Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

P. Boero

Su certi anelli di funzioni intere di tipo esponenziale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 345-348

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__345_0>

SU CERTI ANELLI DI FUNZIONI INTERE DI TIPO ESPONENZIALE

P. Boero *)

Nello studio della densità delle funzioni polinomi-esponenziali nei sottospazi chiusi ed invarianti di traslazione (varietà) dello spazio $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ delle funzioni analitiche su $\mathbb{C}^n$, si considera — nello spazio H' trasformato di Fourier di $\mathcal{H}'(\mathbb{C}^n)$ — la seguente proprietà: ogni ideale principale è chiuso ([2]). Scopo del presente lavoro è di dare condizioni equivalenti perchè in certi anelli di funzioni analitiche su $\mathbb{C}^n$ ogni ideale principale sia chiuso. Si estendono poi i risultati trovati al caso delle funzioni analitiche su un dominio di Runge.

I risultati trovati migliorano quelli pubblicati (per il caso di una variabile) in [1].

1. Sia $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ lo spazio delle funzioni analitiche sullo spazio complesso n-dimensionale, dotato della topologia della convergenza uniforme sui compatti; con H' indichiamo lo spazio delle funzioni analitiche di tipo esponenziale. H' è lo spazio trasformato di Fourier dello spazio H' dei funzionali lineari e continui su $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$. Dotiamo H' della topologia della convergenza uniforme sugli insiemi limitati di $\mathbb{C}^n$; la topologia su H' che rende la trasformata di Fou-

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato per le Scienze Matematiche del CNR.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Uuniversità, Via L. B. Alberti, Genova.

rier un isomorfismo topologico tra H' ed $\mathcal{H}'$ si ottiene considerando la seguente nozione di convergenza: ([2]):

$$f_n \longrightarrow 0 \text{ se esiste } a > 0 \text{ tale che } \sup_{x \in \mathbb{C}^n} \{e^{-a\|x\|} |f_n(x)|\} \longrightarrow 0.$$

Tale topologia «naturale» di H' è strettamente più forte della topologia indotta da $\mathcal{H}$ su H'. Notiamo che i polinomi in n variabili complesse sono densi in H' sia con la topologia indotta da $\mathcal{H}'$, sia con la topologia indotta come sottospazio di $\mathcal{H}$.

H' contiene — tra l'altro — lo spazio E' trasformato di Fourier dello spazio $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ delle distribuzioni a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$; infatti, per il teorema di Paley-Wiener-Schwartz, E' è costruito dalle funzioni intere di tipo esponenziale a crescita limitata polinomialmente sugli assi reali.

Sussiste il seguente

TEOREMA 1: *Sia D un sottoanello di H', $D \supset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Sono equivalenti le seguenti condizioni:*

a) *per ogni coppia di funzioni $f \in D$, $g \in \mathcal{H}$, se accade che $fg \neq 0$ ed $fg \in D$, allora $g \in D$*

b) *in D, gli ideali principali sono chiusi nella topologia di H' (indotta da quella di $\mathcal{H}'$ mediante la trasformata di Fourier)*

c) *in D, gli ideali principali sono chiusi nella topologia indotta da H sul sottospazio $\mathcal{H}'$.*

È ovvio che c) implica b); la verifica che a) implica c) si conduce come nel caso di una variabile: sia $\{yx_n\}$ una successione di elementi di yD convergente uniformemente sui compatti ad un elemento $z \in D$, $z \neq 0$; allora $\{x_n\}$ converge ad un $x \in \mathcal{H}$, ed $yx = z$, onde $x \in D$.

Resta da verificare che b) implica a): per questo, supponiamo che fg sia una funzione non nulla di D, $f \in D$, $g \in \mathcal{H}$.

