RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO MARINO
GIOVANNI PRODI

La teoria di Morse per gli spazi di Hilbert. Un'applicazione al problema della diramazione per operatori variazionali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 43-68

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__43_0>

LA TEORIA DI MORSE PER GLI SPAZI DI HILBERT

UN'APPLICAZIONE AL PROBLEMA DELLA DIRAMAZIONE PER OPERATORI VARIAZIONALI

ANTONIO MARINO e GIOVANNI PRODI *)

Questo lavoro riguarda alcuni aspetti della teoria di Morse negli spazi di Hilbert. Come è ben noto, la teoria di Morse stabilisce relazioni fra certi caratteri omologici di una varietà e il numero dei punti critici che una funzione differenziabile definita su essa possiede.

Si deve a E. H. Rothe (Vd.: [9], [10], [11]) l'introduzione dei metodi di Morse per lo studio dei punti critici delle funzioni negli spazi di Hilbert. Il Rothe studiò soprattutto problemi di carattere locale, per gli scopi dell'analisi funzionale, e stabilì un collegamento, per gli operatori variazionali, tra i numeri di Morse e il grado di Leray-Schauder.

Negli ultimi anni, la teoria di Morse è stata estesa in tutti i suoi aspetti principali alle varietà modellate su spazi di Hilbert e di Banach. Malgrado la sua eleganza, tuttavia — a quello che ci risulta — la teoria ottenuta non ha avuto molte applicazioni alla analisi funzionale: il motivo, forse, può essere cercato nel fatto che in molti problemi è difficile garantire « a priori » che i punti critici siano non degeneri, come vuole la teoria di Morse.

Indirizzo degli autori: Istituto Matematico dell'Università di Pisa.

*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca N. 24 del C. N. R. (Comitato per la Matematica).

In questo lavoro applichiamo i metodi di Morse a problemi di carattere locale, assumendo un punto di vista vicino a quello di Rothe. Consideriamo funzioni reali definite in un intorno dell'origine di uno spazio di Hilbert reale, del tipo

$$\frac{\lambda}{2}\,|\,x\,|^2 - a\,(x)$$

dove λ è un parametro reale e la funzione a ha un gradiente A compatto con $A\,(0) = 0$; pertanto l'origine è, in ogni caso, un punto critico.

I §§ 1 e 2 hanno carattere preparatorio e richiamano risultati per lo più noti. Ci pare tuttavia interessante per la semplicità della esposizione il calcolo dei gruppi di Morse per un punto critico non degenere (teorema (2.4)).

Nel § 3 riprendendo una ricerca di Rothe e colmando alcune lacune che si trovano nella esposizione di questo A., compiamo uno studio dei punti critici isolati: si tratta, in sostanza, di studiare i gruppi di Morse stando a distanza dal punto critico (anche se a distanza non troppo grande): è da notare che non si postula il carattere non degenere del punto critico. Inoltre le ipotesi in cui ci mettiamo sono più generali di quelle del Rothe.

Nel § 4 viene ottenuta, attraverso la teoria di Morse, la dimostrazione di un notevole teorema di Krasnosel'skii sull'esistenza di una diramazione per un operatore variazionale compatto. Si tratta di un importante problema di analisi funzionale, per cui l'impiego della teoria di Morse appare naturale; in effetti, la dimostrazione che presentiamo è più semplice di quella di Krasnosel'skii.

Per applicazioni di questo teorema, rimandiamo, ad esempio, al lavoro [7].

I contenuti dei §§ 3 e 4 sono del tutto indipendenti. Tra le due questioni vi è solo affinità di metodo: in effetti si tratta, in entrambi i casi, di realizzare omotopie mediante le soluzioni di equazioni differenziali. Poichè lungo le traiettorie la funzione deve conservare il medesimo segno, occorre definire l'equazione differenziale in modo tale che la varietà degli zeri della funzione sia una barriera che le traiettorie non possono oltrepassare.

1. Premesse.

Esponiamo qui alcuni risultati di carattere tecnico che ci saranno utili nel seguito.

Il primo lemma è un'estensione del noto principio per cui un sistema differenziale è risolubile in grande quando sussista una maggiorazione a priori per le sue soluzioni.

LEMMA (1.1). *Sia Ω un aperto di uno spazio di Banach B e sia $F: \Omega \rightarrow B$ un operatore di classe $\mathcal{C}^1$ definito in Ω. Si consideri il problema di Cauchy*

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x) \\ \\ x(0) = x_0 \qquad (x_0 \in \Omega) \end{cases}$$

in un intervallo $[0, a[$ (oppure $[0, a]$). Si supponga che, per ogni t^*, con $0 < t^* < a$ (oppure $0 < t^* \leq a$), ogni eventuale soluzione x definita in $[0, t^*[$ sia tale che:

l'insieme $\{x(t) : t \in [0, t^*[\}$ abbia chiusura contenuta in Ω

l'insieme $\{F(x(t)) : t \in [0, t^*[\}$ sia limitato.

Allora il problema (1.2) ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo $[0, a[$ (oppure, risp., $[0, a]$).

DIM. E' noto che per il problema (1.2) sussiste un teorema di esistenza e unicità locale rispetto a t, qualunque sia $x_0 \in \Omega$: per questo basta tener presente che la continuità di F' assicura il carattere lipschitziano locale di F.

Sia dunque τ l'estremo superiore dei numeri t^* tali che il problema (1.2) abbia una (ed una sola) soluzione in $[0, t^*[$.

Supponiamo per assurdo che sia $\tau < a$. Vediamo anzitutto che, in questa ipotesi, esiste una ed una sola soluzione x che è definita in tutto l'intervallo $[0, \tau]$. Infatti, per la definizione di τ, esiste una ed una sola soluzione x in $[0, \tau[$. Inoltre per le nostre ipotesi esiste un numero K tale che sia $|F(x(t)| \leq K$ e cioè $\left|\frac{dx}{dt}\right| \leq K$ per $t \in [0, \tau[$. Pertanto esiste il limite: $\lim x(t) = \hat{x}$; sempre per le nostre ipotesi deve essere $\hat{x} \in \Omega$. Allora, dato che anche $\frac{dx}{dt} = F(x(t))$ ammette limite (in B) per $t \to \tau^-$, la soluzione x è prolungabile a tutto l'intervallo chiuso $[0, \tau]$. Ovviamente x è l'unica soluzione in $[0, \tau]$.

Ora, giacchè abbiamo supposto $\tau < a$, possiamo applicare il teorema di esistenza e unicità locale, e concludere che esiste una ed una sola soluzione in tutto un intervallo $[0, \tau'$ [con $\tau < \tau' < a$. Ma questo è impossibile per il modo con cui abbiamo definito τ.

Il seguente lemma è un'estensione del ben noto teorema di dipendenza continua dai valori iniziali.

LEMMA (1.3). *Sia ancora F un operatore di classe $\mathcal{C}^1$ definito in un aperto Ω di uno spazio di Banach B e si supponga che l'equazione $\frac{dx}{dt} = F(x)$ ammetta una soluzione $\tilde{x}$ definita in $[0, a]$ e soddisfacente alla condizione iniziale $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$. Allora si può assegnare un intorno V del punto $\tilde{x}_0$ tale che l'equazione ammette una (ed una sola) soluzione in $[0, a]$ per ogni dato iniziale $x_0 \in V$. Tale soluzione, inoltre, dipende con continuità da x_0 nella topologia della convergenza uniforme in $[0, a]$.*

La dimostrazione si ottiene facilmente procedendo secondo uno schema ben noto: cioè osservando che la tesi sussiste per un intervallo $[0, \delta]$ con δ abbastanza piccolo, quindi utilizzando la compattezza dell'intervallo $[0, a]$.

