RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIONIGI GALLETTO

Sull'energia complementare di deformazione per i materiali iperelastici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 210-221

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__210_0>

SULL'ENERGIA COMPLEMENTARE DI DEFORMAZIONE PER I MATERIALI IPERELASTICI

DIONIGI GALLETTO *)

Con riferimento al caso dei materiali iperelastici esenti da vincoli interni e nella sola ipotesi fisicamente interessante che le relazioni esprimenti il tensore lagrangiano degli sforzi $\widetilde{\mathbf{T}}$ (secondo tensore di Piola-Kirchhoff) in funzione del tensore di Cauchy-Green destro $\mathbf{C}$ siano invertibili, si considera l'energia complementare di deformazione, funzione del suddetto tensore $\widetilde{\mathbf{T}}$. Ciò allo scopo di stabilire innanzitutto delle relazioni, valide sia per materiali isotropi che anisotropi, che legano i coefficienti principali del tensore $\mathbf{C}$ alle componenti di eguale indice del tensore $\widetilde{\mathbf{T}}$ rispetto alla (o a una) terna principale di deformazione, componenti che, nel caso isotropo, si riducono alle componenti principali di $\widetilde{\mathbf{T}}$. Tramite dette relazioni, risultando i coefficienti principali di $\mathbf{C}$ uguali al quadrato dei corrispondenti allungamenti principali aumentati di 1, si vede la possibilità, mediante la misura sperimentale di tali allungamenti, di determinare i valori numerici delle derivate rispetto alle suddette componenti di $\widetilde{\mathbf{T}}$ dell'energia complementare di deformazione.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 7 del Comitato per la Matematica del C. N. R..

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Con particolare riferimento al caso isotropo, tramite le suddette relazioni si deduce che l'ipotesi dell'isotropia del materiale implica che l'energia complementare di deformazione debba essere necessariamente una funzione degli invarianti principali di $\tilde{\mathbf{T}}$, ossia una funzione isotropa di tale tensore. Tale condizione è anche sufficiente, nel senso che il suo verificarsi implica necessariamente che il materiale sia isotropo.

In tal caso le relazioni che esprimono $\mathbf{C}$ in funzione di $\tilde{\mathbf{T}}$ sono dei polinomi di secondo grado rispetto a $\tilde{\mathbf{T}}$, con i coefficienti funzioni soltanto degli invarianti principali di $\tilde{\mathbf{T}}$, e da dette relazioni si deduce subito che, nel caso isotropo, il tensore di Cauchy Green sinistro, $\mathbf{B}$, si può esprimere tramite un polinomio di secondo grado rispetto al tensore $\mathbf{W}^*$, essendo questo il trasformato di $\tilde{\mathbf{T}}$ tramite la rotazione locale, trasformato che non è altro che il tensore degli sforzi $\mathbf{T}$ moltiplicato sia a destra che a sinistra per il tensore di dilatazione sinistro. I coefficienti del polinomio che esprime $\mathbf{B}$ sono gli stessi del polinomio che esprime $\mathbf{C}$.

Dal polinomio che esprime $\mathbf{C}$ in funzione di $\tilde{\mathbf{T}}$ si deduce tra l'altro, che, nelle ipotesi poste, per i materiali iperelastici isotropi le direzioni principali per i due tensori $\tilde{\mathbf{T}}$ e $\mathbf{C}$ coincidono. Ne segue che se si sa che una qualunque delle due indicatrici di $\mathbf{C}$ e di $\mathbf{T}$ (o di $\tilde{\mathbf{T}}$) è rotonda, rotonda è pure la restante; in particolare, se una delle due è una sfera, anche la restante è una sfera, ossia, in altri termini, se uno dei due tensori $\mathbf{C}$ e $\mathbf{T}$ (o $\tilde{\mathbf{T}}$) è isotropo, anche l'altro è isotropo.

Infine si è provato che la proprietà dell'energia complementare di presentarsi funzione di $\mathbf{W}^*$ (e di $\mathbf{W}^*$ soltanto) è caratteristica dell'isotropia, e accanto a detta proprietà se ne è stabilita un'altra, ad essa equivalente. Nelle ipotesi poste, esse rappresentano altrettante condizioni che si aggiungono a quelle precisate ed elencate al n. 2 di [1].

Dette condizioni permettono di provare subito la proprietà dell'energia complementare di essere, nel caso dei materiali isotropi, una funzione isotropa, e viceversa, senza far ricorso alle relazioni stabilite al n. 2 del presente lavoro e di cui si è riferito sopra.