Ovviamente, deve essere $g \in H'$ (il prodotto di una funzione non di tipo esponenziale per una di tipo esponenziale non nulla non può essere di tipo esponenziale: v. [3]). Sappiamo che i polinomi sono densi in H', quindi possiamo approssimare g uniformemente sui compatti con una successione $\{g_n\}$ di polinomi. Essendo la moltiplicazione per funzioni di H' continua nella topologia di H', si ha subito che $\{fg_n\}$ è una successione di elementi di fD convergente ad $fg \in D$; ne viene che $fg \in fD$, e quindi che $g \in D$.

Dalla dimostrazione seguono subito i seguenti corollari:

COROLLARIO 1: *Le condizioni* a), c) *del teorema precedente sono equivalenti in ogni anello* $D \subset \mathcal{H}$, $D \supset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$.

COROLLARIO 2: *Le condizioni* a), b), c) *del teorema precedente sono equivalenti in ogni sottoanello di* H' *con identità contenente una parte densa di* H'.

Esempi di anelli per i quali valgono le condizioni a), c) del teorema 1 sono: ogni anello di funzioni analitiche di ordine e tipo equilimitati superiormente; e l'anello delle funzioni analitiche su $\mathbb{C}$, reali sull'asse reale. Un sottoanello di H' per il quale valgono le condizioni equivalenti a), b), c) è l'anello delle combinazioni lineari finite di prodotti di polinomi per esponenziali.

2. Sia D un anello di funzioni analitiche sullo spazio complesso; diremo che gli ideali principali di D sono individuati dai loro ideali locali se per ogni coppia x, y di elementi di D per la quale $xD \neq yD$ esiste almeno un punto $p \in \mathbb{C}^n$ tale che $xA_p \neq yA_p$ (A_p indica l'anello delle funzioni analitiche in qualche intorno di p). Sussiste il seguente

TEOREMA 2: *Sia* D *un sottoanello con identità di* $\mathcal{H}$, *per il quale vale la condizione* a) *del teorema* 1; *in* D, *gli ideali principali sono individuati dai loro ideali locali.*

Supponiamo che x, y siano funzioni non nulle di D, e che per ogni $p \in \mathbb{C}^n$ sia $xA_p = yA_p$. Si vede facilmente che x ed y differiscono per una funzione analitica invertibile: $xu = y$; ma D soddisfa alla condizione a) del teorema 1, onde $u \in D$, come pure $u^{-1} \in D$. Ne viene che $xD = yD$.

La condizione a) del teorema 1 è, in genere, più forte della condizione che gli ideali di un anello di funzioni analitiche siano individuati dai loro ideali locali. Ad esempio nell'anello D dei polinomi complessi in una variabile z aventi nullo il coefficiente di z

non vale la condizione a) (in quanto $z^2 z \in D$, $z^2 \in D$ mentre $z \notin D$); dati due elementi $x, y \in D$ tali che $xA_p = yA_p$ per ogni $p \in \mathbb{C}^n$, $xD = yD$ in quanto x ed y differiscono per una costante moltiplicativa.

3. Consideriamo ora un dominio di Runge Ω (dominio di olomorfia tale che i polinomi sono densi in $\mathcal{H}(\Omega)$).

Dalle dimostrazioni dei teoremi precedenti segue subito il seguente corollario;

COROLLARIO 3: *Se D è un anello di funzioni analitiche su Ω, con identità, e soddisfacente alla condizione* a) *del teorema* 1, *gli ideali principali di D sono individuati dai loro ideali locali; di più, se $D \supset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ sono equivalenti le condizioni* a), c) *del teorema* 1.

Questo enunciato può essere esteso considerando anelli di funzioni analitiche con topologia più forte di quella indotta da $\mathcal{H}(\Omega)$, purchè tale topologia conservi la densità dei polinomi.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOERO P.: *Metodi omologici elementari....* Rend. Sem. Padova, 1967, 37.

[2] EHRENPREIS, L.: *Mean Periodic Functions, I.* Am. J. of Math., 1955, 77.

[3] LEVIN B.: *Distributions of Zeros of Entire Functions.* Transl. Math. Mon., Vol. V, 1964.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 luglio 1968.