che F è debolmente sequenzialmente chiuso. Sia  $u_k \in F$ ,  $k = 1, 2, ..., u \in L^p(Y)$ ,  $u_k \longrightarrow u$  in  $L^p(Y)$ . Allora

 $(Mu)(t_0), \delta)$  e quindi  $u(t_0) \in \overline{co} \ U(t_0, (Mu)(t_0), \delta)$  per ogni  $\delta > 0$  e per quasi ogni  $t_0 \in [0, T]$ . Allora dalla (4) si conclude che  $u \in F$ , per cui la (ii) è provata.

Sia h come nella dimostrazione del teorema 2: come in tale teorema se ne provano le (iii) e (iv), che con le (i) e (ii) e con la (6) forniscono la tesi, c. v. d.

Consideriamo infine il caso  $p = \infty$ .

TEOREMA 5. Siano X, Y spazi di Banach: supponiamo che

(1) Y sia separabile e riflessivo; X sia separabile.

Sia data G come nel teorema 2 e verificante le stesse ipotesi che in tale teorema. Sia

(2)  $B \in L^q(\mathfrak{B}(Y, X))$  per qualche q reale e maggiore di 1.

Sia  $M:L^{\infty}(Y) \to C(X)$  definito come nel teorema 4. Siano poi N>0,

- (3)  $E \subset X$ , non vuoto, chiuso e convesso;
- (4)  $t \rightarrow U(t)$ , da [0, T] nei sottinsiemi non vuoti, chiusi e convessi di Y;
- (5) B(s) U(s) relativamente compatto in X, q. o. in [0, T];
- (6)  $F = \{ u \in L^{\infty}(Y) : ||u|| \le N, u(t) \in U(t) \text{ q. o. in } [0, T], (Mu)(T) \in E \}$ sia non vuoto.

Sia f come nel teorema 2, e supponiamo che ne soddisfi le ipotesi. Allora la funzione  $u \to \int\limits_0^T f\left(t, (Mu)\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt$  ha minimo assoluto in F.

DIMOSTRAZIONE. Sia p + q = pq. Proviamo che

(i) F è debolmente compatto in  $L^{p}(Y)$ .

Infatti, dalla (1), si ha che  $L^p(Y)$  è separabile e riflessivo (v. [1]); per le (3) e (4) F è convesso; sia  $u_n \in F$ ,  $n=1,2,...,u_n \rightarrow u$  in  $L^p(Y)$ ; allora esiste  $\{u_{n_k}\}$  estratta da  $\{u_n\}$  tale che  $u_{n_k}(s) \rightarrow u(s)$  q. o. in [0,T], per tanto, per la (4),  $u(s) \in U(s)$  q. o. in [0,T] e  $\|u(s)\| \leq N$  q. o. in [0,T], per cui  $u \in L^\infty(Y)$ , ed anche  $\|u\| \leq N$ . Inoltre  $G(T,s) B(s) u_{n_k}(s) \rightarrow G(T,s) B(s) u(s)$  q. o. in [0,T], e  $\|G(T,s) B(s) u_{n_k}(s)\| \leq NG_0 \|B(s)\|$  per ogni k e q. o. in [0,T], dove  $G_0$  è una costante, quindi  $(Mu)(T) \in E$  per la (3). Allora  $u \in F$ : la (i) è quindi provata.

Posto  $F_1=\{u\in L^\infty(Y): \|u\|\leq N, u(t)\in U(t) \text{ q. o. in } [0,T]\},$  proviamo che

(ii)  $M:(F_1,$  topologia debole di  $L^p(Y)) \to C(X)$  è continuo. Osserviamo che M(F) è, per le ipotesi fatte su G, equicontinuo in [0,T]; la dimostrazione è la stessa che nel teorema 2. Analogamente si ha che  $M(F_1)(t)$  è relativamente compatto in X per ogni  $t \in [0,T]$ . Di qui, essendo, per la  $(2), M \in \mathcal{B}_0(L^p(Y), C(X))$ , quindi continuo tra  $(L^p(Y))$ , topologia debole) e (C(X)), topologia debole), si ha la (ii). La tesi segue come nel teorema precedente, per la (i), la (ii), e dalla (6), c. v. d.

