RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

P. BOERO

Metodi omologici elementari nella teoria dei sistemi di equazioni, II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 349-361

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__349_0>

METODI OMOLOGICI ELEMENTARI NELLA TEORIA DEI SISTEMI DI EQUAZIONI, II

P. BOERO *)

SUMMARY. Let p be a non negative integer, or $+\infty$; A an integral algebra over $\mathbb{C}$. In this work, we define functors ${}_A E_p$ from the category of A-modules to the same category. If A is a suitable $\mathbb{C}$-algebra of « operators » on $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (for instance, the algebra of all the operators of partial derivation in n variables), ${}_A E_p(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n))$ contains all the polynonial-exponentials of polynomial « degree » $q < p+1$, and only them.

We consider many properties of these functors ${}_A E_p$ and of their first derivatives; finally, we give an application of the functor E_∞ to prove that the polynonial-exponential solutions are dense in the space of the solutions of some systems of convolution equations.

Introduzione.

In questo lavoro, data una algebra A commutativa ed integra su $\mathbb{C}$, con identità moltiplicativa, si introducono i funtori ${}_A E_m$ $(0 \leq m \leq +\infty)$ definiti nella categoria dei A-moduli ed a valori in essa.

Si prova che, se A è una opportuna algebra (*E-algebra*) di endomorfismi di $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, ${}_A E_m(\mathcal{E})$ coincide con il A-modulo delle funzioni che sono combinazioni lineari finite di prodotti di polinomi di « gra-

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Via L. B. Alberti, Genova.

do » (in un senso adeguatamente precisato) minore di $m+1$, per esponenziali.

Questo lavoro continua con vari esempi di *E-algebre*; in particolare, si considerano *E-algebre* di operatori su $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ che commutano con le traslazioni; se T è un tale operatore, si studiano poi le relazioni tra $E_\infty(Ker\ T)$ ed $E'_p(Ker\ T)$; si prova che, se T è continuo e di « grado » finito, p_0, per $p > p_0$ il valore su $Ker\ T$ del funtore derivato E'_p dipende solo da $E'_{p_0}(Ker\ T)$ se $n=1$.

Infine, si applica il funtore E_∞ allo studio delle soluzioni di classe C^∞ di un sistema omogeneo di convoluzione, provando che, se i coefficienti del sistema appartengono ad un'algebra bezontiana di operatori, le soluzioni polinomi-esponenziali sono dense nello spazio delle soluzioni del sistema (secondo l'ordinaria topologia di $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, o secondo topologie meno fini che però conservino certe sue proprietà).

Per quanto i risultati valgano quasi tutti in ipotesi algebriche più generali, conveniamo che tutti gli anelli che consideriamo siano commutativi, integri e con identità che si conserva passando ad eventuali sottoanelli.

Parte I - I Funtori ${}_AE_p$

1. Sia A una $\mathbb{C}$-algebra integra con identità moltiplicativa; sia X un A-modulo; indichiamo con ${}_AS_p(X)$ l'insieme: $\{x \in X,\ dim_{\mathbb{C}}\ Ax \leq \leq p+1\}$, ove Ax è il sotto-A-modulo di X generato da x; indichiamo con ${}_AE_p(X)$ il sotto-A-modulo di X generato da ${}_AS_p(X)$. In particolare, ${}_AE_0(X)$ è il A-modulo costituito dalle combinazioni lineari finite a coefficienti complessi del tipo:

$$\sum_1^k {}_i c_i x_i, \text{ ove } x_i \in X, \text{ e } dim_{\mathbb{C}}\ Ax_i = 1.$$

Poniamo ${}_AE_\infty(X) = \bigcup_{p \geq 0} {}_AE_p(X)$; si ha subito:

$${}_AE_\infty(X) = \{x \in X,\ dim_{\mathbb{C}}\ Ax < +\infty\}.$$

Osserviamo che, se $m < n$, ${}_AE_m(X) \subset {}_AE_n(X)$.

Se $\varphi : X \longrightarrow Y$ è un Λ-omomorfismo, indichiamo con ${}_{\Lambda}E_p(\varphi)$ la sua restrizione a ${}_{\Lambda}E_p(X)$.