COROLLARIO. La soluzione del problema di Cauchy, come applicazione $V \times [0, a] \to B$, è continua.

2. Punti critici e gruppi di Morse.

Sia U un aperto di uno spazio di Hilbert sul corpo reale H. Sia b una funzione reale definita in U di classe $\mathcal{C}^1$; come è noto un punto $x_0 \in U$ viene detto *critico* se, posto $B = \text{grad}\, b$, è $B(x_0) = 0$; il valore $c = b(x_0)$ viene detto *livello critico.*

Poniamo:

$$U^{-} = \{x : \ b(x) \leq c\}$$

e introduciamo, seguendo l'ordine di idee di M. Morse, i gruppi di omologia relativa singolare, a coefficienti in un fissato gruppo abeliano G:

$$H_n(U^{-}, \ U^{-} - \{x_0\}) \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots). \tag{2.1}$$

Chiameremo questi gruppi *gruppi di Morse* relativi al punto critico x_0. Osserviamo che, presa una qualunque palla $V_\delta = \{x : \ | x - x_0 | \leq \delta\}$ che sia contenuta in U, si ha per ogni intero n:

$$H_n(U^{-}, \ U^{-} - \{x_0\}) \approx H_n(U^{-} \cap V_\delta, \ U^{-} \cap V_\delta - \{x_0\}). \tag{2.2}$$

Basta, infatti, indicare con $\widetilde{V}_\delta$ il complementare di V_δ in U e applicare la proprietà di excisione, notando che è $U^{-} \cap V_\delta = U^{-} - U^{-} \cap \widetilde{V}_\delta$ e che l'aperto $U^{-} \cap \widetilde{V}_\delta$ ha la sua chiusura interna ad $U^{-} - \{x_0\}$ (nella topologia relativa ad U^{-}).

Supponiamo ora che la funzione b sia di classe $\mathcal{C}^1$ e ammetta differenziale secondo nel punto x_0. Questo è una forma bilineare simmetrica che si può rappresentare così: $(h, k) \longrightarrow (B'(x_0)\, h \mid k)$, dove $B'(x_0)$ è un operatore lineare continuo simmetrico.

Supponiamo ora che x_0 sia un punto critico; il differenziale secondo in x_0 viene detto *forma Hessiana* associata al punto critico x_0.

Si dice che x_0 è un punto critico *non degenere*, se la relativa forma Hessiana è non degenere, cioè se l'operatore $B'(x_0)$ è invertibile. È evidente che i punti critici non degeneri sono isolati.

Nel corso di questo lavoro noi consideriamo funzioni della forma

$$b_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} \, | x |^2 - a(x) \tag{2.3}$$

definite in un aperto U comprendente l'origine e supponiamo che questa sia un punto critico per b_λ, con $b_\lambda(0) = 0$. Poniamo $A = \operatorname{grad} a$, $B_\lambda = \operatorname{grad} b_\lambda$. Essendo $B_\lambda(x) = \lambda x - A(x)$, dovrà essere pertanto $A(0) = 0$. Ovviamente, l'interesse di considerare funzioni della forma (2.3) risiede nelle particolari ipotesi che si fanno per a.

I principali risultati verranno stabiliti sotto la seguente ipotesi:

Ipotesi (K) $A = \operatorname{grad} a$ risulti compatto (cioè continuo, e tale da portare insiemi limitati in insiemi a chiusura compatta).

Osserviamo che nell'ipotesi (K), il differenziale (di Fréchet) di A, nei punti in cui esiste, è un operatore lineare compatto.

Ci proponiamo ora di calcolare i gruppi di Morse per un punto critico non degenere. Vale il seguente teorema:

TEOREMA (2.4). *Sia b_λ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ che ammetta differenziale secondo in 0 e che sia della forma* (2.3), *con $\lambda > 0$, dove a soddisfa all'ipotesi (K). Si supponga che il punto 0 sia punto critico non degenere per b_λ; allora, detto r il numero degli autovalori di $A'(0)$ che superano λ (contati con la relativa molteplicità) si ha*

$$H_n(U^-, U^- - \{0\}) \approx \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq r \\ G & \text{per } n = r \end{cases}$$

essendo G il gruppo dei coefficienti dell'omologia.

Di questa proposizione sono state date varie dimostrazioni peraltro, in ipotesi di maggiore regolarità per la funzione: ne citiamo una di S. Palais ([6]) ad una di E. H. Rothe ([12] p. 251). La dimostrazione che esponiamo è abbastanza vicina a quest'ultima, ma è più semplice e più geometricamente intuibile.

Premettiamo un lemma (noto e, del resto, abbastanza ovvio).

LEMMA (2.5). *In uno spazio di Hilbert H si consideri la forma quadratica $x \to (T(x) \mid x)$, essendo T un operatore lineare simmetrico limitato invertibile.*

Allora esistono un automorfismo lineare Φ, e due proiettori ortogonali complementari P_1, P_2 tali che, posto $\Phi x = \xi$, si ha:

$$(T(x) \mid x) = - \mid P_1 \xi \mid^2 + \mid P_2 \xi \mid^2 .$$

Inoltre P_1 è la proiezione associata alla parte negativa dello spettro di T, P_2 è la proiezione associata alla parte positiva.

DIM. Possiamo porre $T = |T| \operatorname{sgn} T$. Occorre tenere presente che, non appartenendo lo 0 allo spettro di T, la funzione di T: sgn T è ben definita e si ha $\operatorname{sgn} T = P_2 - P_1$, essendo P_1 il poiettore associato alla parte negativa dello spettro, P_2 associato alla parte positiva (Vd. [8] Cap. VII).

L'operatare $|T|$ è un automorfismo di H, e tale è pure $|T|^{1/2}$. Allora si può scrivere, ponendo $S = |T|^{1/2}$,

$$(T(x) \mid x) = (|T| \operatorname{sgn} T(x) \mid x) = (|T|^{1/2}(P_2 - P_1)(x) \mid |T|^{1/2}(x)) =$$

$$= (|T|^{1/2} P_2(x) \mid |T|^{1/2}(x)) - (|T|^{1/2} P_1(x) \mid |T|^{1/2}(x)) =$$

$$= |P_2 \Phi(x)|^2 - |P_1 \Phi(x)|^2.$$

Il lemma risulta così dimostrato.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema (2.4). La funzione (2.3) si può porre nella forma:

$$b_\lambda(x) = \frac{1}{2}(\lambda x - A'(0)(x) \mid x) + r(x)$$

dove r ha differenziali primo e secondo nulli nel punto 0. Applichiamo il lemma (2.5) tenendo presente che, essendo 0 punto critico non degenere, l'operatore $\lambda I - A'(0)$ risulta invertibile; esiste dunque un automorfismo di H, Φ, che muta l'aperto U in un aperto $\widetilde{U}$ e la funzione b_λ in una funzione $\widetilde{b}_\lambda$ così rappresentabile

$$\widetilde{b}_\lambda(\xi) = -|P_1 \xi|^2 + |P_2 \xi|^2 + s(\xi)$$

dove s è ancora una funzione con differenziali primo e secondo nulli nel punto 0, P_1 e P_1 sono proiettori ortogonali complementari; dal lemma (2.5) risulta che la dimensione di P_1 è uguale al numero r degli autovalori negativi dell'operatore $\lambda I - A'(0)$ (contati con le rispettive molteplicità), cioè al numero degli autovalari di $A'(0)$ che superano λ.

