RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI-GHEZZO

Proprietà di fasci algebrici coerenti e lisci su varietà algebriche affini normali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 31-42

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__31_0>

PROPRIETÀ DI FASCI ALGEBRICI COERENTI E LISCI SU VARIETÀ ALGEBRICHE AFFINI NORMALI

SANTUZZA BALDASSARRI-GHEZZO *)

In una precedente nota ho dimostrato, ([4], n⁰ 12, teor. 3), che se k è un corpo commutativo algebricamente chiuso, ed S^n lo spazio affine n-dimensionale su k dotato della topologia di Zariski, *ogni fascio algebrico* $\mathcal{M}^{(r)}$ *coerente e liscio di rango* $r > 1$, *su di una varietà algebrica affine* $V = (V, \mathcal{A}_V)$ *di dimensione maggiore di* 1 *ad algebra fattoriale, può esser identificato con un sottofascio di* $\mathcal{A}_V^r$ *avente qualche sezione globale con chiuso di cdm. minima maggiore di* 1 *in* V; e che ([4] nⁱ 15-17, teoremi 4, 5, 6) *per ogni fascio algebrico coerente e liscio* $\mathcal{M}^{(r)}$ *di rango* $r > 1$ *su di una varietà algebrica affine* $(V, \mathcal{A}_V)$ *di dimensione maggiore di* 1, *ad algebra fattoriale, esistono* $r - 1$ *sequenze esatte del tipo*

$$0 \to \mathcal{A}_V^h \to \mathcal{M}^{(r)} \to \mathcal{M}^{(r-h)} \to 0 \qquad 1 \leq h \leq r - 1,$$

di fasci lisci tali che il chiuso di $\mathcal{M}^{(r)}$ *sia contenuto nel chiuso di* $\mathcal{M}^{(r-h)}$.

In questa nota dimostro che i *medesimi risultati sussistono anche per i fasci algebrici coerenti e lisci sulle varietà algebriche affini normali.*

In [4], per arrivare alla dimostrazione del teorema 3, ho fatto vedere che se i chiusi di tutte le sezioni globali di $\mathcal{M}^{(r)}$ ammettono

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito della attività del gruppo di ricerca matematica n. 33 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

divisori di V, questi coincidono tutti con un unico divisore Δ di V. Ebbene le considerazioni qui svolte ai n[i] 3 e 4, mostrano che la stessa conclusione vale anche se V è una qualunque varietà algebrica affine normale dello S^n; inoltre in tal caso il suo luogo singolare H ha notoriamente cdm. > 1 in V, e si possono determinare, (n[0] 5), dei divisori dello spazio che contengano H e non contengano un fissato divisore Δ di V. Di qui segue che sulla varietà algebrica affine normale V esistono degli aperti affini (che intersecano Δ ma) che non intersecano H, e che perciò, dotati della struttura indotta, sono (isomorfi a) varietà algebriche affini ad algebra localmente fattoriale, sulle quali il teor. 3 della nota [4] è valido (per il suo carattere locale).

Mediante il teorema d'incollamento di fasci, e la costruzione d'un opportuno prefascio su V, si riesce allora a provare (n[0] 6) l'esistenza di un sottofascio di $\mathcal{A}_V^r$ isomorfo ad $\mathcal{M}^{(r)}$ che ammette sezioni globali con il chiuso di cdm. minima maggiore di 1 in V, definendolo dapprima su $V - H$ e prolungandolo poi a tutta V, indichiamolo ancora con $\mathcal{M}^{(r)}$. Resta così affermata la validità del teorema 3 della nota [4] anche per i fasci algebrici coerenti e lisci sopra varietà algebriche affini normali.

L'effettiva costruzione di una sezione globale di $\mathcal{M}^{(r)}$ con la proprietà voluta è illustrata con un esempio al n[0] 7. La presenza in $\mathcal{M}^{(r)}$ di una siffatta sezione globale, ed il fatto che ogni varietà algebrica affine normale « appartiene alla proprietà di estensione », permettono di trasportare le dimostrazioni date in [4] per i teoremi 4, 5, 6, in guisa da far vedere che questi teoremi sussistono appunto anche per i fasci algebrici coerenti e lisci su varietà algebriche affini normali, come mi ero proposta.