NOTA 1. Un altro caso importante, oltre a quello dal teorema 3, nel quale l'ipotesi « B(s) U(s), q. o. in [0,T], sia relativamente compatto in X» si può evitare, si ottiene supponendo  $p=\infty$  ed Y di tipo (M) con unità (secondo [16]): basta applicare, come nel teorema 3, lo stesso teorema di Dunford-Pettis ad  $L^{\infty}(Y)$ . In questo caso però la difficoltà consiste nel trovare condizioni sufficientemente generali sui dati che assicurino la debole (sequenziale) compattezza di F in  $L^{\infty}(Y)$ .

COROLLARIO. Nelle ipotesi di uno qualsiasi dei precedenti teoremi 2, 3, 4, 5, l'insieme W dei punti di minimo assoluto in F per DIMOSTRAZIONE. Sia  $\{u_k\}$  una successione in W, e, per la compattezza sequenziale di F, sia  $\{u_j\}$  estratta da  $\{u_k\}$  con  $u_j \rightharpoonup u \in F$ . Posto  $g(u) = \int\limits_0^T f(t, (Mu)(t), u(t)) \, dt$ , per la semicontinuità inferiore sequenziale di g si ha che  $\lim\limits_{j \to \infty} \inf g(u_j) = \inf \{g(v) : v \in F\} \geq g(u)$ , per cui  $u \in W$ , c.v.d.

NOTA 2. Il precedente corollario consente la risoluzione di più generali problemi variazionali di quelli fin qui trattati (per esempio problemi di « minimax )».

Nota 3. Sia data la famiglia di problemi di Cauchy in X

$$\begin{pmatrix}
\dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t) + C(t); \\
\dot{x}(0) = x^{0},
\end{pmatrix}$$

con  $A:[0,T] \to \mathcal{L}(X), \ C:[0,T] \to X, \ u \in L^p(Y), \ x^0 \in X$  (e B come nei teoremi precedenti). Sono allora note (v. per esempio (17]) condizioni sufficienti perchè esista la funzione di Green G per il problema (\*), che soddisfi la (2) del teorema 2 (la quale si riferisce pertanto, in tali condizioni, a funzioni a valori operatori assai più generali delle funzioni di Green). Pertanto i teoremi precedenti generalizzano alcuni risultati di [13] e [14]. In questo caso  $(Mu)(t) = G(t,0) x^0 + \int\limits_0^t G(t,s) C(s) \, ds + \int\limits_0^t G(t,s) B(s) u(s) \, ds$ : si tratta quindi di « mild solutions » del problema (\*).

Nota 4. I precedenti teoremi si applicano anche, per esempio, al più generale problema seguente: minimizzare la funzione  $u \to \int_0^T f(t, (Mu)(t), (Lu)(t)) dt + f_0((Mu)(s))$ , nell'insieme  $F = \{u \in L^p(Y): u \in$ 

 $||u|| \leq N$ ,  $u(t) \in U(t)$  q.o. in [0, T],  $(Mu)(t) \in E$  per ogni  $t \in I$ }, dove  $L \in \mathfrak{P}(L^p(Y))$ ,  $I \subset [0, T]$ , ed  $s \in [0, T]$  sono tra i dati del problema (v. teorema 1).

NOTA 5. Una condizione sufficiente perchè si verifichi, nella (5) del teorema 2, che «  $\bigcup_{0 \le s \le t} U(s)$  sia debolmente sequenzialmente compatto per ogni  $t \in [0, T]$ », ferme restando le altre ipotesi, è che  $s \longrightarrow U(s)$  sia debolmente semicontinua superiormente in [0, T] (v. teorema 3 nel cap. VI di [12]).

NOTA 6. Se, nel teorema 4, i vincoli non dipendono dagli stati cioè se l'applicazione  $(t,x) \to U(t,x)$  è sostituita, nei dati, dalla  $t \to U(t)$ , il teorema sussiste ancora con i nuovi vincoli sostituendo alla (4) la seguente

- (4') per ogni  $t \in [0, T]$ , U(t) è non vuoto, chiuso e convesso;
- (e modificando in modo ovvio le (5) e (6)), ferme restandone le altre ipotesi.