1. Premesse e osservazioni sull'energia complementare di deformazione.

Sia $\mathbf{x}$ la configurazione di riferimento di un intorno di una particella materiale, $\mathbf{F}$ il gradiente di deformazione nel passaggio dalla configurazione $\mathbf{x}$ a quella attuale, $\mathbf{C}$ il tensore di Cauchy-Green destro, definito da

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \tag{1.1}$$

$\mathbf{T}$ il tensore degli sforzi, che si suppone simmetrico (caso dei materiali semplici). Introdotto il secondo tensore di Piola-Kirchhoff, definito da:

$$\widetilde{\mathbf{T}} = J\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{T}\,(\mathbf{F}^{-1})^T, \tag{1.2}$$

dove è $J = \det \| \mathbf{F} \|$, una delle possibili espressioni per la potenza dello stress è data da

$$P = \frac{1}{2} J^{-1}\, tr\, [\widetilde{\mathbf{T}}\, \dot{\mathbf{C}}]. \tag{1.3}$$

Supposto il materiale iperelastico e indicate con σ e ϱ_R l'energia di deformazione e la densità nella configurazione di riferimento, da

$$\varrho_R\, \dot{\sigma} = JP, \tag{1.4}$$

nell'ipotesi, costantemente ammessa, che il materiale sia esente da vincoli interni, si deduce, stante (1.3), la notissima relazione

$$\widetilde{T} = 2\varrho_R\, \overline{\sigma}_{\mathbf{C}}, \tag{1.5}$$

dove $\overline{\sigma}_{\mathbf{C}}$ sta ad indicare il tensore simmetrico le cui componenti sono le derivate di $\sigma = \sigma(\mathbf{C})$ rispetto alle componenti di $\mathbf{C}$, componenti queste pensate, agli effetti della derivazione, come indipendenti (ossia senza tener conto del fatto che sono simmetriche).

Nella presente esposizione le sei relazioni scalari a cui la relazione (1.5) corrisponde si supporranno invertibili (ciò che implica la loro indipendenza funzionale). In tal caso, introdotta, accanto a σ, la funzione γ (*energia complementare di deformazione*, funzione di $\tilde{\mathbf{T}}$), definita da [1])

$$\varrho_R\,\gamma = -\,\varrho_R\,\sigma + \frac{1}{2}\,tr\,[\tilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{C}], \tag{1.6}$$

risulta, ricordando la relazione (1.4) e l'espressione (1.3),

$$\varrho_R\,\dot{\gamma} = \frac{1}{2}\,tr\,[\mathbf{C}\,\dot{\tilde{\mathbf{T}}}], \tag{1.7}$$

relazione che permette di scambiare (si veda (1.3) e (1.4)) il ruolo di $\mathbf{C}$ con quello di $\tilde{\mathbf{T}}$. Da essa, in conseguenza dell'ipotesi fatta sulla relazione (1.5), si deduce

$$\mathbf{C} = 2\varrho_R\,\gamma_{\tilde{\mathbf{T}}} \tag{1.8}$$

con ii significato di $\gamma_{\tilde{\mathbf{T}}}$ ormai ovvio.

2. Sulle relazioni tra stress e deformazione.

Si fissi ora, ad arbitrio, una terna cartesiana ortogonale, $\mathcal{R}$, e sia $\mathcal{T}$ la (o una) terna principale per il tensore $\mathbf{C}$, orientata in modo

---

[1]) Ricordando (1.2) si ha quindi

$$\sigma + \gamma = \frac{1}{2\varrho}\,tr\,\mathbf{T},$$

con ϱ densità della configurazione attuale.

coerente a $\mathcal{R}$. Sia poi $\mathbf{O}$ la matrice della rotazione che trasforma $\mathcal{R}$ in una terna con gli assi paralleli e concordi a quelli di $\mathcal{T}$ e $\boldsymbol{\Omega}$ il tensore

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}\, \mathbf{O}^T = -\, \mathbf{O}\, \dot{\mathbf{O}}^T,$$

tensore il cui aggiunto, a meno del segno, eguaglia il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del sistema rigido solidale alla terna $\mathcal{T}$ rispetto alla terna $\mathcal{R}$ [2]).