1. Indicheremo con k un corpo commutativo algebricamente chiuso di caratteristica p, e con S^n lo spazio affine di dimensione $n > 1$ su k, dotato della topologia di Zariski. Se $V = (\mathrm{V}, \mathcal{A}_V)$ è una varietà algebrica affine dello S^n, (cioè V è una porzione chiusa irriducibile dello S^n ed $\mathcal{A}_V$ è il suo associato fascio degli anelli locali), ed $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un suo punto generico, l'anello $A[V] = k[X]/I(V)$, isomorfo all'anello $k[x]$ delle coordinate di V, ed anche all'anello $\Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ delle sezioni globali di $\mathcal{A}_V$, risulta un dominio d'integrità

noetheriano, anzi una k-algebra affine di tipo finito priva di divisori dello zero. Ricordiamo che per « varietà algebrica affine » s'intenderà, pur continuando ad indicarla con lo stesso simbolo, ogni spazio anellato isomorfo a $(V, \mathcal{A}_V)$ ([5], III, (2.5.6)); isomorfismo $\Psi : (V, \mathcal{A}_V) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ di spazi anellati essendo un omeomorfismo $\Psi : V \to Y$ tale che gli omomorfismi $\Psi_x : \mathcal{O}_{Y, \psi(x)} \to \mathcal{A}_{V, x}$, definiti per ogni $(x) \in V$ associando ad ogni germe $f_{\psi(x)} \in \mathcal{O}_{Y, \psi(x)}$, rappresentato in un intorno $\mathcal{U}$ di $\psi(x)$ da un'applicazione $f : \mathcal{U} \to k$, il germe di $\mathcal{A}_{V,x}$ rappresentato dall'applicazione composta $f \circ (\psi/\psi(\mathcal{U}))$, siano degli isomorfismi per ogni $(x) \in V$.

Indichiamo ancora con $\Gamma(\ )$ il funtore covariante esatto sulla categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà algebriche affini $(V, \mathcal{A}_V)$, con valori nella categoria degli $A[V]$-moduli di tipo finito; e con $\mathcal{C}(\ )$ il funtore covariante esatto sulla categoria degli $A[V]$-moduli di tipo finito con valori nella categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà algebriche affini.

2. Sia V una varietà algebrica affine normale di dimensione maggiore di 1, $\mathcal{M}^{(r)}$ un fascio algebrico coerente e liscio di rango $r > 1$ su V, ed $M = \Gamma(V, \mathcal{M}^{(r)})$ l'$A[V]$-modulo delle sezioni globali di $\mathcal{M}^{(r)}$.

Consideriamo un'iniezione

$$0 \to M \to A[V]^r \tag{1}$$

(certo esistente [6] pag. 131) che ci permetta d'identificare M con un sottomodulo di $A[V]^r$, e la sua trasformata funtoriale, (mediante l'operatore $\mathcal{C}(\ )$)

$$0 \to \mathcal{M}^{(r)} \to \mathcal{A}_V^r, \tag{1'}$$

la quale fuori di un chiuso proprio (« *chiuso di* $\mathcal{M}^{(r)}$ ») è anche suriettiva [1]).

Per la (1), ogni elemento s di M può esser identificato con una r-pla

$$s = (\lambda\sigma_1, \lambda\sigma_2, \dots, \lambda\sigma_r)$$

---

[1]) L'apice (r) apposto ad $\mathcal{M}^{(r)}$ ha il solo scopo di mettere in evidenza il rango r del fascio, mentre l'apice r di $\mathcal{A}_V^r$ indica che trattasi di somma diretta di r fasci $\mathcal{A}_V$).

di elementi di $k[x] \simeq A[V]$, dove, se h è il numero dei generatori $s^j = (s_1^j, s_2^j, \ldots, s_r^j)$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ di M, si è posto

$$\lambda\sigma_i = \sum_1^h {}_j \lambda_j s_i^j \tag{2}$$

con $\lambda_j \in k[x]$.