Ove non sorgano ambiguità, ometteremo, nello scrivere ${}_{\Lambda}E_p(X)$ ed ${}_{\Lambda}E_p(\varphi)$, l'indicazione dell'anello Λ, scrivendo semplicemente: $E_p(X)$, $E_p(\varphi)$.

TEOREMA 1: *per ogni* p, $0 \leq p \leq +\infty$, E_p *è un funtore covariante additivo, esatto a sinistra, della categoria dei* Λ*-moduli in sè.*

Per come è definito, E_p muta Λ-moduli in Λ-moduli; inoltre, data una mappa $\varphi : X \longrightarrow Y$ tra Λ-moduli, $E_p(\varphi)$ è una mappa definita in $E_p(X)$ ed a valori in $E_p(Y)$: infatti, se $dim_{\mathfrak{C}}\, \Lambda x = p + 1$, $dim_{\mathfrak{C}}\, \Lambda\varphi(x) \leq p + 1$ poichè φ è un Λ-omomorfismo.

Resta da provare l'esattezza a sinistra di E_p; data la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow 0$$

di Λ-moduli, dobbiamo provare che è esatta la sequenza:

$$0 \longrightarrow E_p(X) \longrightarrow E_p(Y) \longrightarrow E_p(Z).$$

Anzitutto, osserviamo che $E_p(i)$ è monomorfismo (in quanto restrizione di un monomorfismo).

Supponiamo che $E_p(\pi)(y) = 0$; vogliamo provare che $y = E_p(i)(x)$, ove $x \in E_p(X)$. Dato che $y \in E_p(Y)$, $dim_{\mathfrak{C}}\, \Lambda y < +\infty$; $\pi(\Lambda y) = 0$, onde possiamo fissare, in Λy, una base costituita di elementi della forma $\lambda_k z_k$, ove $dim_{\mathfrak{C}}\, \Lambda(\lambda_k z_k) \leq dim_{\mathfrak{C}}\, \Lambda z_k \leq p + 1$, tali che $\pi(\lambda_k z_k) = 0$. Ne viene, per ogni indice k, $\lambda_k z_k = i(x_k)$ ove $dim_{\mathfrak{C}}\, \Lambda x_k = dim_{\mathfrak{C}}\, \Lambda(\lambda_k z_k) \leq p + 1$; quindi $x_k \in E_p(X)$; y proviene allora da una combinazione, a coefficienti complessi, degli elementi x_k.

Indichiamo con ${}_{\Lambda}t(X)$ il Λ-modulo: $\{x \in X, \exists\, \lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0, t.\, c.\, \lambda x = 0\}$.

TEOREMA 2: *se* $dim_{\mathfrak{C}}\, \Lambda = +\infty$, *allora* ${}_{\Lambda}E_{\infty}(X) \subset {}_{\Lambda}t(X)$ *per ogni* Λ*-modulo* X.

infatti, se $x \in E_\infty(X)$, $dim_{\mathbb{C}}\, \Lambda x < +\infty$; sia $\{\lambda_1 x, \dots, \lambda_n x\}$ una base dello spazio vettoriale complesso Λx; sia λ un elemento di Λ non appartenente allo spazio vettoriale complesso generato da $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; si ha: $\lambda x = \sum_{1}^{n}{}_i\, c_i \lambda_i x$ da cui: $\left(\lambda - \sum_{1}^{n}{}_i\, c_i \lambda_i\right) x = 0$ ma $\lambda \neq \sum_{1}^{n} c_i \lambda_i$, onde $x \in t(X)$.

Osservazioni: notiamo anzitutto che l'ipotesi: $dim_{\mathbb{C}}\, \Lambda = +\infty$ è essenziale per la validità del Teorema 2.; infatti, se $dim_{\mathbb{C}}\, \Lambda < +\infty$ si ha che $dim_{\mathbb{C}}\, \Lambda x < +\infty$ per ogni $x \in X$, onde $E_\infty(X) = X$, mentre, in genere, $t(X) \neq X$.