Indicando con $\bar{\tilde{\mathbf{T}}}$ e $\bar{\mathbf{C}}$ le matrici che hanno per elementi rispettivamente le componenti di $\tilde{\mathbf{T}}$ e di $\mathbf{C}$ rispetto alla terna $\mathcal{T}$, si ha

$$\bar{\tilde{\mathbf{T}}} = \mathbf{O}^T\, \tilde{\mathbf{T}}\, \mathbf{O}, \quad \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{O}\, \bar{\tilde{\mathbf{T}}}\, \mathbf{O}^T, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{O}\, \mathbf{C}\, \mathbf{O}^T,$$

dove si sono indicate con gli stessi simboli dei corrispondenti tensori le matrici costituite dalle componenti di $\tilde{\mathbf{T}}$ e $\mathbf{C}$ rispetto al riferimento $\mathcal{R}$.

Si ha quindi

$$tr\,[\mathbf{C}\, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}] = tr\,[\mathbf{O}^T \mathbf{C}\, \mathbf{O}\, \dot{\bar{\tilde{\mathbf{T}}}}] + tr\,[\mathbf{O}\, \bar{\tilde{\mathbf{T}}}\, \mathbf{O}^T \mathbf{C}\, \dot{\mathbf{O}}\, \mathbf{O}^T] + tr\,[\mathbf{C}\, \mathbf{O}\, \bar{\tilde{\mathbf{T}}}\, \mathbf{O}^T \mathbf{O}\, \dot{\mathbf{O}}^T] =$$

$$= tr\,[\bar{\mathbf{C}}\, \dot{\bar{\tilde{\mathbf{T}}}}] + 2\, tr\,[\tilde{\mathbf{T}}\, \mathbf{C}\, \boldsymbol{\Omega}],$$

ossia, stante il carattere tensoriale di $\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{C}, \boldsymbol{\Omega}$,

$$tr\,[\mathbf{C}\, \dot{\tilde{\mathbf{T}}}] = tr\,[\bar{\mathbf{C}}\, \dot{\bar{\tilde{\mathbf{T}}}}] + 2\, tr\,[\bar{\tilde{\mathbf{T}}}\, \bar{\mathbf{C}}\, \bar{\boldsymbol{\Omega}}]. \tag{2.1}$$

Indicati con λ^ν tre parametri atti ad individuare l'orientamento della terna $\mathcal{T}$ rispetto alla terna $\mathcal{R}$, conviene a questo punto ricordare che è [3])

$$\Omega^{\alpha\beta} = -\, \eta^{\alpha\beta\gamma}\, \underset{\nu}{\omega_\gamma}\, \dot{\lambda}^\nu,$$

---

[2]) Cfr. [2], 1, 3.

[3]) Cfr. [2], 1, 3.

dove con $\underset{\nu}{\omega}$ si sono indicati, al solito, i vettori

$$\underset{\nu}{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{k}_\alpha \times \frac{\partial \mathbf{k}_\alpha}{\partial \lambda^\nu},$$

$\mathbf{k}_\alpha$ essendo i versori di $\mathcal{T}$.

Ciò premesso, è sufficiente tener presente che la matrice $\overline{\mathbf{C}}$ è diagonale per dedurre dalle relazioni (1.8), (2.1) che γ si può anche ritenere funzione delle componenti $\widetilde{T}^{\alpha\alpha}$ [4]) di $\widetilde{\mathbf{T}}$ rispetto a $\mathcal{T}$ e dei parameti λ^ν: $\gamma = \overline{\gamma}(\widetilde{T}^{\alpha\alpha}, \lambda^\nu)$. Inoltre, indicando con C_α i coefficienti principali di $\mathbf{C}$ e intendendo che $\Omega^{\alpha\beta}$, ecc. stiano ad indicare le componenti rispetto a $\mathcal{T}$, sempre dalle (1.8), (2.1) si deduce che devono sussistere le relazioni

$$C_\alpha = 2\varrho_R \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial \widetilde{T}^{\alpha\alpha}}, \tag{2.2}$$

$$\varrho_R \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial \lambda^\nu} = -\sum_1^3{}_\gamma\, \underset{\nu}{\omega}_\gamma (C_{\gamma+1} - C_{\gamma+2})\, \widetilde{T}^{\gamma+1\,\gamma+2}. \tag{2.3}$$

Le (2.2) rappresentano le reciproche di ben note relazioni [5]).