Sia m_i^j il grado di s_i^j $(i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, h)$ in $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Immergendo lo S^n nello spazio proiettivo P^n, si possono considerare (come in [4] n^i 6 e 7) le immagini canoniche s_i^{0j} delle funzioni $s_i^j \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nell'anello $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, delle coordinate omogenee dell'immagine di V in P^n, e considerare gli elementi omogenei di grado $m > m_i^j$ per ogni j

$$\lambda_i^0 \sigma_i^0 = \sum_1^h {}_j \lambda_{i,j}^0 s_i^{0j}$$

con le $\lambda_{i,j}^0$ omogenee di grado $m - m_i^j$ in $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

3. Mediante le forme $\lambda_i^0 \sigma_i^0$ possiamo definire, nel corpo delle funzioni su V, un sottospazio vettoriale $L^{(m)}$ di dimensione finita e quindi ottenere un sistema lineare $\Delta_i^{(m)}$ di divisori di V, ([11] pag. 270).

Per m abbastanza grande, si vede subito, ([4], n^0 12), che vale anche qui il teorema 1 dimostrato al n^0 8 della nota [4], cioè che il divisore generico del sistema lineare $\Delta_i^{(m)}$ non è composto di varietà appartenenti ad un sistema algebrico di dimensione 1 e indice 1; e vale inoltre il 1^0 teorema di Bertini ([4], n^0 9), per cui si può affermare anche che:

Per m abbastanza grande il divisore generico $\Delta_i^{(m)}$ del sistema lineare $\Delta_i^{(m)}$, privato delle componenti fisse, è una varietà.

4. Con procedimento analogo a quello seguito in [4] al n^0 10 possiamo scegliere in M gli elementi

$$s = (\lambda' \sigma_1', \ldots, \lambda' \sigma_r')$$

che hanno le componenti $\lambda' \sigma_i'$ che descrivono r sistemi lineari $\Lambda_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ di divisori di V, tutti di uno stesso grado m.

Indichiamo con $H(s)$ il chiuso in V di un elemento s di M, cioè il chiuso di V definito da

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda' \sigma_1' = 0 \\ \lambda' \sigma_2' = 0 \\ \lambda' \sigma_r' = 0. \end{cases}$$

Se $H(s)$ ha componenti di cdm. I in V per ogni s, il divisore generico $\Delta_i^{(m)}$ di $\Lambda_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, sarà del tipo $\Delta_i^{(m)} = \Delta_{\lambda'} + \Delta_{i, \lambda'}$, ma se $\Delta_{\lambda'}$ non è intersezione completa di V con forme dello spazio ambiente, le (3) non potranno quì scriversi: $\lambda' \sigma_i' \equiv \psi_{\lambda'} \mu_{i\lambda'}$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, come in [4], n^0 11.

In ogni caso però i sistemi lineari $\Lambda_i^{(m)}$, per m abbastanza grande, sono riducibili solo se ammettono componenti fisse (n^0 3) le quali, per un fissato $i (1 \leq i \leq r)$, apparterranno ovviamente anche ai divisori di tutte le funzioni $\lambda \sigma_i$ ((2), n^0 2) indipendentemente da λ, ed anzi ai divisori di tutte le i-esime componenti degli elementi s di M. Ne risulta che nelle nostre ipotesi ci si potrà sempre ridurre a pensare $\Delta_i^{(m)}$ in una delle possibili decomposizioni:

$$\Delta + (\Delta_{i, \lambda'} + \Delta_i) \text{ ovvero } (\Delta + \Delta_{\lambda'}) + \Delta_i$$

dove $\Delta_{i, \lambda'}$ o, rispettivamente $\Delta_{\lambda'}$ sono sottovarietà di V, e Δ e Δ_i sono divisori fissi di $\Lambda_i^{(m)}$, anzi Δ_i appartiene al divisore generico di tutti i sistemi lineari $\Lambda_i^{(m)}$ per ogni possibile m, e Δ appartiene al divisore generico di tutti i sistemi lineari $\Lambda_i^{(m)}$ per ogni i e per ogni possibile m. Quindi ne risulta che il chiuso di ciascun elemento s di M, nel primo caso contiene il divisore Δ oltre a componenti in cdm. > 1 variabili con s ed (eventualmente) anche componenti fisse in cdm. > 1; mentre nel secondo caso esso contiene una componente irriducibile in cdm. 1 variabile con s, oltre alle componenti fisse.