Inoltre, osserviamo che, per qualche $\mathbb{C}$-algebra Λ di dimensione infinita su $\mathbb{C}$ e per qualche Λ-modulo X, $E_\infty(X) \neq t(X)$: ad esempio, se X è lo spazio delle funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}$, e Λ è l'algebra complessa degli operatori misti di derivazione e traslazione in una variabile, si ha che ogni funzione periodica e di classe C^∞ sta in $t(X)$, mentre, in base ai risultati che vedremo in seguito, $E_\infty(X)$ coincide con lo spazio delle combinazioni lineari finite di prodotti di polinomi per esponenziali.

Infine, si noti che, se $\Lambda' \supset \Lambda$ è un'algebra integra su $\mathbb{C}$, ${}_\Lambda E_\infty(\Lambda') = \{o\}$, se $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda = +\infty$.

2. Se Λ è l'anello degli operatori differenziali lineari a coefficienti costanti in una variabile, ed $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}$, è immediato verificare che ${}_\Lambda E_\infty(\mathcal{E})$ coincide con l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite a coefficienti complessi di prodotti di polinomi per esponenziali. Ci si può chiedere per quali $\mathbb{C}$ algebre Λ di operatori lineari sullo spazio vettoriale delle funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}^n$ continua a valere l'analogo risultato (in n variabili).

Diamo la seguente

Definizione: *sia Λ una $\mathbb{C}$-algebra, integra e con identità, di operatori lineari su $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Λ si dice una E-algebra (relativamente ad $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$) se, per ogni p, $0 \leq p \leq +\infty$, ${}_\Lambda E_p(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n))$ è costituito dalla totalità delle combinazioni lineari finite di prodotti del tipo:*

$$x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\, e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}, \quad ove\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$$

e

$$\overset{n}{\underset{1}{\Pi_k}} (i_k + 1) < p + 2.$$

Segue immediatamente dalla definizione che se Λ è una E-algebra, se $\lambda \in \Lambda$, e se $x \in E_p(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n))$, allora $\lambda x \in E_p(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n))$.

Enunciamo (la dimostrazione non presenta difficoltà) il seguente

TEOREMA 3: *sia Λ una E-algebra, ed X un sotto-Λ-modulo di $\mathcal{E}_m(\mathbb{R}^n)$. Allora, ${}_\Lambda E_p(X)$ è costituito dai vettori di $X \subset \mathcal{E}^m(\mathbb{R}^n)$ le cui componenti s-sesime sono combinazioni lineari finite a coefficienti complessi di prodotti del tipo*:

$$x_1^{i_{s1}} \dots x_n^{i_{sn}} e^{\alpha_{s1} x_1 + \dots + \alpha_{sn} x_n}, \quad ove \ \alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn} \in \mathbb{C}$$

e

$$\overset{m}{\underset{1}{\Sigma_s}} \left(\overset{n}{\underset{1}{\Pi_k}} (i_{sk} + 1) \right) < p + 2.$$

Ovviamente, nell'enunciato deve intendersi che, se $\lambda \in \Lambda$, e $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{E}^m$, allora $\lambda v = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_m)$.

Il teorema seguente assicura che esistono effettivamente delle *E-algebre* (relativamente ad $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$):

TEOREMA 4: *sono E-algebre*:
l'algebra $\mathcal{D}$ degli operatori di derivazione parziale in n variabili, a coefficienti costanti.
l'algebra $\mathcal{T}$ degli operatori di traslazione in n variabili.

Proviamo il risultato per $\mathcal{D}$; le difficoltà della dimostrazione, per $\mathcal{T}$, sono le stesse.

Se $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}$, è ovvio che $dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}\varphi = \overset{n}{\underset{1}{\Pi_k}} (i_k + 1)$; infatti, i prodotti $x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} e^{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}$ (ove $0 \leq j_k \leq i_k$ per $k = 1, 2, \dots, n$) costituiscono una base dello spazio vettoriale complesso $\mathcal{D}\varphi$.

