RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO CASADEI

Sul teorema di unicità di De La Vallée Poussin per equazioni differenziali del terzo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 300-305

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__300_0>

SUL TEOREMA DI UNICITÀ DI DE LA VALLÉE POUSSIN PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL TERZO ORDINE

GIORGIO CASADEI *)

Sia dato il problema al contorno

$$\left\{\begin{array}{ll} y'''(t) = f(t, y, y', y'') & \\ y(\alpha_i) = A_i & \qquad i = 1, 2, 3 \end{array}\right. \tag{1}$$

essendo $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ed $h = \alpha_3 - \alpha_1$ [1])

De La Vallée Poussin [1] ha dimostrato che, se $f(t, y, y', y'')$ è continua e soddisfa la condizione di Lipschitz

$$|f(t, y_1, y_1', y_1'') - f(t, y_2, y_2', y_2'')| \leq \tag{2}$$

$$L_1 |y_1'' - y_2''| + L_2 |y_1 - y_2'| + L_3 |y_1 - y_2|,$$

il teorema di unicità per il problema (1) è valido nella ipotesi che h sia minore o uguale alla radice positiva h_0 della equazione

$$L_3 \frac{h^3}{6} + L_2 \frac{h^2}{2} + L_1 \frac{h}{1} - 1 = 0. \tag{3}$$

---

*) Indirizzo dell'A.: CNEN - Centro di Calcolo, Via Mazzini 2, 40138 Bologna.
Lavoro svolto nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

1) I casi $\alpha_2 = \alpha_1$ e $\alpha_2 = \alpha_3$ sano considerati più avanti con le condizioni al contorno modificate nel modo usuale.

In questa nota, seguendo un suggerimento di U. Richard, si trova una migliore valutazione della quantità h_0 dimostrando che il problema (1) può ammettere due soluzioni solo se la quantità h verifica la diseguaglianza

$$L_3 \frac{h^3}{24} + L_2 \frac{h^2}{8} + L_1 \frac{h}{2} - 1 > 0. \tag{4}$$

La (4) rappresenta anche un miglioramento della limitazione trovata da Ph. Hartman e A. Wintner [2], essendo una estensione di un risultato ottenuto da U. Richard [3] per le equazioui del secondo ordine.

Nel corso della dimostrazione si farà uso del seguente

LEMMA. Dati tre numeri α, β e γ, con $\alpha < \beta < \gamma$, vale la seguente disugualianza:

$$\int_\alpha^\beta dt \int_t^\beta (\gamma - x)\, dx < \int_\alpha^\beta dt \int_\alpha^t (\gamma - x)\, dx. \tag{5}$$

La (5) può essere provata nel seguente modo. Posto

$$\varphi_1(t) = \int_t^\beta (\gamma - x)\, dx, \qquad \varphi_2(t) = \int_\alpha^t (\gamma - x)\, dx, \tag{6}$$

$$c = \frac{1}{2}[(\gamma - \alpha)^2 - (\gamma - \beta)^2],$$

si ha

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\alpha) = c, \qquad \varphi_1(\beta) = 0, \quad \varphi_1''(t) > 0, \\ &\varphi_2(\alpha) = 0, \qquad \varphi_2(\beta) = c, \quad \varphi_2''(t) < 0, \end{aligned} \tag{7}$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) \leq c\,(\beta - t)/(\beta - \alpha), \\ &\varphi_2(t) \geq c\,(t - \alpha)/(\beta - \alpha), \end{aligned} \tag{8}$$

nelle (8) il segno di uguaglianza valendo solo per $t = \alpha$ e per $t = \beta$. Dalle (8) seguono le seguenti

$$\int_\alpha^\beta \varphi_1(t)\,dt < \frac{c}{2}(\beta - \alpha) \tag{9}$$
$$\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,dt > \frac{c}{2}(\beta - \alpha),$$

combinando le (9) e le (6) si attiene la (5).

Dimostrazione della (4). Si supponga ora che $y_1(t)$ e $y_2(t)$ siano due soluzioni distinte del problema (1). Posto

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t) \tag{10}$$

si ha

$$z(\alpha_i) = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{11}$$

e per il teorema di Rolle

$$z'(\beta_i) = 0 \qquad i = 1, 2 \tag{12}$$

$$z''(\gamma) = 0 \tag{13}$$

essendo

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 \tag{14}$$

e

$$\beta_1 < \gamma < \beta_2 . \tag{15}$$

Posto $\bar{\alpha} = (\alpha_1 + \alpha_3)/2$, si supponga $\gamma \leq \bar{\alpha}$ [2]) e, per $\alpha_1 \leq t \leq \gamma$.

$$\max |z'''(t)| = \max |f(t, y_1, y_1', y_1'') - f(t, y_2, y_2', y_2'')| = \mu. \tag{16}$$

---

[2]) I calcoli che seguono possono ripetersi, sostituendo α_1 con α_3, β_1 con β_2, nell'ipotesi simmetrica che riesca $\gamma \geq \bar{\alpha}$.

L'ipotesi che le due soluzioni siano distinte implica che sia $\mu \neq 0$. Se così non fosse, $z(t)$ sarebbe un polinomio di 2^0 grado non identicamente nullo, ciò che contraddirebbe alle condizioni (11).