Conviene indicare con H_1, H_2 i sottospazi invarianti di P_1 e

P_2, e porre $\xi_1 = P_1 \xi$, $\xi_2 = P_2 \xi$; così si può scrivere:

$$\widetilde{b}_\lambda(\xi) = -|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + s(\zeta) \quad [1] \tag{2.6}$$

Poniamo $S = \operatorname{grad} s$; dalle proprietà di s risulta che:

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{|s(\xi)|}{|\xi|^2} = 0, \qquad \lim_{\xi \to 0} \frac{|S(\xi)|}{|\xi|} = 0.$$

Siano ν e γ numeri positivi tali che

$$\nu < 1 \ , \qquad \frac{\gamma^2}{(2-\gamma)^2} < \frac{1-\nu}{1+\nu} \, . \tag{2.7}$$

Esiste una palla $V_\delta = \{\xi : |\xi| \leq \delta\}$ tale che, per ogni $\xi \in V_\delta$ si abbia:

$$|s(\xi)| \leq \nu |\xi|^2, \qquad |S(\xi)| \leq \gamma |\xi|. \tag{2.8}$$

Indichiamo con $\widetilde{U}^-$ l'insieme $\{\xi : \widetilde{b}_\lambda(\xi) \leq 0\}$, che è, evidentemente, il trasformato di U^-.

Vogliamo dimostrare che è possibile eseguire una retrazione di V_δ su $V_\delta \cap H_1$, che subordini una retrazione di $V_\delta \cap \widetilde{U}^-$ su $V_\delta \cap \widetilde{U}^- \cap H_1$ e di $V_\delta \cap \widetilde{U}^- - \{0\}$ su $V_\delta \cap \widetilde{U}^- \cap H_1 - \{0\}$. Tale retrazione sarà fornita dalla restrizione della proiezione P_2 a V_δ. Intanto, dalla (2.6) e dalla prima delle (2.8) ri ricava, per $\xi \in V_\delta$:

$$\begin{aligned}(-1-\nu)|\xi_1|^2 + (1-\nu)|\xi_2|^2 \leq \widetilde{b}_\lambda(\xi) \leq \\ \leq (-1+\nu)|\xi_1|^2 + (1+\nu)|\xi_2|^2\end{aligned} \tag{2.9}$$

---

[1]) È possibile trovare un cambiamento di variabili (non lineare) che trasformi la funzione nella forma quadratica: $-|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2$. In questo consiste il ben noto lemma di Morse (che Palais [7] ha esteso agli spazi di Hilbert e ha utilizzato per l'analisi dei punti critici non degeneri). Ma le dimostrazioni di questo lemma a noi note esigono che la funzione sia di classe $\mathcal{C}^3$.

perciò gli zeri della funzione $\widetilde{b}_\lambda$ in $V_\delta - \{0\}$ sono tutti contenuti nella regione

$$\left\{ \xi : \frac{1-\nu}{1+\nu} \leq \frac{|\xi_2|^2}{|\xi_1|^2} \leq \frac{1+\nu}{1-\nu} \right\}.$$

Consideriamo ora, in V_δ, l'applicazione ψ: $V_\delta \times [0,1] \rightarrow V_\delta$ così definita, posto sempre $\xi = \xi_1 + \xi_2$:

$$\psi(\xi, t) = \xi_1 + (1-t)\,\xi_2.$$

Poniamo inoltre $\varphi(\xi, t) = \widetilde{b}(\psi(\xi, t)) = -|\xi_1|^2 + (1-t)^2 |\xi_2|^2 + + s(\xi_1 + (1-t)\,\xi_2)$.

Si trova, con semplici calcoli:

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = -2(1-t)\,|\xi_2|^2 - (S(\xi_1 + (1-t)\,\xi_2)\,|\,\xi_2)$, perciò, tenendo conto della seconda delle (2.8):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \leq -2(1-t)\,|\xi_2|^2 + \gamma\,|\xi_1 + (1-t)\,\xi_2|\,|\xi_2| \leq$$

$$\leq -(2-\gamma)(1-t)\,|\xi_2|^2 + \gamma\,|\xi_1|\,|\xi_2|$$

se ne deduce che è $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \leq 0$ non appena sia:

$$(2-\gamma)(1-t)\,|\xi_2| - \gamma\,|\xi_1| \geq 0. \tag{2.10}$$

Se questa diseguaglianza è verificata in qualche punto dell'intervallo $[0, 1]$, essa lo è in un intervallo del tipo $[0, t^*]$ ($t^* < 1$). In questo caso, se è $\xi \in \widetilde{U}^-$, cioè se è $\varphi(\xi, 0) \leq 0$, si ha anche $\varphi(\xi, t) \leq 0$ per $t \in [0, t^*]$, dunque $\psi(\xi, t) \in \widetilde{U}^-$ in $[0, t^*]$. Consideriamo invece i punti dell'intervallo $[t^*, 1]$, in cui varrà la diseguaglianza opposta della (2.10). Dalla (2.9) si ricava:

$$\varphi(\xi, t) \leq (-1+\nu)\,|\xi_1|^2 + (1+\nu)(1-t)^2\,|\xi_2|^2 \leq$$

$$\leq \left\{ -1 + \nu + (1+\nu)\frac{\gamma^2}{(2-\gamma)^2} \right\} |\xi_1|^2$$

e dalla seconda delle (2.7) si ricava che in $[t^*, 1]$ si ha in ogni caso $\varphi(\xi, t) \leq 0$.

Dunque, l'applicazione ψ definisce una retrazione (in senso stretto) di $V_\delta \cap \widetilde{U}^-$ su $V_\delta \cap \widetilde{U}^- \cap H_1$; si verifica immediatamente che ψ definisce anche una retrazione di $V_\delta \cap \widetilde{U}^- - \{0\}$ su $V_\delta \cap \widetilde{U}^- \cap \cap H_1 - \{0\}$.

Ora, $\widetilde{U} \cap V_\delta \cap H_1$ è una palla B^r di uno spazio euclideo r-dimensionale, di cui possiamo indicare con S^r la frontiera. Allora si ha, per ogni n,

$$H_n(U^-, U^- - \{0\}) \approx H_n(\widetilde{U}^-, \widetilde{U}^- - \{0\}) \approx H_n(\widetilde{U}^- \cap V_\delta, \widetilde{U}^- \cap V_\delta - \{0\}) \approx$$

$$\approx H_n(B^r, B^r - \{0\}).$$

Ma è noto (cfr. [2] Cap. I) che si ha:

$$H_n(B^r, B^r - \{0\}) \approx H_n(B^r, S^{r-1}) \approx \begin{cases} G & \text{per } n = r \\ 0 & \text{per } n \neq r. \end{cases}$$

Il teorema (2.4) risulta così completamente dimostrato.

3. Studio dei punti critici isolati.

In questo paragrafo consideriamo una funzione del tipo

$$b(x) = \frac{1}{2} |x|^2 - a(x) \tag{3.1}$$

con a funzione di classe C^2, definita nell'aperto $U = \{x: x \in H, |x| < \tau\}$, e tale che si abbia, posto $A = \operatorname{grad} a$, $A(0) = 0$. Dunque il punto 0 è critico per b; supponiamo inoltre che sia $a(0) = 0$.

Il nostro scopo è principalmente quello, già perseguito dal Rothe, di studiare il punto critico 0 e, in particolare, calcolarne i gruppi di Morse mediante il comportamento della funzione b a distanza da esso.