Viceversa, data $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ tale che $dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}\varphi \leq p + 1$, tenendo fisse le $n - 1$ variabili $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ si prova che, rispetto alla variabile x_j, φ si esprime come combinazione lineare — a coefficienti di classe C^∞ dipendenti dalle altre $n-1$ variabili — di prodotti di polinomi per esponenziali. Ciò è vero per ogni $j, 1 \leq j \leq n$, onde φ è combinazione lineare di prodotti di polinomi per esponenziali (in n variabili). In sostanza, ci si riconduce ad un « principio di identità » per i polinomi-esponenziali.

Ove non sorgono ambiguità, con il simbolo $E_p(\mathcal{E})$ indicheremo il Λ-modulo ${}_\Lambda E_p(\mathcal{E})$, ove Λ è una qualunque E-algebra.

Si noti che può accadere che, per qualche algebra Λ di operatori su $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, ${}_\Lambda E_\infty(\mathcal{E}) = E_\infty(\mathcal{E})$, mentre, per qualche $p < +\infty$, ${}_\Lambda E_p(\mathcal{E}) \neq E_p(\mathcal{E})$ (gli esempi sono di facile realizzazione).

Per le applicazioni all'analisi, interessano le E-algebre di operatori su $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ che commutano con le traslazioni. Per esse, vale il seguente:

TEOREMA 5: *siano Λ, Λ' due algebre (integre) di operatori su $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ che commutano con le traslazioni, $\Lambda' \supset \Lambda$.*

Se Λ è una E-algebra, anche Λ' è una E-algebra.

Per ogni $x \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda' x \geq \dim_{\mathbb{C}} \Lambda x$, onde se $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda' x \leq$ $\leq p+1$, anche $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda x \leq p+1$, cioè $x \in E_p(\mathcal{E})$.

Viceversa, se $\varphi \in S_p(\mathcal{E})$ e $\lambda' \in \Lambda'$, osserviamo che per ogni $\lambda \in \Lambda$

$$\lambda(\lambda'\varphi) = (\lambda\lambda')\varphi = (\lambda'\lambda)\varphi = \lambda'(\lambda\varphi) = \lambda'\left(\sum_0^p c_i \lambda_i \varphi\right) = \sum_0^p c_i(\lambda'\lambda)\varphi =$$

$$= \sum_0^p c_i(\lambda_i\lambda')\varphi = \sum_0^p c_i\lambda_i(\lambda'\varphi);$$ quindi, $\lambda'\varphi \in E_p(\mathcal{E})$.

La conclusione $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda'\varphi \leq p+1$ si ottiene subito dal seguente lemma:

LEMMA: *se Λ è un'algebra di operatori su $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ che commutano con le traslazioni, allora se $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} e^{a_1x_1 + \dots + a_nx_n}$ e $\lambda \in \Lambda$ $\lambda\varphi$ è prodotto di un polinomio nelle u variabili $x_1, \dots, x_n$ per $e^{a_1x_1+\dots+a_nx_n}$.*

Tenuto conto del fatto che gli elementi di Λ commutano con le traslazioni, ci si può ridurre al caso di una sola variabile, e quindi procedere per induzione (sul grado polinomiale del monomio φ).

Dal teorema 5 si deduce il seguente corollario:

COROLLARIO: *$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ è una E-algebra.*

Per la validità del teorema 5 è essenziale l'ipotesi che gli elementi di A' commutino con le traslazioni; altrimenti, una sopraalgebra (integra e commutativa) di una *E-algebra* può non essere una *E-algebra*. Ad esempio, se noi consideriamo su $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ gli operatori misti di derivazione, e di contrazione intera della variabile, cioè gli operatori della forma: $\sum_{i,j\,1}^{m} \alpha_{ij} D^i T_j$ ove $D^i T_j(f(x)) = f^{(i)}(jx)$, abbiamo che $dim_{\mathbb{C}} A$ sen $x = +\infty$ (A indica l'algebra degli operatori misti di derivazione e contrazione intera della variabile).

3. Se T è un operatore lineare su $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ che commuta con le traslazioni, interessa studiare le combinazioni lineari di prodotti di polinomi per esponenziali appartenenti al nucleo di T, cioè ${}_{\mathcal{T}}E_{\infty}(Ker\ T)$ che indicheremo, al solito, con $E_{\infty}(Ker\ T)$ solamente (si noti che, se T commuta con le traslazioni, $Ker\ T$ è un $\mathcal{T}$-modulo, onde possiamo applicare il teorema 3).