È immediato verificare infatti che F, con i nuovi vincoli, è debolmente sequenzialmente chiuso in  $L^p(Y)$ . Quindi nessuna ipotesi di «regolarità di movimento» è necessaria sui vincoli per la validità del teorema 4 se essi non dipendono dagli stati.

NOTA 7. È interessante osservare che il teorema 4 non dipende essenzialmente dalla riflessività di Y, nel senso che (supponendo per semplicità che i vincoli  $t \to U(t)$  non dipendano dagli stati), esso sussiste se, lasciandone invariate le altre ipotesi, si sostituiscono rispettivamente le (1), (4), con le seguenti

- (1') X sia separabile,  $Y^*$  separabile e di tipo D (secondo [11]);
- (4')  $t \to U(t)$ , da [0,T] nei sottoinsiemi non vuoti, chiusi e convessi di Y sia tale che per quasi ogni  $t_0 \in (0,T)$  esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che  $\overline{co} \bigcup_{|t-t_0| \le \varepsilon_0} U(t)$  sia debolmente sequenzialmente compatto in Y.

(La (1') è più generale della (1), infatti  $Y^* = l^1$  la verifica senza verificare la (1). La (4') è meno generale della (4) in questo caso (v. nota 6), ed è verificata se U(s) è debolmente sequenzialmente compatto per ogni  $s \in [0, T]$ , e se  $s \to U(s)$  è debolmente semicontinua superiormente in [0, T] (v. nota 5)).

Infatti basta provare che, con le nuove ipotesi,  $F_1$  è debolmente sequenzialmente compatto in  $L^p(Y)$ . Sia  $c\colon L^p(Y)\to L^p(Y)^{**}$  l'isomorfismo canonico; allora, posto  $S_N=\{u\in L^p(Y): ||u||\le N\}$ , si ha  $c(F_1)\subset c(S_N)$ , che ha  $L^p(Y)^*$ -chiusura in  $L^p(Y)^{**}$  uguale a  $S_N^{**}=\{v\in L^p(Y)^{**}: ||v||\le N\}$ , che è  $L^p(Y)^*$ -compatto in  $L^p(Y)^{**}$ , pertanto  $c(F_1)$  è  $L^p(Y)^*$ -relativamente compatto in  $L^p(Y)^{**}$ . Sia  $u_n\in F_1$ ,  $n=1,2,\ldots$ , allora esiste  $\{u_j\}$  estratta da  $\{u_n\}$  tale che  $c(u_j)\to u_0$ , nella  $L^p(Y)^*$ -topologia di  $L^p(Y)^{**}$  (infatti per la (1')  $L^p(Y)^*$  è separabile perchè  $L^p(Y)^*=L^q(Y^*)$  (v. [11]), quindi  $(c(F_1),L^p(Y)^*$ -topologia di  $L^p(Y)^{**}$ ) è metrizzabile).

Allora, per quasi ogni  $t_0 \in (0, T)$ , con  $\varepsilon_0$  scelto in modo che si

verifichi la (4'), e con  $t_0 \pm \varepsilon_0 \in (0, T)$ , si ha in particolare che  $\int_{t_0+\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} bu_j(t) \, dt \to \int_{u_0}^{u_0}(t)(b) \, dt$  se  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  e per ogni  $b \in Y^* \cdot u_0 : [0, T] \to Y^{**}$  è dunque (v. [1]) scalarmente misurabile e tale che  $t \to \| u_0(t) \| \in L^p$ . Inoltre per ogni j e per ogni  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$  risulta  $(1/2\varepsilon) \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_j(s) \, ds \in \varepsilon$  co  $U(t_0, \varepsilon)$ . Sia  $\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_0(t) \, dt$  l' integrale debole (secondo Gelfand-Dunford). Si ottiene  $\lim_{\varepsilon \to 0+} (1/2\varepsilon) \left( \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_0(s) \, ds \right) (b) = \lim_{\varepsilon \to 0+} (1/2\varepsilon) \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_0(s)(b) \, ds = u_0(t_0)(b)$  per ogni  $b \in Y^*$  e per quasi ogni  $t_0 \in (0, T)$  (in dipendenza di b), e quindi, scrivendo la precedente uguaglianza per ogni b di una parte numerabile densa in  $Y^*$ , si trova  $\lim_{\varepsilon \to 0+} (1/2\varepsilon) \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_0(s) \, ds = u_0(t_0)$  per quasi ogni  $t_0 \in (0, T)$ . Per la (4'), fissato  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  esiste  $\{u_k\}$  estratta da  $\{u_j\}$  tale che  $\{(1/2\varepsilon) \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} u_j(s) \, ds = a_\varepsilon \in \overline{co} U(t_0, \varepsilon_0)$ .