Si trovano ora per $z(t)$, $z'(t)$ e $z''(t)$ delle limitazioni valide per $\alpha_1 \leq t \leq \gamma$, limitazioni che permettono di provare la (4).

Dalle (13) e (16) si ottiene infatti

$$|z''(t)| \leq \mu(\gamma - t) \leq \mu(\bar{\alpha} - \alpha_1) = \mu \frac{h}{2}, \tag{17}$$

dalle (12) e (17) si ottiene

$$|z'(t)| \leq \left| \mu \int_{\beta_1}^{t} (\gamma - t_1)\, dt_1 \right| < \mu \int_{\alpha_1}^{\gamma} (\gamma - t_1)\, dt_1 \leq \mu \frac{h^2}{8}, \tag{18}$$

e dalle (11) e (18) si ottiene

$$|z(t)| \leq \mu \int_{\alpha_1}^{t} dt_2 \left| \int_{\beta_1}^{t_2} (\gamma - t_1)\, dt_1 \right| \leq \tag{19}$$

$$\leq \mu \int_{\alpha_1}^{\gamma} dt_2 \left| \int_{\beta_1}^{t_2} (\gamma - t_1)\, dt_1 \right| =$$

$$= \mu \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dt_2 \int_{t_2}^{\beta_1} (\gamma - t_1)\, dt_1 + \mu \int_{\beta_1}^{\gamma} dt_2 \int_{\beta_1}^{t_2} (\gamma - t_1)\, dt_1 .$$

Poichè si ha

$$\int_{\beta_1}^{\gamma} dt_2 \int_{\beta_1}^{t_2} (\gamma - t_1)\, dt_1 < \int_{\beta_1}^{\gamma} dt_2 \int_{\alpha_1}^{t_2} (\gamma - t_1)\, dt_1$$

e, per la (5),

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} dt_2 \int_{t_2}^{\beta_1} (\gamma - t_1)\, dt_1 < \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dt_2 \int_{\alpha_1}^{t_2} (\gamma - t_1)\, dt_1 ,$$

si ottiene

$$(19) \qquad |z(t)| < \mu \int_{\alpha_1}^{\beta_1} dt_2 \int_{\alpha_1}^{t_2} (\gamma - t_1)\, dt_1 + \mu \int_{\beta_1}^{\gamma} dt_2 \int_{\alpha_1}^{t_2} (\gamma - t_1)\, dt_1 =$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\gamma} dt_2 \int_{\alpha_1}^{t_2} (\gamma - t_1)\, dt_1 \leq \mu \frac{h^3}{24}.$$

Si osservi ora che possiamo trascurare il caso $L_2 = L_3 = 0$, caso in cui il teorema di unicità vale senza limitazioni per la grandezza $h = \alpha_3 - \alpha_1$.

Ricordando le (2) e (10), facendo uso delle maggiorazioni (17), (18) e (19), del fatto che le ultime due sono strette e che possiamo escludere $L_2 = L_3 = 0$, otteniamo

$$(20) \qquad |z'''(t)| < \mu \left[L_3 \frac{h_3}{24} + L_2 \frac{h^2}{8} + L_1 \frac{h}{2} \right],$$

per ogni $t \in [\alpha_1, \gamma]$, e quindi anche per il valore di t in cui $|z'''(t)|$ è massimo. Sostituendo quindi $|z'''(t)|$ con μ, la (20) si può scrivere

$$(20_1) \qquad L_3 \frac{h^3}{24} + L_2 \frac{h^2}{8} + L_1 \frac{h}{2} - 1 > 0.$$

Se dunque il problema (1) ammette due soluzioni distinte la quantità $h = \alpha_3 - \alpha_1$ è maggiore della radice positiva della (4); la dimostrazione del caso generale $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ è determinata.

Casi Limite. Sia $\alpha_2 = \alpha_3$ oppure $\alpha_1 = \alpha_2$. Le disuguaglianze (17) (18) (19) restano vere almeno col segno « $\leq$ ».

Poichè i dubbi sulla possibilità di restringersi al segno « $<$ » nella (20) riguardano soltanto il caso $\gamma = \dfrac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}$, possiamo limitare la nostra indagine a questo caso.

Ciò significa che, se $\alpha_2 = \alpha_3$, possiamo prendere in considerazione l'intervallo (α, γ), e, se $\alpha_2 = \alpha_1$, possiamo prendere in considerazione l'intervallo (γ, α_3), e applicare rispettivamente le (17), (18) e (19) o le loro analoghe per l'altro semintervallo.

In ogni eventualità possiamo dunque contare su due disuguaglianze strette, del tipo (18) e (19), e salvare la disuguaglianza stretta nella (20).

In questo modo la dimostrazione della (20_1) è completa.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. De La Vallée Poussin : *Sur l'équation differentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n.* Journ. de Math. pur. et appl. (9), 8 (1929) pp.125-144.

[2] Ph. Hartman, A. Wintner : *On an oscillation criterion of De La Vallée Poussin.* Quart. Applied. Math. (13), 3 (1955), pp. 330-332.

[3] U. Richard : *Sur un théorème d'unicité de M. C. De La Vallée Poussin pour l'équation différentielle du second ordre.* Résumés 6 (Equations différentielles ordinaires) pp. 14-15. Congresso Internazionale dei Matematici — Mosca, 16-26 Agosto 1966.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2-5-68.