Consideriamo, su $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, la topologia della convergenza uniforme delle funzioni e di tutte le loro derivate sugli insiemi compatti di $\mathbb{R}^n$.

Sia T un operatore continuo rispetto a tale topologia, che commuta con le traslazioni: allora, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Vale il seguente

LEMMA: *se $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $E_{\infty}(T): E_{\infty}(\mathcal{E}) \longrightarrow E_{\infty}(Im\ T)$ è epimorfismo.*

Sia $T \neq 0$ ed $x^p e^{\alpha x} \in E_{\infty}(Im\ T)$. Proviamo che $x^p e^{\alpha x} = T\varphi$, ove $\varphi \in E_{\infty}(\mathcal{E})$ (la dimostrazione, nel caso di n variabili, $n > 1$, è solo formalmente più complicata).

Per $s \geq p$, consideriamo $T x^s e^{\alpha x} = \sum_{i\,0}^{s} \beta_i x^i e^{\alpha x}$; per qualche $s = \bar{s}$, $\beta_p \neq 0$ (altrimenti, $x^s e^{\alpha x} \in Ker\ T$ per ogni s, assurdo se $T \neq 0$, $T \in \mathcal{E}'$); si può allora costruire una funzione $\varphi(x) = \dfrac{1}{\beta_p} x^{\bar{s}} e^{\alpha x} + \ldots + c_0 e^{\alpha x}$ tale che $T\varphi = x^p e^{\alpha x}$.

Dal lemma segue il teorema:

TEOREMA 6 : *sia* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $T \neq 0$; *se* $E_\infty(Ker\ T) \neq \{o\}$, *allora, per tutti i* p, $0 \leq p < +\infty$, $E'_p(Ker\ T) \neq \{o\}$.

Operando nella categoria degli $\mathcal{E}'$-moduli, dalla sequenza esatta:

$$0 \to Ker\ T \to \mathcal{E} \to Im\ T \to 0$$

si ottiene la sequenza esatta $(0 \leq p < +\infty)$:

$$0 \to E_p(Ker\ T) \to E_p(\mathcal{E}) \xrightarrow{E_p(T)} E_p(Im\ T) \to E'_p(Ker\ T) \to \dots$$

Se $E_p(T)$ non è epimorfismo, si deduce subito che non può essere $E'_p(Ker\ T) = 0$.

Proviamo che se $E_\infty(Ker\ T) \neq 0$, allora $E_p(T)$ non può essere epimorfismo; proviamolo nel caso $n = 1$; per $n > 1$, le maggiori difficoltà sono solo formali.

Supponiamo che $x^p e^{ax} \in E_\infty(Ker\ T)$; allora, $x^p e^{ax} \in E_p(Im\ T)$ mentre $x^p e^{ax} \notin T(E_p(\mathcal{E}))$.

Se $x^p e^{ax} \in Ker\ T$, si può poi verificare che, per ogni $0 \leq s \leq p$, $x^s e^{ax} \in Ker\ T$; infatti, indicata con T_h la traslazione di ampiezza h,

$$T_h(Tx^p e^{ax}) = o = T(T_h x^p e^{ax}) = T(x+h)^p e^{a(x+h)} =$$

$$= Tx^p e^{a(x+h)} + Tp\, x^{p-1} h e^{a(x+h)} + \dots + Th^p e^{ax} e^{ah} =$$

$$= o + e^{ah}(hTx^{p-1} e^{ax} + \dots + h^p Te^{ax}) = 0$$

onde, per l'arbitrarietà di h, $Tx^{p-1} e^{ax} = \dots = Te^{ax} = 0$.

Questo ci dice che, per ogni $k \leq p$, $E'_k(Ker\ T) \neq \{o\}$.

Proviamo ora che, se $k > p$, $k < +\infty$, allora $E'_k(Ker\ T) \neq \{o\}$. Basta provare che, se $Tx^p e^{ax} = 0$, e

$$k > p,\ Tx^k e^{ax} = \beta_{k-p} x^{k-p} + \dots + \beta_0 e^{ax};$$

ma ciò segue subito osservando che deve ancora essere

$$T(x+h)^k e^{a(x+h)} = T_h(Tx^k e^{ax})$$

e ricordando che, per tutti gli indici $i \leq p$, $Tx^i e^{ax} = 0$.