Allora  $u_0(t_0) \in \overline{co} \ U(t_0, \varepsilon_0)$  per quasi ogni  $t_0 \in [0, T]$ . Quindi  $u_0$  è debolmente misurabile tra [0, T] ed Y, il quale è separabile, quindi

per il teorema di Pettis si conclude che  $u_0 \in L^p(Y)$ , da cui la debole sequenziale compattezza di  $F_1$  in  $L^p(Y)$ .

Nota 8. L'ipotesi, nella (9) del teorema 2, che  $u \longrightarrow f(t, x, u)$ sia convessa per quasi ogni  $t \in [0, T]$  e per ogni  $x \in R_F$ , può essere sostituita da ogni ipotesi su  $u \rightarrow f(t, x, u)$  (più debole della convessità) che assicuri che  $u \to h(x, u)$  sia quasi convessa in F per ogni  $x \in M(F)$ . L'ipotesi di convessità di E (che implica quella di F) nei teoremi 3 (ipotesi (4)) e 4 (ipotesi 3)) si può eliminare, come

risulta dalle relative dimostrazioni, se  $u\longrightarrow\int f\left(t,\,x\left(t\right)\!,\,u\left(t\right)\!\right)\,dt$  veri-

fica le opportune ipotesi in un convesso contenente F.

NOTA 9. Se nel teorema 2 si suppone che

- $t \longrightarrow f(t, x(t), u(t)) \in L^1$  per ogni  $x \in M(F)$  e per ogni  $u \in L^1(Y)$ (8')con  $||u|| \leq N$ ;
- (9') $u \to f(t, x, u)$  sia convessa e continua in Y per ogni  $(t, x) \in$  $\in [0,T] \times R_F$ ;
- (10') $x \to f(t, x, u)$  sia continua in  $R_F$ , uniformemente  $(t, u) \in [0, T] \times Y$ :

e si sopprimono le (8), (9), (10), ferme restandone le altre ipotesi, allora si possono ottenere ancora le (iii) e (iv). Infatti: per dimostrare la (iv) poniamo K(t) = M(F)(t),  $0 \le t \le T$ . Per le (i) ed (ii) si ha che K(t) è compatto per ogni  $t \in [0, T]$ . Sia S una sfera aperta in X, sia  $t_0 \in [0, T]$  con  $K(t_0) \subset S$ ; allora  $d(K(t_0), \partial S) > 0$ ; per l'equicontinuità di M(F) in [0, T] si ha che  $K(t) \subset S$  se  $|t - t_0|$ è abbastanza piccolo.

Quindi (v. [12], cap. VI) K è semicontinua superiormente in [0, T] e pertanto  $R_F = K([0, T])$  è compatto. Allora  $x \to f(t, x, u)$ è uniformemente continua in  $R_F$ , uniformemente per  $(t, u) \in [0, T] \times F$ per la (10'), da cui la (iv) (in forma assai più forte del necessario). Infine basta osservare che le (8') e (10') assicurano la (iii) (in forma assai più forte del necessario), per una immediata generalizzazione vettoriale del teorema 2.1. di [6] (v. anche [18], par 19.2). Le stesse conclusioni si possono ottenere con altre varianti e raffinamenti delle (8'), (9'), (10'). Infine una condizione sufficiente perchè si verifichi la (10) del teorema 2 è che esista  $c \in L^1$  tale che risulti, q.o. in [0, T],  $f(t, x(t), u(t)) \ge c(t)$  per ogni  $(x, u) \in M(F) \times F$ .