5. Osserviamo che nella situazione descritta al n^0 precedente, solo se tutte le componenti fisse di ciascun sistema lineare $\Lambda_i^{(m)}$

sono intersezioni complete di V con divisori dello spazio, le forme $\lambda' \sigma_i'$, che definiscono i $\Delta_i^{(m)}$ ammettono una decomposizione in fattori del tipo

$$\varphi\, \varphi_i\, f_{i,\lambda'} \text{ oppure del tipo } \varphi\, \varphi_i\, f_{\lambda'}$$

con $\varphi\, \varphi_i \in k[x]$ $(i = 1, 2, \dots, r)$. In tal caso sarà possibile reiniettare M in $k[x]^r$ come in [4] n⁰ 11, con i risultati ivi dedotti, e cioè in modo che se $r > 1$, il chiuso di qualche elemento $s \in M$ sia privo di componenti di cdm. 1.

6. Dimostriamo ora un lemma che ci sarà utile nel seguito.

Lemma 1. *Se V è una sottovarietà chiusa dello spazio affine S^n, esistono divisori dello spazio contenenti un fissato chiuso H di cdm. > 1 in V e non contenenti nessun divisore primo appartenente ad un fissato divisore $\Delta = \sum_{i=1}^{t} n_i W_i$ di V.*

Infatti, siano $I(H)$ e $I(W_i)$ $(i = 1, 2, \dots, t)$ gli ideali dell'anello di polinomi $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ associati ai rispettivi chiusi H e W_i $(i = 1, 2, \dots, t)$ pensati in S^n. Si tratta di trovare un elemento $\Phi(X) \in I(H)$ tale che sia $\Phi(X) \notin I(W_i)$ per ogni i $(1 \leq i \leq t)$, cioè $\Phi(X) \notin \bigcup_{i=1}^{t} I(W_i)$.

Poichè $I(H) \not\subseteq I(W_i)$, per ogni $i\,(1 \leq i \leq t)$, esiste qualche polinomio $F_i(X) \in I(H)$ tale che $F_i(X) \notin I(W_i)\,(i = 1, 2, \dots, t)$; quindi, per ogni i, esiste qualche punto $(x^{(i)}) \in W_i$ tale che $F_i((x^{(i)})) \neq 0$ (ogni punto della porzione localmente chiusa $W_i \cap D(F_i)$ con $D(F_i)$ complementare del chiuso di F_i in S^n). In questa situazione possiamo scegliere $h \leq t$ punti distinti $(x^{(1)}), (x^{(2)}), \dots, (x^{(h)})$ tali che la relazione $(x^{(j)}) \in W_i$ con $1 \leq j \leq h$, e $1 \leq i \leq t$, definisca una applicazione $j = \gamma(i)$ di $(1, 2, \dots, t)$ su $(1, 2, \dots, h)$, e tali che sia $F_i(x^{\gamma(i)}) \neq 0$. Allora scelto per ogni j un $i_j \in \gamma^{-1}(j)$, consideriamo i polinomi $F_{i_1}(X), \dots, F_{i_h}(X)$; (i quali non sono necessariamente distinti), e poichè non è restrittivo supporre che i numeri $1, 2, \dots h$ appartengano rispettivamente a $\gamma^{-1}(1), \gamma^{-1}(2), \dots, \gamma^{-1}(h)$, indichiamoli con $F_1(X), \dots, F_h(X)$. Osserviamo inoltre che essendo gli h punti $(x^{(1)}), \dots$ $\dots, (x^{(h)})$ a due a due distinti, per ogni coppia di interi $i \neq m$, $1 \leq i \leq h$ e $1 \leq m \leq h$, esisterà qualche intero s, $1 \leq s \leq n$, tale che sia $x_s^{(i)} \neq x_s^{(m)}$. Posto perciò