Le condizioni per la validità del teorema 6 non possono essere attenuate, in modo essenziale; in particolare, non può essere eliminata l'ipotesi di continuità di T. Consideriamo infatti il sottospazio Y di $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ costituito dalle funzioni $P(x)\,e^{x}$, ove $P(x)$ è un polinomio nella variabile x; e consideriamo l'operatore T che opera come identità su $\mathcal{E}(\mathbb{R}) - Y$ ed annulla gli elementi di Y. T commuta con le traslazioni; $E_\infty(Ker\ T) = Ker\ T$, mentre, per ogni

$$p < +\infty,\ E'_p\,(Ker\ T) = \{o\}.$$

Il teorema 6, noti i risultati di Malgrange [3] ed Ehrenpreis [2] sulla densità, nello spazio delle soluzioni di un'equazione di convoluzione, delle soluzioni combinazioni lineari finite di prodotti di polinomi per esponenziali, consente di dedurre immediatamente che, se $Ker\ T \neq \{o\}$, allora $E'_p\,(Ker\ T) \neq \{o\}$ per tutti i $p < +\infty$.

Viceversa, il teorema 6, unito al teorema che segue, può essere utilizzato per dimostrare che dato un operatore $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, se $Ker\ T \neq \{o\}$ allora $E_\infty(Ker\ T) \neq 0$; ciò può presentare un certo interesse in quanto le dimostrazioni del teorema 6 e del successivo teorema 7 richiedono soltanto che $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ sia uno spazio vettoriale topologico di funzioni, sulle quali operano le traslazioni, e nel quale è una parte densa la totalità delle funzioni prodotto di polinomi per una funzione esponenziale fissata (non nulla).

TEOREMA 7: *sia A una E-algebra di operatori che commutano con le traslazioni, tale che ${}_AE'_p\,(\mathcal{E}) = \{o\}$ per ogni $0 \leq p \leq +\infty$; sia T un operatore su $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ che commuta con le traslazioni e con gli elementi di A. Se per qualche $0 \leq p < +\infty$ ${}_AE'_p\,(Ker\ T) \neq \{o\}$ allora $E_\infty(Ker\ T) \neq \{o\}$,*

dalla sequenza esatta di A-moduli,

$$0 \longrightarrow Ker\ T \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow T(\mathcal{E}) \longrightarrow 0$$

si ottiene la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow E_p\,(Ker\ T) \longrightarrow E_p\,(\mathcal{E}) \longrightarrow E_p\,(Im\ T) \longrightarrow E'_p\,(Ker\ T) \longrightarrow 0$$

supponiamo che, per un certo p, $E'_p(Ker\ T) \neq \{o\}$; allora esiste

$$\varphi(x_1, \dots, x_n = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} e^{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n} \in E_p(T(\mathcal{E}))$$

tale che $\prod_1^n {}_k (i_k + 1) = p + 1$, e $\varphi \notin T(E_p(\mathcal{E}))$.

Consideriamo $T\varphi = \sum_s^p \beta_s x_1^{i_{1s}} \dots x_n^{i_{ns}} e^{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}$ (ove i_{ks} è una successione decrescente di indici, con $0 \leq i_{ks} \leq i_k$); se $i_{k0} = i_k$ per tutti gli indici $k = 1, 2, 3, \dots, n$, deve essere $\beta_0 = 0$, altrimenti, operando su φ con T e con opportuni elementi di A, potrei ottenere $\varphi \in T(E_p(\mathcal{E}))$.

Se $\beta_0 = 0$, si deduce immediatamente che, per qualche $\psi \in E_p(\mathcal{E})$, $T\psi = 0$: infatti, $\dim_{\mathbb{C}} T(A\varphi) < \dim_{\mathbb{C}} A\varphi$.

Osservazione: se $n = 1$, ogni *E-algebra* principale (o di Bezout) A soddisfa alla condizione del teorema 7, in quanto ${}_A E'_p(\mathcal{E}) = \{o\}$ per ogni p.