Premettiamo una definizione

DEFINIZIONE (3.2). Diremo che l'operatore A, definito in un insieme $U \subset H$ verifica la condizione (NR) (condizione di *non-radialità*) nell'insieme $T \subset U$, con $0 \notin T$, se in T $A(x)$ non è in alcun punto parallelo ad x. (In altre parole, quali che siano il numero reale λ ed il punto $x \in T$, si ha $A(x) \neq \lambda x$).

OSSERVAZIONE. La condizione (NR) in T si può esprimere mediante la diseguaglianza:

$$|A(x)|^2 |x|^2 - (A(x) | x)^2 > 0 \text{ qualunque sia } x \in T. \tag{3.3}$$

Poniamo:

$$U^- = \{x : x \in U, \ b(x) \leq 0\}, \quad U^0 = \{x : x \in U, \ b(x) = 0\}$$

$$V_\delta = \{x : |x| \leq \delta\}, \quad S_\delta = \{x : |x| = \delta\} \quad (\delta < \tau).$$

Siamo ora in grado di enunciare il risultato principale di questo paragrafo:

TEOREMA (3.4). *Si consideri in U la funzione b espressa dalla (3.1), dove a è di classe C^2, tale che $a(0) = 0$ e che, posto $A = grad\, a$, sia $A(0) = 0$.*

Per A valga l'ipotesi (K) e sia soddisfatta inoltre la condizione (NR) nell'insieme $U^0 - \{0\}$ [2]).

Allora esiste un numero $\delta > 0$, $\delta < \tau$, tale che sia, per ogni $n \geq 1$:

$$H_n(U^-, U^- - \{0\}) \approx \tilde{H}_{n-1}(\tilde{U}^- \cap S_\delta)$$

avendo indicato con $\tilde{H}_r$ il gruppo r-esimo di omologia ridotta singolare.

---

[2]) Questa ipotesi, che il Rothe assume in una forma più restrittiva (cioè con un'ulteriore condizione di uniformità) è stata introdotta per la prima volta da A. B. Brown (in dimensione finita, cfr. [1]).

OSSERVAZIONE. La validità della condizione (NR) nell'insieme $U^0 - \{0\}$, implica, in particolare, che l'origine non è punto di accumulazione di punti critici *che si trovino a livello nullo.* In questo senso diciamo che il punto 0 è isolato. Peraltro, le considerazioni che svolgiamo si possono applicare al caso in cui lo 0 sia punto di accumulazione di punti critici (a livelli $\neq 0$).

Si dimostrerà più avanti (cfr. § 4, def. 4.2 e lemma 4.7) che, se 1 non è punto di diramazione per l'operatore A (in particolare, se 0 è punto critico *non degenere* per la funzione b) la condizione (NR) è senz'altro verificata, nei punti di $U^0 - \{0\}$ che sono in un opportuno intorno dell'origine.

La dimostrazione del teorema si basa sul seguente lemma:

LEMMA (3.5). *Nelle stesse ipotesi del teorema* (3.4) *esiste un* $\delta > 0$, $\delta < \tau$ *tale che*:

α_1) *lo spazio* $(V_\delta - \{0\}) \cap U^-$ *sia retrattibile sul suo sottospazio* $S_\delta \cap U^-$

α_2) *lo spazio* $V_\delta \cap U^-$ *sia contrattile.*

Prima di compiere la dimostrazione del lemma (3.5) vediamo come dal lemma (3.5) segue il teorema (3.4) [3].

Dalla (2.2) e dall'affermazione α_1) del lemma (3.5) si ricava:

$$H_n(U^-, U^- - \{0\}) \approx H_n(U^- \cap V_\delta, U^- \cap V_\delta - \{0\}) \approx \approx H_n(U^- \cap V_\delta, U^- \cap S_\delta). \tag{3.6}$$

Ora, la seguente sequenza di omologia ridotta è esatta (cfr. [2], teorema (8.4), pag. 20):

$$\rightarrow \widetilde{H}_n(U^- \cap V_\delta) \rightarrow H_n(U^- \cap V_\delta, U^- \cap S_\delta) \rightarrow \rightarrow \widetilde{H}_{n-1}(U^- \cap S_\delta) \rightarrow \widetilde{H}_{n-1}(U^- \cap V_\delta) \rightarrow$$

[3]) Questa deduzione si trova nel lavoro [10] di Rothe, salvo l'impiego dell'omologia ridotta in luogo di quella ordinaria. (Questo accorgimento, che semplifica l'enunciato del teorema, ci è stato suggerito dal prof. Martinelli).

D'altra parte, poichè, per l'affermaziane α_2) del lemma (3.5), $U^- \cap V_\delta$ è contrattile, si ha, per ogni n, $\tilde{H}_n(U^- \cap V_\delta) \approx 0$. Perciò l'omomorfismo centrale, nella sequenza scritta, è un isomorfismo. Di qui, tenendo conto della (3.6), si ottiene la tesi.

La dimostrazione del lemma (3.5) verrà frazionata in alcuni lemmi.

Lemma (3.7). *La funzione a sia differenziabile in ogni punto, inoltre $A = \operatorname{grad} a$ ammetta differenziale (di Fréchet) nel punto 0, $A'(0)$. Sia $A(0) = 0$. Se l'origine è punto di accumulazione per l'insieme U^0 si ha*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U^0}} \frac{(A(x) \mid x)}{|x|^2} = 1.$$

Dim. Essendo $A(0) = 0$, si ha:

$$a(x) = \frac{1}{2}(A'(0)(x) \mid x) + r(x), \quad \text{con} \lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{|x|^2} = 0$$

$$\operatorname{grad} a(x) = A(x) = A'(0)(x) + R(x), \quad \text{con} \lim_{x \to 0} \frac{R(x)}{|x|} = 0$$

Da queste relazioni si ottiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a(x) - \frac{1}{2}(A(x) \mid x)}{|x|^2} = 0.$$

Poichè, se $x \in U^0$, si ha per definizione $a(x) = \frac{1}{2}|x|^2$, si ottiene subito la tesi.

Lemma. (3.8). *Oltre alle ipotesi del lemma precedente, si supponga che l'operatore A soddisfi alle condizioni (K) e alla condizione (NR) nell'insieme $U^0 - \{0\}$, almeno in un intorno abbastanza piccolo dell'origine.*

Allora esiste un $\delta > 0$, (con $\delta < \tau$) ed esiste una funzione reale σ definita in $]0, \delta]$, positiva, continua, monotona, infinitesima al ten-

dere a zero dell'argomento, tale che si abbia, per $x \in V_\delta \cap U^0 - \{0\}$:

$$|A(x)|^2 |x|^2 - (A(x) | x)^2 \geq \sigma(|x|). \tag{3.9}$$

Ricordando la (3.3) si comprende subito che il lemma (3.8) afferma la validità della condizione (NR) in modo uniforme, in ogni insieme $V_{\gamma,\delta}\{x: \gamma \leq |x| \leq \delta\}$ (con $0 < \gamma \leq \delta$).

DIM. Posto

$$\varrho(x) = \frac{(A(x) | x)}{|x|^2} \tag{3.10}$$

determiniamo un $\delta > 0$ tale che:

la palla V_δ sia contenuta in U
in $V_\delta \cap U^0 - \{0\}$ valga la condizione (NR)
in $V_\delta \cap U^0 - \{0\}$ sia $\varrho(x) \geq \frac{1}{2}$

tenendo presente che l'ultima condizione può essere verificata in virtù del lemma (3.7).