$$\Phi_m(X) = \prod_{i,s} (X_s - x_s^{(i)}) \qquad m = 1, 2, \ldots, h$$

i prodotti essendo estesi a tutte le coppie (i, s) tali che sia :

$$1 \leq i \leq h, \ 1 \leq s \leq n, \ i \neq m, \ \text{ed} \ x_s^{(i)} \neq x_s^{(m)},$$

risulterà

$$\Phi_m(x^{(i)}) = 0 \ \text{per ogni} \ i \neq m \ \text{e} \ \Phi_m(x^{(m)}) \neq 0.$$

Consideriamo allora il polinomio

$$\Phi(X) = \sum_{m=1}^{h} \Phi_m(X_1, X_2, \ldots X_n) F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

esso apppartiene all'ideale $I(H)$, ed è tale che

$$\Phi((x^{(m)})) = \prod_{i,s} (x_s^{(m)} - x_s^{(i)}) F_m((x^{(m)}))$$

e quindi esso non si annulla in nessun punto $((x^{(m)}))$, $1 \leq m \leq h$, perciò, come volevasi, esso non appartiene a nessuno degli ideali $I(W_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$.

7. Supponiamo ora che V sia una varietà algebrica affine normale dello S^n, che $\mathcal{M}^{(r)}$ sia un fascio algebrico di rango $r > 1$ coerente e liscio su V e consideriamo quì, come al n^0 4, i sistemi lineari $\Lambda_i^{(m)}$ di divisori di V. Le componenti fisse $\Delta + \Delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ dei sistemi lineari $\Lambda_i^{(m)}$ siano ora intersezione non completa di V con divisori dello spazio; poichè nelle attuali ipotesi il chiuso singolare H di V è certo di cdm. > 1 in V ([11], pag. 337), è possibile determinare (lemma 1, n^0 6) un divisore dello spazio il quale seghi la varietà, (pensata quì come sottovarietà chiusa dello S^n), secondo un chiuso contenente il luogo singolare H di V e non contenente alcun divisore primo di V appartenente al chiuso $\Delta + \sum_{i=1}^{r} \Delta_i$ (di cdm. 1 in V).

Inoltre l'applicazione $\varphi: V \longrightarrow k$, restrizione a V dell'applicazione $\Phi: k^n \longrightarrow k$, rappresentata dal polinomio $\Phi(X)$ costruito come al lemma del n^0 precedente, è dovunque regolare (su V), e quindi l'aperto V_φ di V, dove $\Phi((x)) \neq 0$, è un aperto affine di V([5], III, (3, 2. 5)), cioè, dotato della struttura indotta, esso dà una varietà algebrica affine (v. n^0 1).

Ora essendo, nelle nostre ipotesi, la varietà V affine normale e V_φ disgiunto dal luogo singolare H di V, in ogni punto (x) di V appartenente a V_φ l'anello locale è regolare e quindi a fattorizzazione unica. Ne segue che l'aperto affine V_φ è quì (isomorfo ad) una varietà algebrica affine $W = (W, \mathcal{A}_W)$ ad algebra localmente fattoriale, per cui sugli aperti di siffatta varietà vale il teorema 3 ([4], n^0 12) ricordato in prefazione; e questo teorema, per il carattere locale della proprietà in esso affermata, risulta di conseguenza, valido su W.

Si può perciò intanto affermare che $\mathcal{M}^{(r)}/V_\varphi$ è isomorfo ad un sottofascio di $(\mathcal{A}_V/V_\varphi)^r$ che posssiede sezioni (su V_φ) con chiuso di cdm. > 1 in V.