4. Nel caso di una variabile $E_p(Ker\ T) = E_\infty(Ker\ T)$ se $T \in \mathcal{D}$ e $p + 1$ è uguale al grado (polinomiale) di T.

Ciò giustifica la seguente

Definizione: *sia T un endomorfismo di $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ che commuta con le traslazioni Diremo grado di T, e lo indicheremo con $\omega(T)$, il minimo intero positivo p tale che $E_{p-1}(Ker\ T) = E_p(Ker\ T) \neq \{o\}$; se $E_\infty(Ker\ T) = \{o\}$ porremo $\omega(T) = -\infty$; se $E_{p-1}(Ker\ T) \neq E_p(Ker\ T)$ per tutti i $p > 0$, porremo $\omega(T) = +\infty$.*

Esistono delle distribuzioni a supporto compatto che operano su $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ come operatori di grado finito, e che non sono operatori di derivazione: in particolare, la funzione caratteristica dell'intervallo aperto di estremi -1 ed 1 è una distribuzione di grado 1.

Sia A una *E-algebra* tale che ${}_A E'_p(\mathcal{E}) = \{o\}$ per ogni p; sia $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\omega(T) < +\infty$ e $p \geq \omega(T) - 1$.

Consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_p\,(Ker\ T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & E_p\,(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & T\,(E_p\,(\mathcal{E})) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_\infty(Ker\ T) \arrow[r] & E_\infty(\mathcal{E}) \arrow[r] & T\,(E_\infty(\mathcal{E})) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

applicando il « lemma dei 5 », si deduce subito che α è monomorfismo. Formiamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & E'_p\,(Ker\ T) \arrow[d, "\wr"] & \\
0 \arrow[r] & T\,(E_p\,(\mathcal{E})) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & E_p\,(T\,(\mathcal{E})) \arrow[r] \arrow[d] & E'_p\,(Ker\ T) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T\,(E_\infty(\mathcal{E})) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & E_\infty(T\,(\mathcal{E})) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & T(E_\infty(\mathcal{E}))/T(E_p(\mathcal{E})) \arrow[r] & (E_\infty(T\,(\mathcal{E}))/E_p\,(T\,(\mathcal{E})) \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

in esso, α è monomorfismo (in base all'osservazione precedente) e β è isomorfismo (come segue dal lemma al teorema 6).

Si ottiene quindi la sequenza esatta:

$$\text{(I)} \quad 0 \to E'_p(Ker\ T) \to T\,(E_\infty(\mathcal{E}))/T\,(E_p\,(\mathcal{E})) \to E_\infty(T\,(\mathcal{E}))/E_p\,(T\,(\mathcal{E})) \to 0$$

che porge $E'_p\,(Ker\ T)$ come nucleo di un epimorfismo, indotto da inclusioni, tra Λ-moduli che restano determinati una volta noto $E_{\omega(T)-1}\,(Ker\ T)$.

In conclusione, potremo dire che, se $p > \omega\,(T) - 1$, $E'_p\,(Ker\ T)$ è individuato da $E'_{\omega(T)-1}\,(Ker\ T)$ mediante la sequenza (I).

Parte II - Applicazione: un teorema di sintesi spettrale. Estensioni.

5. Consideriamo, in $\mathcal{E}\,(\mathbb{R}^n)$, la topologia usuale (convergenza uniforme delle funzioni e delle loro derivate sugli insiemi compatti di $\mathbb{R}^n$).

Malgrange ed Ehrenpreis hanno provato che, se $T \in \mathcal{E}'\,(\mathbb{R}^n)$, le soluzioni combinazioni lineari finite di prodotti di polinomi per esponenziali sono dense in *Ker* T; analogo risultato è stato provato da Malgrange [3] per certi sistemi di equazioni di convoluzione (con condizioni sulla matrice dei coefficienti), e da Malgrange [4] e Palamodov [5] per i sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali ed a coefficienti costanti.