Si ricava facilmente la relazione:

$$|A(x)|^2 |x|^2 - (A(x) | x)^2 = |x^2| (|A(x)|^2 - \varrho(x)^2 |x|^2) = |x|^2 |A(x) - \varrho(x) x|^2. \tag{3.11}$$

Pertanto è necessario studiare l'operatore

$$\{x \longrightarrow A(x) - \varrho(x)x : x \in V_\delta \cap U^0 - \{0\}\}:$$

dimostriamo che esso porta i sottoinsiemi chiusi di H contenuti in $V_\delta \cap U^0 - \{0\}$ in insiemi chiusi. Sia, infatti, K un chiuso di H contenuto in $V_\delta \cap U^0 - \{0\}$, e sia x_n una successione di punti di $V_\delta \cap U^0 - \{0\}$ tale che la successione $y_n = A(x_n) - \varrho(x_n) x_n$ sia convergente verso un elemento y^*. Estratta una successione x_{n_k} tale che $A(x_{n_k})$ e $\varrho(x_{n_k})$ convergano, si ricava:

$$x_{n_k} = \frac{1}{\varrho(x_{n_k})} (A(x_{n_k}) - y_{n_k}).$$

Essendo $\varrho(x_{n_k}) \geq \frac{1}{2}$, se ne deduce la convergenza di x_{n_k} verso un elemento $x^* \in K$ tale che $A(x^*) - \varrho(x^*)\,x^* = y^*$.

L'insieme $V_{\gamma,\delta} \cap U^0$ $(0 < \gamma \leq \delta)$ viene portato in un sottoinsieme chiuso, il quale, in virtù della condizione (NR) non contiene l'origine ed ha pertanto dall'origine una distanza positiva $\tilde{\sigma}(\gamma)$.

La funzione $\sigma : \gamma \longrightarrow \gamma^2 \tilde{\sigma}^2(\gamma)$ verifica la (3.9) (tenuto conto della (3.11)); essa è positiva, monotona, infinitesima al tendere dell'argomento a zero. Non è detto (o, almeno, non risulta dalla dimostrazione svolta) che σ sia continua: ma si vede che, quando non lo sia, le si può sostituire una minorante continua che conservi tutte le altre proprietà volute.

Nei lemmi che seguono in questo paragrafo si considera la funzione σ del lemma precedente, prolungata a tutta la semiretta reale positiva in modo da risultare continua. Questo prolungamento viene indicato ancora con σ. Conserviamo al simbolo δ il significato del lemma precedente e poniamo $w(x) = |A(x)|^2 \, |x|^2 - (A(x) \mid x)^2$.

LEMMA (3.13). *Siano verificate tutte le ipotesi del lemma precedente e inoltre b sia di classe $\mathcal{C}^2$ in $U - \{0\}$.*

Allora esiste una funzione $\omega : U - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ uguale a 1 nei punti di un aperto contenente l'insieme $U^0 \cap V_\delta - \{0\}$, e uguale a 0 nei punti di un aperto contenente l'insieme $\{x : x \in U - \{0\}, w(x) = 0\}$. Di conseguenza è di classe $\mathcal{C}^1$ la funzione $\tilde{w}(x)$ così definita: $\tilde{w}(x) = \dfrac{\omega(x)}{w(x)}$ se $w(x) \neq 0$, $\tilde{w}(x) = 0$ se $w(x) = 0$; inoltre $\tilde{w}(x)$ coincide con $w(x)^{-1}$ in tutto un intorno di $U^0 \cap V_\delta - \{0\}$.

DIM. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ i seguenti insiemi:

$$E_1 = \left\{(u, v) : \ u \geq 0, \ v \geq \frac{1}{2}\sigma(u)\right\} - \{0\},$$

$$E_0 = \left\{(u, v) : \ u \geq 0, \ 0 \leq v \leq \frac{1}{3}\sigma(u)\right\} - \{0\}$$

E_1 ed E_0 sono due insiemi disgiunti in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ e chiusi nella topologia relativa. Esiste allora come è ben noto una funzione $\Theta(u,v)$ di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ che vale 1 nei punti di E_1 e vale 0 nei punti di E_0. La funzione $\omega(x) = \Theta(|x|, w(x))$ $(x \in U - \{0\})$ ha le proprietà richieste. Infatti è di classe $\mathcal{C}^1$ in $U - \{0\}$, e inoltre se $w(x) \geq \frac{1}{2}\sigma(|x|)$ è $\omega(x) = 1$, se $0 \leq w(x) \leq \frac{1}{3}\sigma(|x|)$ è $\omega(x) = 0$.

Supponiamo ora che sussistano tutte le ipotesi del teorema (3.4).

Sempre nel caso in cui 0 sia punto di accumulazione dell'insieme U^0, con i simboli del lemma precedente, costruiamo il seguente operatore $C: U - \{0\} \rightarrow H$

$$C(x) = \begin{cases} \omega(x)\,|x|\,\dfrac{(B(x)\,|\,x)\,A(x) - (B(x)\,|\,A(x))\,x}{|A(x)|^2\,|x|^2 - (A(x)\,|\,x)^2} + (1 - \omega(x))\dfrac{x}{|x|} & \text{per} \quad \omega(x) \neq 0 \\ \dfrac{x}{|x|} & \text{per} \quad \omega(x) = 0 \end{cases}$$

(ricordiamo che abbiamo posto $B = \operatorname{grad} b = I - A$).

Per il lemma precedente l'operatore C è di classe $\mathcal{C}^1$.

Nel caso che 0 sia un punto isolato per U_0, converremo di prendere $\delta > 0$ tale che $U_\delta - \{0\}$ non contenga punti di U^0 e porremo $C(x) = \dfrac{x}{|x|}$ [4]).

Lemma (3.15). *Nelle ipotesi del teorema* (3.4), *e con le notazioni sopra introdotte, si consideri in* $U - \{0\}$ *l'equazione differenziale*:

$$\frac{dx}{dt} = C(x).$$

Per ogni x_0, *con* $0 < |x_0| \leq \delta$ *essa ammette una ed una sola soluzione* $x(t)$ *soddisfacente alla condizione iniziale* $x(0) = x_0$ *e defi-*

---

[4]) Ma si può anche osservare che, in questo caso, la verifica della tesi del teorema (3.4) si presenta banale, dal momento che b conserva lo stesso segno in tutto in intorno del punto 0 (Almeno se la dimensione di H supera 1 !).

nita nell'intervallo $]-|x_0|, \delta-|x_0|]$; *tale soluzione ha le seguenti proprietà :*

β_1) $|x(t)| = |x_0| + t$

β_2) *se per un certo* $\bar{t} \in]-|x_0|, \delta-|x_0|]$ è $b(x(\bar{t})) = 0$, *allora* è $b(x(t)) = 0$ *in tutto l'intervallo.*

DIM. L'esistenza e l'unicità della soluzione in piccolo risultano dal fatto che C è di classe $\mathcal{C}^1$. Dall'espressione di C risulta anche, con semplici calcoli :

$$\frac{d}{dt}|x(t)| = \frac{1}{2}\frac{1}{|x(t)|}\frac{d}{dt}|x(t)|^2 = \frac{1}{|x(t)|}\left(x(t)\,\middle|\,\frac{dx}{dt}\right) =$$

$$\frac{1}{|x(t)|}(x(t)\,|\,C(x(t))) = 1.$$

Dunque, ogni soluzione soddisfa alla relazione β_1). D'altra parte, per ogni soluzione $x(t)$ definita in un intervallo $]\tau_1, \tau_2[$, con $-|x_0| < \tau_1 \leq 0 \leq \tau_2 \leq \delta - |x_0|$, in virtù della β_1), la chiusura dell'insieme $\{x(t)\}$ è contenuta in $U - \{0\}$, e, come si riconosce dalla definizione di C, l'insieme $\{C(x(t))\}$ si mantiene limitato. Applicando il lemma (1.1), possiamo affermare l'esistenza di un'unica soluzione definita in tutto l'intervallo $]-|x_0|, \delta-|x_0|]$.