Ma gli aperti affini di V formano una base $\mathcal{B}$ d'aperti per la topologia di V, perciò, usando il teorema d'incollamento di fasci ([5], II, (I. 4. 7) e (2. 5. 2)), si deduce intanto subito l'esistenza di un sottofascio, indichiamolo con $\overline{\mathcal{M}}$, di $\mathcal{A}_V^r/(V - H)$ isomorfo ad $\mathcal{M}^{(r)}/(V - H)$, che possiede qualche sezione (su $V - H$) con chiuso di cdm. > 1 in V.

Costruiamo ora un prefascio su $\mathcal{B}$ nel seguente modo:

Indichiamo con $\{U_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ gli aperti affini di V che intersecano il chiuso H, associamo a ciascun $U_i (i \in \mathcal{J})$ il modulo $\Gamma(U_i, \mathcal{M}^{(r)})$ delle sezioni di $\mathcal{M}^{(r)}$ su U_i, e per ogni coppia $U_i \subseteq U_j\, (i, j \in \mathcal{J})$ indichiamo con

$$\varrho_{U_i}^{U_j}: \Gamma(U_j, \mathcal{M}^{(r)}) \longrightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{M}^{(r)})$$

gli omorfismi ottenuti per restrizione. Indichiamo inoltre con $\{W_i\}_{i \in J}$ gli aperti affini di V che non intersecano H, associamo a ciascun $W_i (i \in J)$ il modulo $\Gamma(W_i, \overline{\mathcal{M}})$ delle sezioni di $\overline{\mathcal{M}}$ su W_i, e per ogni coppia $W_i \subseteq W_j\, (i, j \in J)$ siano

$$\varrho_{W_i}^{W_j}: \Gamma(W_j, \overline{\mathcal{M}}) \longrightarrow \Gamma(W_i, \overline{\mathcal{M}})$$

gli omomorfismi, di restrizione. Infine per ogni coppia $W_j \subseteq U_i (j \in \in J,\ i \in \mathcal{I})$ siano

$$\varrho^{U_i}_{W_j} : \Gamma(U_i, \mathcal{M}^{(r)}) \to \Gamma(W_j, \overline{\mathcal{M}})$$

gli omomorfismi ottenuti come prodotti delle restrizioni a W_j delle sezioni di $\mathcal{M}^{(r)}$ su U_i per gli omorfismi, esistenti per ipotesi,

$$\chi_{W_i} : \Gamma(W_i, \mathcal{M}^{(r)}) \to \Gamma(W_i, \overline{\mathcal{M}}).$$

Osserviamo che gli insiemi $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ e $\{W_i\}_{i \in J}$ formano evidentemente una partizione di $\mathcal{B}$, e inoltre nessun aperto U_i di V è contenuto in qualche W_i. Abbiamo perciò costruito un prefascio sulla base d'aperti di $\mathcal{B}$ di V ([5], II, (1.4.1.)) al quale resta associato un fascio su V che è isomorfo ad $\mathcal{M}^{(r)}$ e che ristretto a $V - H$ è eguale ad $\overline{\mathcal{M}}$; questo fascio possiede dunque qualche sezione globale il cui chiuso è privo di componenti di cdm. 1 in V.

Resta così dimostrato il seguente

Teorema 1. *Ogni fascio algebrico $\mathcal{M}^{(r)}$ coerente e liscio di rango $r > 1$ su di una varietà algebrica affine normale $V = (V, \mathcal{A}_V)$ di dimensione maggiore di 1, è isomorfo ad un sottofascio di $\mathcal{A}^r_V$ che ammette sezioni con chiuso di codimensione minima maggiore di 1 in V.*

8. Illustriamo quanto sopra con un esempio:

Consideriamo la varietà $(V, \mathcal{A}_V)$ con $V = V(x^2 - yz)$ in S^3, ed il sottofascio $\mathcal{M}$ di $\mathcal{A}^2_V$ generato dalle sezioni globali rappresentate in $A^2 = (k[xyz]/(x^2 - yz))^2 \simeq (\Gamma(V, \mathcal{A}_V))^2$ dagli elementi

$$s^1 = (y - x, y - z),\ s^2 = (y - z, x^2 + y^2 - 2z^2),\ s^3 = (x - z, y^2 - x^2).$$