Assumiamo, in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, una topologia di spazio vettoriale topologico tale che $\overline{E_\infty(Ker\ T)} = Ker\ T$ per ogni operatore T appartenente ad una algebra bezoutiana Λ di operatori che commutano con le traslazioni. Vale il seguente

TEOREMA 8: *se* $\Phi : \mathcal{E}^p \longrightarrow \mathcal{E}^q$ *è un sistema a coefficienti in* Λ,

$$\overline{E_\infty(Ker\ \Phi)} = Ker\ \Phi.$$

Sia $L = (\lambda_{ij})$ la matrice dei coefficienti; la sequenza:

$$0 \longrightarrow Ker\ L \longrightarrow \Lambda^p \xrightarrow{L} \Lambda^q \longrightarrow coker\ L \longrightarrow 0$$

è una risoluzione libera di *coker* L; tensorializzando con i Λ-moduli $\mathcal{E}$ ed $E_\infty(\mathcal{E})$, si ottengono (come in [1]) le due sequenze esatte:

$$\text{(II)} \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{E}^k \longrightarrow Ker\ \Phi \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} Ker\ \Phi_i \longrightarrow 0$$

$$\text{ove} \quad \Phi_i \in \Lambda, \quad \Phi_i : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

e:

$$\text{(III)} \qquad 0 \longrightarrow (E_\infty(\mathcal{E}))^k \longrightarrow Ker\ E_\infty(\Phi) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} Ker\ E_\infty(\Phi_i) \longrightarrow 0$$

ove $E_\infty(\Phi_i)$, $E_\infty(\Phi)$ indicano le restrizioni ad $E_\infty(\mathcal{E})$, $(E_\infty(\mathcal{E}))^p$, rispettivamente della mappa Φ_i e della matrice L.

Si verifica facilmente che $Ker\ E_\infty(\Phi_i) = E_\infty(Ker\ \Phi_i)$, e che $Ker\ E_\infty(\Phi) = E_\infty(Ker\ \Phi)$; inoltre, possiamo pensare le sequenze (II) e (III) realizzate come sequenze di sottospazi vettoriali di $\mathcal{E}^p$; ne viene che — come spazi vettoriali —

$$Ker\ \Phi = \mathcal{E}^k \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} Ker\ \Phi_i\right)$$

e :

$$E_\infty(Ker\ \Phi) = (E_\infty(\mathcal{E}))^k \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} E_\infty(Ker\ \Phi_i)\right).$$

Dalla densità di $(E_\infty(\mathcal{E}))^k$ in $\mathcal{E}^k$ e di $E_\infty(Ker\ \Phi_i)$ in $Ker\ \Phi_i$ per ogni i, si deduce che $E_\infty(Ker\ \Phi)$ è denso in $Ker\ \Phi$.

6. I funtori ${}_AE_p$ sono stati studiati, nei paragrafi precedenti, come operanti su sotto-A-moduli dello spazio delle funzioni di classe C^∞ su $\mathbb{R}^n$. Anche la definizione di *E-algebra* è stata data relativamente allo spazio $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Appare però evidente che quasi tutte le considerazioni fatte possono essere estese ad altri spazi di funzioni, in particolare lo spazio $C^0(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}^n$, o lo spazio $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ delle funzioni analitiche sullo spazio complesso n-dimensionale $\mathbb{C}^n$; come pure a spazi di distribuzioni su $\mathbb{R}^n$ contenenti $C^0(\mathbb{R}^n)$. Si può provare che l'algebra $\mathcal{T}$ delle traslazioni reali è una E-algebra relativamente a ciascuno degli spazi indicati, e si possono estendere senza difficoltà i teoremi 3, 5, 6, 7, 8.

BIBLIOGRAFIA

[1] Boero P.: *Metodi analogici elementari...* Rend. Sem. Padova, 1967, 37.

[2] Ehrenpreis, L.: *Mean Periodic Functions, I.* Am. J. of Math., 1955, 77.

[3] Malgrange, B.: *Existence et Approximation des Solutions, ...* Am. Inst. Fourier, 1955-56, VI.

[4] Malgrange, B.: Colloque sur les eq. aux der. part., CNRS, Paris 1962.

[5] Palamodov, V. P., Doklady Ak. Nauk. SSSR, 1963, 148 (3).

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 luglio 1968.