Dimostriamo la β_2). Si ha, per ogni soluzione $x(t)$,

$$\frac{d}{dt}b(x(t) = \left(B(x(t))\,\middle|\,\frac{dx}{dt}\right) = (B(x(t))\,|\,C(x(t))).$$

Ora, se è $b(x(\bar{t})) = 0$, cioè se $x(\bar{t}) \in U^0$ in tutto un intorno di $x(\bar{t})$ è $\omega(x) = 1$ per il lemma (3.13). Dunque in tutto un intorno di $\bar{t}$ è $\omega(x(t)) = 1$, e pertanto :

$$(B(x(t))\,|\,C(x(t))) =$$

$$= |x|\frac{(B(x)\,|\,x)(A(x)\,|\,B(x)) - (B(x)\,|\,A(x))(x\,|\,B(x))}{|A(x)|^2\,|x|^2 - (A(x)\,|\,x)^2} = 0.$$

Dunque in un intorno di $\bar{t}$, si ha $b(x(t)) = 0$. L'insieme $\{t : b(x(t)) = 0\}$, essendo simultaneamente chiuso e aperto nell'intervallo di definizione, coincide con esso, e ne segue la β_2).

Indichiamo con ψ l'applicazione che fornisce la soluzione del nostro problema: $\psi(x_0, t) = x(t)$ (con $x(0) = x_0$); la ψ è definita nell'insieme $\{(x_0, t) : 0 < |x_0| \leq \delta, -|x_0| < t \leq \delta - |x_0|\}$. In virtù del corollario del lemma (1.3) essa risulta continua.

La dimostrazione del lemma (3.5) segue ora facimente. Dimostriamo la α_1).

Consideriamo, a tale scopo, l'applicazione $\varphi : (V_\delta - \{0\}) \times \times [0, 1] \to (V_\delta - \{0\})$ così definita

$$\varphi(x_0, t) = \psi(x_0, t(\delta - |x_0|)).$$

Evidentemente, essa è continua; inoltre si ha:

$$\varphi(x_0, 0) = x_0, \ \varphi(x_0, 1) = \psi(x_0, \delta - |x_0|) \in S_\delta$$

per la proprietà β_1) dell'enunciato (3.15).

Se poi è $|x_0| = \delta$, φ è costante rispetto a t.

Dalla β_2) si deduce che $b(\varphi(x_0, t))$ o si annulla per ogni t dello intervallo $[0, 1]$, oppure conserva sempre il medesimo segno.

Si conclude che φ subordina una retrazione (in senso forte) di $(V_\delta - \{0\}) \cap U^-$ su $S_\delta \cap U^-$.

Dimostriamo la α_2). Consideriamo l'applicazione $\chi : V_\delta \times [0, 1] \to \to V_\delta$ così definita

$$\chi(x_0, t) = \begin{cases} \psi(x_0, -t|x_0|) & \text{per } |x_0| > 0, \ t < 1 \\ 0 & \text{se è } |x_0| = 0, \text{ oppure } t = 1. \end{cases}$$

La continuità di χ nell'insieme $\{(x_0, t) : |x_0| > 0, \ t < 1\}$ è una conseguenza della continuità della ψ. La continuità sull'insieme rimanente si deduce dalla seguente relazione, che discende dalla proprietà β_1):

$$|\chi(x_0, t)| = |x_0| - t|x_0| = (1 - t)|x_0| \ (|x_0| > 0, \ t < 1)$$

Si ha $\chi(x_0, 0) = x_0$, $\chi(0, t) = 0$ per ogni $t \in [0, 1]$; inoltre si vede, alla maniera di prima, che $b(\chi(x_0, t))$ o si annulla per ogni t dell'intervallo $[0, 1]$ o conserva sempre il medesimo segno. Pertanto χ subordina una contrazione dell'insieme $V_\delta \cap U^-$ nel punto 0.

Così la dimostrazione del lemma (3.5) è completa.

4. Punti di diramazione per operatori-gradiente.

Sia A un operatore definito in un aperto U di uno spazio di Hilbert (o, più in generale, di Banach) reale H, contenente l'origine; sia poi $A(0) = 0$; pertanto, per ogni numero reale λ l'equazione:

$$\lambda x - A(x) = 0 \tag{4.1}$$

possiede la soluzione nulla. Richiamiamo la seguente ben nota definizione:

DEF. (4.2). Si dice che il numero reale λ_0 è *punto di diramazione* (o di *biforcazione*) per l'operatore A se in ogni intorno di $(\lambda_0, 0)$ in $\mathbb{R} \times H$ esistono soluzioni (λ, x) della (4.1), con $x \neq 0$.

Si dimostra facilmente la seguente proposizione (Vd. [7]).

TEOREMA (4.3). *Se A è dotato di differenziale di Fréchet nel punto 0, $A'(0)$, l'insieme dei punti di diramazione di A è contenuto nello spettro di $A'(0)$. In particolare, se A è compatto, risultando compatto anche $A'(0)$, ogni punto di diramazione λ_0 non nullo è autovalore per $A'(0)$.*

Si può mostrare con semplici esempi (cfr. [4], oppure [7]) che gli autovalori di $A'(0)$ non sono necessariamente punti di diramazione per A. Una condizione sufficiente perchè questo accada è che l'operatore A sia gradiente di un funzionale: questo è il contenuto di un importante teorema di Krasnosel'skii [3] [4]. In questo paragrafo noi riotterremo il teorema di Krasnosel'skii con un metodo basato sulla teoria di Morse; precisamente, proveremo il seguente

TEOREMA (4.4). *Sia a una funzione reale di classe C^2 definita in un aperto U di uno spazio di Hilbert reale H, tale che $0 \in U$ e che $a(0) = 0$. Posto $A = \operatorname{grad} a$, A sia compatto e sia $A(0) = 0$.*

Allora ogni autovalore non uullo di $A'(0)$ è punto di diramazione per A [5]).

Poniamo:

$$b_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} | x |^2 - a(x).$$

Allora si ha

$$\operatorname{grad} b_\lambda = \lambda I - A$$

pertanto, le soluziani della (4.1) non sono altro che i punti critici di b_λ. Sia dunque λ_0 un autovalore non nullo di $A'(0)$; potremo supporre, senza restrizione di generalità, che sia $\lambda_0 > 0$.

La dimostrazione del teorema (4.4) segue dal lemma che ora esponiamo:

LEMMA (4.5). *Siano soddisfatte tutte le ipotesi del teorema* (4.4). *Il numero $\lambda_0 > 0$ non sia punto di diramazione per l'operatore A. Allora, posto:*

$$U_\lambda^- = \{x : x \in U, \ b_\lambda(x) \leq 0\}, \qquad V_\delta = \{| x | \leq \delta\}$$

per ε e δ positivi abbastanza piccoli, gli spazi $U_{\lambda_0-\varepsilon}^- \cap V_\delta$ e $U_{\lambda_0+\varepsilon}^- \cap V_\delta$ risultano omeomorfi, con un omeomorfismo che porta l'origine nella origine.