Ogni sezione s di $\mathcal{M}$ su V sarà allora del tipo

$$s = (\lambda_1 (y - x) + \lambda_2 (y - z) + \lambda_3 (x - z),$$
$$\lambda_1 (y - z) + \lambda_2 (x^2 + y^2 - 2z^2) + \lambda_3 (y^2 - x^2))$$

con $\lambda_i \in A$, e quindi avrà nel chiuso $H(s)$ una componente di cdm. 1 in $V : \Delta = (x = y = z)$. Poichè l'applicazione φ rappresentata dal polinomio z è dovunque regolare su V, e non nulla su $\varDelta$, l'aperto $D(z) = V_z$ di V interseca $\varDelta$ ed è isomorfo alla varietà $(W, \mathcal{A}_W)$ con $W = W(X^2 - YZ; ZT - 1)$ in S^4, nell'isomorfismo

$$\psi : X = x, \quad Y = y, \quad Z = z, \quad T = 1/z,$$

e l'immagine di ogni sezione di $\mathcal{M}/V_z$ in $\mathcal{A}_W^2$ si potrà anche scrivere nella forma

$$\psi(s) = (\bar{\lambda}_1 (X^2 - ZX) T + \bar{\lambda}_2 (X^2 - Z^2) T + \bar{\lambda}_3 (X - Z),$$

$$\bar{\lambda}_1 (X^2 - Z^2) T + \bar{\lambda}_2 (X^2 Z^2 + X^4 - 2Z^4) T^2 + \bar{\lambda}_3 (X^4 - X^2 Z^2) T^2) =$$

$$= (X - Z) [\bar{\lambda}_1 XT + \bar{\lambda}_2 (X + Z) T + \bar{\lambda}_3,$$

$$(X + Z)(\bar{\lambda}_1 T + \bar{\lambda}_2 (X^2 + 2Z^2) T^2 + \bar{\lambda}_3 X^2 T^2)]$$

e quindi in $\mathcal{M}/V_z$

$$s = (x - z) [\lambda_1 x/z + \lambda_2 (x + z)/z + \lambda_3 ,$$

$$(x + z)(\lambda_1 1/z + \lambda_2 (x^2 + 2z^2)/z^2 + \lambda_3 x^2/z^2)] = (x - z) \bar{s}.$$

(La fattorizzazione qui è unica su tutto V_z in virtù della scelta dell'aperto $D(z)$, nel quale $\varDelta \cap D(z)$ si presenta come intersezione completa di V_z con $x - z = 0$).

Ne segue che mediante l'isomorfismo

$$\chi : s \longrightarrow \bar{s}$$

si ottiene un $(\mathcal{A}_V/V_z)$-fascio $\mathcal{M}'$ che ammette evidentemente qualche sezione con chiuso di cdm. > 1, per es. la $(1, (x + z) x^2/z^2)$.

In particolare sull'aperto U intersezione di $D(z)$ con il complementare $D(\varDelta)$ di $\varDelta$ in V, è $\mathcal{M}/U \simeq \mathcal{M}'/U$ nell'isomorfismo χ ottenuto mediante divisione per $(x - z)$, considerando quindi su $D(\varDelta)$ lo $(\mathcal{A}_V/D(\varDelta))$-fascio $\mathcal{M}/D(\varDelta)$, è qui applicabile a $V - 0$, con il ricoprimento aperto $\{D(z), D(\varDelta)\}$, il teorema d'incollamento ([5], II, (2.5.2)) che ci permette di definire un fascio $\overline{\mathcal{M}}$ di $\mathcal{A}_V/(V - 0)$-moduli che sarà isomorfo allo $\mathcal{A}_V/(V-0)$-fascio $\mathcal{M}/(V-0)$, e che qui si potrà prolungare in modo naturale ad un fascio algebrico su V, il quale ammetterà qualche sezione con chiuso di cdm. >1, per es. la sezione rappresentata da $(1; (x+z)x^2/z^2)$ su $D(z)$ e da $(x-z, y^2-x^2)$ su $D(\Delta)$ e su 0.