Nota 10. Sono note condizioni necessarie e sufficienti perchè sia verificata l'ipotesi di controllabilità (la (7) del teorema 2, e analoghe dei teoremi 3, 4, 5) (v. [23]), in casi particolari.

ESEMPI. Il seguente è un esempio di applicazione del teorema 3. Siano  $n \geq 2$ ,  $\Omega$  aperto limitato in  $\mathbb{R}^n$ . Consideriamo (per ogni u) l'equazione, supposta parabolica

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(t, s) \frac{\partial^{2} x}{\partial s_{i}} \frac{\partial s_{k}}{\partial s_{k}} + \sum_{i=1}^{n} b_{i}(t, s) \frac{\partial x}{\partial s_{i}} + c(t, s) x + \int_{O} K(t, s, \omega) u(t, \omega) d\omega + d(t, s),$$

e le condizioni

$$x(0, s) = y(s), \quad s \in \Omega$$
;

$$(\partial x/\partial n)(t,s) = 0, \quad s \in \partial \Omega, \quad 0 \le t \le T,$$

dove  $\partial/\partial n$  è la derivata normale,  $\partial\Omega$ ,  $a_{ik}$ ,  $b_i$  (i, k = 1, ..., n), c, d, sono abbastanza regolari insieme con  $(t, s) \to K(t, s, \omega)$  in  $[0, T] \times \overline{\Omega}$  cosicchè esista una sola soluzione (per ogni u) del precedente problema rappresentabile mediante la funzione di Green la quale verifichi la (2) del teorema 3 (la (2) del teorema 2 è verificata se  $\partial\Omega$  è abbastanza regolare e se  $a_{ik}$ ,  $b_i$  (i, k = 1, ..., n),  $c, d, (t, s) \to K(t, s, \omega)$  sono lipschitziani (v. [17] e [20]). Siano

$$Y = L^{1}(\Omega), \quad X = H^{2,2}(\Omega), \quad u \in L^{1}(L^{1}(\Omega)).$$

La (3) del teorema 3 è verificata se

$$\begin{split} s & \to K \left( t, s, \omega \right) \in H^{2,2} \left( \varOmega \right); \, \omega \to K \left( t, s, \omega \right) \in L^{\infty} \left( \varOmega \right); \\ t & \to \text{ess. sup. } \left| \left. K \left( t, s, \omega \right) \right. \right| \in L^{\infty}. \end{split}$$

Nel seguito  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  indicano date costanti. Sia

$$E = \{z \in H^{2,2}(\Omega) :$$

$$\left| \int\limits_{\Omega} \left[ \sum_{i,k=1}^{n} p_{ik}(s) z_{ik}(s) + \sum_{i=1}^{n} p_{i}(s) z_{i}(s) + p(s) z(s) + p_{0}(s) \right] ds \right| \leq C_{1} \right\}$$

non vuoto, dove  $p_{ik}$ ,  $p_i(i, k=1, ..., n)$ ,  $p, p_0$  sono date funzioni di  $L^2(\Omega)$ .

Allora la (4) del teorema 3 è verificata. Sia  $U(t) = \{v \in L^1(\Omega) : g(t, v(s)) \le 0 \text{ q.o. in } \Omega\}$  non vuoto per ogni  $t \in [0, T]$ , dove supponiamo  $x \to g(t, x)$  convessa,  $g(t, x) \ge C_2 q(t) + C_3 |x|$ , con  $q \in L^1$ ,  $q(t) \le 0$  q.o. in [0, T],  $C_2 C_3 \neq 0$ . Allora la (5) del teorema 3 è verificata.

Sia infine

$$f(t, x, u) = \int_{\Omega} f_1(t, x(s), u(s)) ds$$
, dove supponiamo che

$$f_{1}\left(t,\,x,\,u\right)\geq f_{0}\left(t\right)$$
 per ogni $\left(x,\,u\right)$ , per qualche  $f_{0}\in L^{1}$ ;

 $u \to f_1(t, x, u)$  sia convessa, mentre  $x \to f_1(t, x, u)$  sia semicontinua inferiormente, uniformemente rispetto ad u. Allora le (8), (9), (10) del teorema 2 sono verificate.