Prima di passare alla dimostrazione del lemma, vediamo come da esso si possa ottenere il teorema (4.4). Sia dunque $\lambda_0 > 0$ un autovalore di $A'(0)$, e supponiamo per assurdo che λ_0 non sia punto di diramazione; allora se ε e δ sono presi abbastanza piccoli, in virtù del lemma, devono valere gli isomorfismi:

$$H_n(U_{\lambda_0-\varepsilon}^- \cap V_\delta, U_{\lambda_0-\varepsilon}^- \cap V_\delta - \{0\}) \approx H_n(U_{\lambda_0+\varepsilon}^- \cap V_\delta, U_{\lambda_0+\varepsilon}^- \cap V_\delta - \{0\}).$$

Ma questo non può essere perchè, se ε è abbastanza piccolo, il punto 0 è punto critico non degenere per $b_{\lambda_0-\varepsilon}$ e $b_{\lambda_0+\varepsilon}$ e il calcolo

---

[5]) Le ipotesi di Krasnosel'skii sono più generali delle nostre quanto alla regolarità di a: egli suppone che in U a sia uniformemente differenziabile e che $A = \operatorname{grad} a$ sia differenziabile nel punto 0.

svolto nel § 2 (teorema (2.4)) ci dice che i gruppi di Morse non sono isomorfi.

Per dimostrare il lemma (4.5) dovremo premettere la dimostrazione di altri lemmi. Cominciamo con l'introdurre alcuni simboli. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times U$:

$$\Omega = \{(\lambda, x) : \lambda \in \mathbb{R}, x \in U - \{0\}, b_\lambda(x) = 0\}$$

$$\Omega_\gamma = \{(\lambda, x) : \lambda_0 - \gamma \leq \lambda \leq \lambda_0 + \gamma, x \in U - \{0\}, b_\lambda(x) = 0\}.$$

Introduciamo la proiezione P di $\mathbb{R} \times H$ su H e poniamo:

$$P(\Omega_\gamma) = M_\gamma$$

Si verifica immediatamente che M_γ è chiuso nella topologia di $U - \{0\}$.

Il seguente lemma è un'estensione del lemma (3.7).

LEMMA (4.6). *Sia a una funzione reale differenziabile definita nell'aperto U dello spazio di Hilbert H, sia $0 \in U$, $a(0) = 0$. L'operatore $A = \operatorname{grad} a$ abbia differenziale primo nell'origine $A'(0)$; inoltre sia $A(0) = 0$ e il punto $(\lambda_0, 0)$ sia punto di accumulazione per Ω in $\mathbb{R} \times U$. Si ponga sempre $\varrho(x) = \dfrac{(A(x) \mid x)}{|x|^2}$; allora è*

$$\lim_{\substack{(\lambda, x) \to (\lambda_0, 0) \\ (\lambda, x) \in \Omega}} \varrho(x) = \lambda_0$$

DIM. La dimostrazione è del tutto analoga a quella del lemma (3.7). Partendo dalla relazione:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a(x) - \frac{1}{2}(A(x) \mid x)}{|x|^2} = 0$$

e tenendo presente che, per $(\lambda, x) \in \Omega$ si ha $a(x) = \dfrac{\lambda}{2} |x|^2$, si ottiene la relazione

$$\lim_{\substack{(\lambda, x) \to (\lambda_0, 0) \\ (\lambda, x) \in \Omega}} (\lambda - \varrho(x)) = 0$$

che fornisce subito la tesi.

LEMMA (4.7). *Assumiamo le stesse ipotesi del lemma precedente; in più, supponiamo che λ_0 non sia punto di diramazione per $A =$ grad a. Allora esistono due numeri positivi γ, δ, tali che A soddisfi alla condizione* (NR) (*Vd. def.* (3.2)) *in $M_\gamma \cap V_\delta$. (In altre parole: non esiste alcun $x \in V_\delta - \{0\}$, tale che per esso sia $b_\lambda(x) = 0$ con $|\lambda - \lambda_0| \leq \gamma$ e che $A(x)$ sia parallelo ad x)*

DIM. Per assurdo. Se la tesi non sussiste, esistono tre successioni: $x_n \in U - \{0\}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\mu_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mu_n x_n - A(x_n) = 0$$

$$\frac{\lambda_n}{2} |x_n|^2 - a(x_n) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda_0$$

Moltiplicando scalarmente la prima relazione per x_n si ottiene $\varrho(x_n) = \mu_n$; poichè $(\lambda_n, x_n) \in \Omega$ e poichè $\lim_{n \to \infty} (\lambda_n, x_n) = (\lambda_0, 0)$, si può applicare il lemma precedente, che ci dà:

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n = \lambda_0 .$$

Ma questa relazione ci dice che λ_0 è punto di diramazione, contro l'ipotesi.

Il seguente lemma, analogo al (3.8), stabilisce un carattere di uniformità per la condizione (NR).

LEMMA (4.8). *Alle ipotesi del lemma precedente si aggiunga l'ipotesi* (K) *e l'ipotesi: $\lambda_0 > 0$. Allora esistono due numeri positivi γ, δ (con $V_\delta \subset U$) ed una funzione reale σ definita in $]0, \delta]$, positiva, continua monotona, infinitesima al tendere a zero dell'argomento, tale che si abbia, per $x \in M_\gamma \cap V_\delta$:*

$$|A(x)|^2 |x|^2 - (A(x) | x)^2 \geq \sigma(|x|). \tag{4.9}$$

DIM. Prendiamo due numeri γ, δ positivi tali che in $M_\gamma \cap V_\delta$ valga l'ipotesi (NR) (cfr. lemma (4.7)) e, nello stesso tempo, sia $\varrho(x) \geq \frac{\lambda_0}{2}$ (ciò che è possibile in virtù del lemma (4.6)).

La dimostrazione si completa con lo stesso ragionamento fatto per il lemma (3.8), cioè facendo vedere che l'operatore $x \longrightarrow A(x) - \varrho(x) x$ porta i sottoinsiemi chiusi di H contenuti in $M_\gamma \cap V_\delta$ in sottoinsiemi chiusi di H.

Assumiamo dunque i numeri γ e δ come dall'enunciato del lemma (4.8). Sia ε un numero positivo e minore di $\frac{\gamma}{2}$. Sia θ una funzione reale, di variabile reale, di classe $\mathcal{C}^\infty$, che assuma valore $+1$ nell'intervallo $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ e che abbia il supporto contenuto nell'intervallo $\left]-\frac{\gamma}{2}, +\frac{\gamma}{2}\right[$. Poniamo, in $U - \{0\}$:

$$\omega(x) = \theta\left(\frac{\lambda_0}{2} - \frac{a(x)}{|x|^2}\right). \tag{4.10}$$

Osserviamo che, se $0 < |x| \leq \delta$, $\omega(x) \neq 0$, allora è $-\frac{\gamma}{2} < \frac{\lambda_0}{2} - \frac{a(x)}{|x|^2} < \frac{\gamma}{2}$, perciò esiste $\lambda \in]\lambda_0 - \gamma, \lambda_0 + \gamma[$ tale che $\frac{\lambda}{2} - \frac{a(x)}{|x|^2} = 0$, cioè $x \in M_\gamma \cap V_\delta$ [6])

Consideriamo ora l'operatore $D: U \longrightarrow H$ così definito:

$$D(x) = \begin{cases} \omega(x) \dfrac{|x|^2 A(x) - (A(x) \mid x)x}{|x|^2 \, |A(x)|^2 - (A(x)|x)^2} \dfrac{|x|^2}{2} & \text{dove il denominatore è} > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si verifica facilmente che D è di classe $\mathcal{C}^1$ in un aperto $\widetilde{U}$ contenente l'insieme $V_\delta - \{0\}$.