9. Ricordiamo ora che se V è una varietà algebrica affine, si dice « *ammissibile* » (in V) un suo aperto U complementare di un chiuso di cdm. >1 in V, e un fascio $\mathcal{M}$ su V privo di torsione si dice che « *appartiene alla proprietà di estensione* », $\mathcal{M} \in P \cdot E \cdot$, ([3] n^0 4) se è privo di sezioni definite sopra aperti U ammissibili, ma non su tutta V; cioè se l'omomorfismo iniettivo $\Gamma(V, \mathcal{M}) \to \Gamma(U, \mathcal{M})$ ottenuto per restrizione, è anche suriettivo.

Poiché il fascio degli anelli locali di una varietà algebrica affine normale appartiene alla proprietà di estensione ([3] teor. 2), tenuto conto del teor. 1 del n^0 7, risultano dunque valide, anche nel caso di varietà normali, le dimostrazioni dei teoremi 4, 5, e 6 della nota [4].

Possiamo dunque affermare che valgono i seguenti teoremi:

TEOREMA 2. *Per ogni fascio algebrico $\mathcal{M}^{(r)}$ di rango $r>1$, coerente e liscio su di una varietà algebrica affine normale $V=(V, \mathcal{A}_V)$ di dimensione maggiore di 1 esiste una sequenza esatta del tipo*

$$0 \to \mathcal{A}_V \to \mathcal{M}^{(r)} \to \mathcal{M}^{(r-1)} \to 0$$

di fasci lisci.

E anche

TEOREMA 3. *Per ogni fascio algebrico $\mathcal{M}^{(r)}$ di rango $r>1$, coerente e liscio sulla varietà algebrica affine normale $V=(V, \mathcal{A}_V)$ di dimensione maggiore di 1, sussistono $r-1$ sequenze esatte di fasci lisci del tipo*

$$0 \to \mathcal{A}_V^h \to \mathcal{M}^{(r)} \to \mathcal{M}^{(r-h)} \to 0, \qquad 1 \leq h \leq r-1,$$

tali che il chiuso di $\mathcal{M}^{(r)}$ sia contenuto nel chiuso di $\mathcal{M}^{(r-h)}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Y. AKIZUKI, *Theorems of Bertini on linear systems*, J. Math. Soc. Japan, vol. 3 n^0 I, pp. 170-180, (1951).

[2] M. BALDASSARRI, *Algebraic varieties*, Ergeb. der Math., Springer-Verlag, Berlin, (1956).

[3] M. BALDASSARRI, *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*, Atti del Conv. Internaz. di geometria algebrica di Torino del 1961.

[4] S. BALDASSARRI-GHEZZO, *Proprietà di fasci algebrici coerenti e lisci, su varietà algebriche affini ad algebra fattoriale* Sem. Mat. Univ. di Padova in corso di stampa.

[5] S. BALDASSARRI-GHEZZO, C MARGAGLIO ; T. MILLEVOI, *Introduzione ai metodi della geometria algebrica*, Ed. Cremonese, Roma, (1967).

[6] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, (1956).

[7] S. LANG, *Introduction to algebraic geometry*, Tracts in Math. 5, Intersc. Publ. Inc., New York, (1958).

[8] T. MATSUSAKA, *The theorem of Bertini on linear systems in modular fields*, Mem. Coll. of Sci., Univ. Kyoto, Ser. A, XXVI, pp. 51-62, (1950).

[9] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math., vol. 61 n^0 2, pp. 197-278, (1955).

[10] A. WEIL, *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc., Coll. Publ., XXIX, (1962).

[11] O. ZARISKI, *Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini*, Trans. Amer. Math. Soc, vol. 50, pp. 40-70, (1941).

Manoscritto pervenuto in redazione il 29 maggio 1968