Analoghi esempi si possono costruire riguardo agli altri teoremi del presente lavoro. In particolare, si può dare un analogo esempio di applicazione per il teorema 2, assumendo  $Y=L^p(\Omega),\ X=C^0(\overline{\Omega})$  (funzioni continue in  $\overline{\Omega}$ ), p>1, e supponendo che K (con le notazioni dell'esempio precedente) definisca B(t) come operatore lineare limitato da  $L^p(\Omega)$  in  $C^0(\overline{\Omega})$ , e che U(t) sia definito analogamente (consideriamo per semplicità solo il caso di vincoli indipendenti dagli stati); se si suppone che  $s\to K(t,s,\omega)$  sia continuo in  $\overline{\Omega}$ , uniformemente rispetto ad  $\omega$ , la (6) del teorema 2 risulta verificata. Infine i precedenti teoremi si possono anche applicare a problemi di controllo descritti da equazioni integrali, o integro-differenziali.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] DIEUDONNÈ, Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym (V). Can. J. Math. 3 (1951), 129-139.
- [2] DUNFORD-SCHWARTZ, Linear Operators, part. I. Interscience, 1958.
- [3] ZOLEZZI, Teoremi di esistenza nella teoria dei controlli ottimi in dimensione finita. Rend. Sem. Mat. Padova (1967), vol. 34, 163-176.
- [4] PHILLIPS, On linear transformations. Trans. A. M. S. vol. 48 (1940), 516-541.
- [5] DIEUDONNÉ, Foundations of modern analysis. Academic Press, 1960.
- [6] Krasnosel'skii, Topological methods in the theory of non linear integral equations. Pergamon Press, 1964.
- [7] KAKUTANI, Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem. Ann. of Math. vol. 42 n. 2 (1941), 523-537.
- [8] GROTHENDIECK, Sur les applications lineaires faiblement compactes d'espaces du type C(K). Can. J. Math. vol. 5 (1953), 129-173.
- [9] GRAVES, Theory of functions of a real variable. II edizione. McGraw-Hill, 1956.
- [10] BROWDER, Remarks on the direct methods of the calculus of variations. Arch. Rat. Mech. An. 20 (1965), 251-258.
- [11] BOCHNER TAYLOR, Linear Functionals on certain spaces of abstractly-valued functions. Ann. of Math. vol. 39 n. 4 (1938), 913-944.
- [12] BERGE, Topological spaces, Oliver and Boyd, 1963.
- [13] FRIEDMAN, Optimal control for parabolic equations. J. Math. An. Appl. vol. 18 n. 3 (1967), 479-491.
- [13] FRIEDMAN, Optimal control in Banach spaces. J. Math. An. Appl. vol. 19 n. 1 (1967), 35-55.
- [14] BALAKRISHNAN, Optimal control problems in Banach spaces J. Siam. Control, ser. A, vol. 3 n. 1 (1965) 152-180.
- [15] NASHED, Supportably and weakly convex functionals with applications to approximation theory and nonlinear programming. J. Math. An. Appl. 18 (1967) 504-521
- [16] KAKUTANI, Concrete representation of abstract (M)-spaces. Ann. of. Math. 42 (1941), 994-1024.
- [17] POULSEN, Evolutionsgleichungen in Banach-Raeumen. Math. Zeitschrift. 90 (1965), 286-309.
- [18] VAINBERG, Variational methods for the study of nonlinear operators. Holden-Day, 1964.
- [19] Yosida, Functional Analysis. Springer, 1966.
- [20] FRIEDMAN, Remarks on nonlinear parabolic equations. Proceedings of Symp. in Applied. Math. vol. XVII (1964), 3-23

- [21] LIONS, On some optimization problems for linear parabolic equations. Functional Analysis and Optimization, edited by E. Caianiello, 115-131. Academic Press, 1966.
- [22] LIONS, Optimisation pour certaines classes d'équations d'évolutions non linéaires. Ann. Mat. Pura e Appl. 72 (1966), 275-294.
- [23] CONTI, On some aspects of linear control theory. Math. Theory of Control. Proc. of a Conference held at the U. S. C. L. A. (1967), edited by Balakrishnan and Neustadt. Academic Press 1967, 285-300.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 30 marzo 1968.