---

[6]) Naturalmente per costruire la funzione ω si può anche procedere come nel lemma (3.13).

LEMMA (4-11). *Con i simboli introdotti sopra, si consideri nell'aperto $\tilde{U}$ l'equazione differenziale*

$$\frac{dx}{d\lambda} = D(x). \tag{4.12}$$

Allora, comunque si prenda il numero $\bar{\lambda}$ e il punto $\bar{x} \in V_\delta - \{0\}$, la (4.12) ha un'unica soluzione soddisfacente dalla condizione iniziale $x(\bar{\lambda}) = \bar{x}$. Tale soluzione esiste in tutta la retta $\mathbb{R}$ e verifica la relazione

$$|x(\lambda)| = |\bar{x}| \text{ qualunque sia } \lambda.$$

Se poi si ha $b_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$ per un $\bar{\lambda} \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$, si ha anche

$$b_\lambda(x(\lambda)) = 0 \text{ in tutto l'intervallo } [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon].$$

DIM. Poichè nell'aperto $\tilde{U}$ contenente $\bar{x}$ l'operatore D è di classe $\mathcal{C}^1$, vale il teorema di esistenza e unicità locale. D'altra parte, per ogni soluzione $x(\lambda)$ si ha:

$$\frac{d}{d\lambda}|x|^2 = 2\left(x \,\middle|\, \frac{dx}{d\lambda}\right) = 2(x \mid D(x)) = 0.$$

Dunque, ogni soluzione ha norma costante, perciò l'insieme $\{x(\lambda)\}$, al variare di λ nell'intervallo di definizione, ha chiusura contenuta in $\tilde{U}$; inoltre, essendo $\omega(x(\lambda)) \neq 0$ solo quando è $x(\lambda) \in M_\gamma \cap V_\delta$, si deduce dalla (4.9) e dall'espressione di D che $D(x(\lambda))$ si mantiene limitato. In virtù del lemma (1.1) si può dunque affermare l'esistenza della soluzione su tutta la retta $\mathbb{R}$.

Passiamo ora alla seconda parte della tesi. Sia $b_{\bar{\lambda}}(\bar{x}) = 0$, cioè $\frac{\bar{\lambda}^\bullet}{2} - \frac{a(\bar{x})}{|\bar{x}|^2} = 0$; dalla (4.10) si ha $\omega(\bar{x}) = \theta\left(\frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}}{2}\right) = 1$ dal momento che si è supposto $|\lambda_0 - \bar{\lambda}| \leq \varepsilon$; inoltre, poichè l'argomento di θ non supera in valore assoluto $\frac{\varepsilon}{2}$, esiste un intorno di $\bar{x}$ in cui si ha $\omega(x) = 1$. Pertanto, in un intorno di $\bar{\lambda}$, vale per $D(x(\lambda))$ la prima delle due rappresentazioni, con $\omega(x) = 1$. Si ha allora :

$$\frac{d}{d\lambda} b_\lambda(x(\lambda)) = \frac{1}{2} | x |^2 + \left(\lambda x - A(x) \middle| \frac{| x |^2 A(x) - (A(x) \mid x) x}{| x |^2 | A(x) |^2 - (A(x) | x)^2}\right) \frac{|x|^2}{2} = 0.$$

Essendo pertanto l'insieme $\{\lambda : \ b_\lambda(x(\lambda)) = 0\}$ aperto e chiuso nell'intervallo $[\lambda_0 - \varepsilon, \ \lambda_0 + \varepsilon]$, possiamo concludere che esso coincide con tutto l'intervallo.

La dimostrazione del lemma (4.5) può essere ora facilmente ottenuta.

Indichiamo con ψ l'applicazione $\mathbb{R}^2 \times V_\delta \to V_\delta$ tale che, se è è $|\bar{x}| > 0$, è $\psi(\bar{\lambda}, \lambda, \bar{x}) = x(\lambda)$, soluzione della (4.12) soddisfacente alla condizione iniziale $x(\bar{\lambda}) = \bar{x}$, se è $\bar{x} = 0$, è $\psi(\bar{\lambda}, \lambda, \bar{x}) = 0$. Per il corollario del lemma (1.3) fissati $\bar{\lambda}$ e λ, ψ è continua rispetto ad $\bar{x}$ nei punti $\bar{x} \neq 0$; d'altra parte, essendo $| \psi(\bar{\lambda}, \lambda, \bar{x}) | = | \bar{x} |$, essa è continua anche per $\bar{x} = 0$.

Per il lemma (4.11), quando sia $\bar{\lambda} \in [\lambda_0 - \varepsilon, \ \lambda_0 + \varepsilon]$, ψ conserva il segno di b_λ in tutto l'intervallo $[\lambda_0 - \varepsilon, \ \lambda_0 + \varepsilon]$; allora l'applicazione

$$\bar{x} \to \psi(\lambda_0 - \varepsilon, \ \lambda_0 + \varepsilon, \ \bar{x})$$

che ha come inversa l'applicazione

$$\bar{x} \to \psi(\lambda_0 + \varepsilon, \ \lambda_0 - \varepsilon, \ \bar{x})$$

fornisce l'omomorfismo cercato di $U^-_{\lambda_0 - \varepsilon} \cap V_\delta$ su $U^-_{\lambda_0 + \varepsilon} \cap V_\delta$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. B. BROWN - *Relation between the critical points of a real analytic function of n indipendent variables.* Amer. J. of Math. **52**, 251-270 (1930).

[2] S. EILENBERG - N. STEENROD - *Foundations of algebraic topology.* Princeton (1952).

[3] M. A. KRASNOSEL'SKII - *Applicazione dei metodi variazionali al problema dei punti di biforcazione (in russo).* Mat. Sbornik, **33** (1953).

[4] M. A. KRASNOSEL'SKII - *Metodi topologici nella teoria delle equazioni integrali non lineari* (in russo) (Gostekhteoretizdat, Mosca 1956). Traduzione inglese della Pergamon Press, 1964.

[5] J. MILNOR - *Morse theory.* Ann. Math. Studies No. 51 (1963).

[6] R. S. PALAIS - *Morse theory on Hilbert manifolds.* Topology **2**, 299-340 (1963).

[7] G. PRODI - *Problemi di diramazione per equazioni funzionali.* (Atti dell'ottavo Congresso dell'U. M. I., Trieste (1967)).

[8] F. RIESZ et B. NAGY - *Leçons d'analyse fonctionnnelle.* Budapest, 1952.

[9] E. H. ROTHE - *Critical points and gradient fields of scalars in Hilbert space.* Acta Math. **85**, 73-98 (1951).

[10] E. H. ROTHE - *Leray-Schauder index and Morse type numbers in Hilbert space.* Annals of Math. **55**, 433-467 (1951).

[11] E. H. ROTHE - *A remark on isolated critical points.* Amer. J. of Math. **74**, 253-263 (1952).

[12] E. H. ROTHE - *Some remarks on critical point theory in Hilbert space.*

[13] S. SMALE - *Morse theory and a non-linear generalisation of the Dirichlet problem.* Columbia University.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30 marzo 1968.