Ricordando poi le espressioni [6]) delle derivate $\dfrac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \lambda^\nu}$ si ha, inoltre,

$$\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial \lambda^\nu} = -\frac{\partial \overline{\sigma}}{\partial \lambda^\nu},$$

ossia *le derivate dell'energia complementare di deformazione rispetto ai parametri che caratterizzano l'orientamento della terna principale $\mathcal{T}$ differiscono unicamente per il segno dalle analoghe derivate dell'energia di deformazione.*

---

[4]) E' ovvio che scrivendo $T_{\alpha\alpha}$ si tralascia la convenzione di sommare rispetto all'indice ripetuto α.

[5]) Cfr. [3], 2 e [2], 3.

[6]) Cfr. [3], 3 e [2], 3.

Tenendo presenti le relazioni (2.2), alle relazioni (2.3) si possono assegnare le espressioni

$$(2.3') \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda^\nu} = -\sum_{1}^{3}{}_{\gamma}\, \omega_\gamma^\nu \left(\frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \tilde{T}^{\gamma+1\,\gamma+1}} - \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \tilde{T}^{\gamma+2\,\gamma+2}} \right) \tilde{T}^{\gamma+1\,\gamma+2} .$$

Infine, indicando con Δ_α gli allungamenti principali, le relazioni (2.2) si possono porre nella forma più espressiva

$$(2.2') \qquad \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \tilde{T}^{\alpha\alpha}} = \frac{1}{2\varrho_R}(1 + \Delta_\alpha)^2,$$

le quali, mediante la misura dei suddetti allungamenti e della densità in $\mathbf{x}$, permettono di determinare i valori delle derivate $\dfrac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \tilde{T}^{\alpha\alpha}}$, il che può fornire qualche indicazione utile per la determinazione sperimentale della funzione γ.

3. Caso dei materiali isotropi.

Le relazioni (2.2), (2.3) valgono per ogni materiale iperelastico per cui risultino invertibili le relazioni scalari riassunte nella relazione tensoriale (1.5).

Nell'ipotesi che il materiale sia isotropo (con $\mathbf{x}$ stato indeformato [7])) la terna $\mathcal{T}$ è anche terna principale per il tensore $\tilde{\mathbf{T}}$ e le relazioni (2.3) vengono in tal caso ad esprimere che la funzione $\bar{\gamma}$ dipende unicamente dalle componenti $\tilde{T}^{\alpha\alpha}$ che ora non sono altro che i coefficienti principali T^α di $\tilde{\mathbf{T}}$.

Le (2.2) si scrivono quindi

$$(3.1) \qquad C_\alpha = 2\varrho_R \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \tilde{T}^\alpha} .$$

---

[7]) Tale precisazione sarà sempre sottintesa nel seguito.

Stante inoltre la corrispondenza biunivoca che intercorre fra i coefficienti principali e gli invarianti principali di un tensore simmetrico, si ha, nel caso in esame, che γ può essere ritenuta funzione di $\widetilde{\mathbf{T}}$ unicamente per il tramite dei suoi tre invarianti principali $I_{\widetilde{\mathbf{T}}}$, $II_{\widetilde{\mathbf{T}}}$, $III_{\widetilde{\mathbf{T}}}$. In altri termini, ricordando un noto teorema, si ha che *l'ipotesi dell'isotropia implica che l'energia complementare di deformazione sia una funzione isotropa del tensore* $\widetilde{\mathbf{T}}$.

È agevole verificare che vale anche il viceversa, nel senso che *se γ è una funzione isotropa del tensore $\widetilde{\mathbf{T}}$ il materiale è isotropo.* E infatti, se γ è isotropa, essa dipende da $\widetilde{\mathbf{T}}$ unicamente per il tramite dei suoi invarianti principali, ossia dei suoi coefficienti principali, e questo implica che i secondi membri di (2.3) risultino identicamente nulli, qualunque sia il valore assunto dai coefficienti C_α. Tale fatto implica che siano nulle le componenti $\widetilde{\mathbf{T}}^{\alpha\beta}$ con $\alpha \neq \beta$, ossia che la terna $\mathcal{T}$ sia pure terna principale per il tensore $\widetilde{\mathbf{T}}$, proprietà che esprime appunto che il materiale iperelastico è isotropo [8]).

* * *

È sufficiente tenere presente che risulta

$$I_{\widetilde{\mathbf{T}}} = tr\,\widetilde{\mathbf{T}}, \qquad II_{\widetilde{\mathbf{T}}} = \frac{1}{2}(I^2_{\widetilde{\mathbf{T}}} - tr\,\widetilde{\mathbf{T}}^2),$$

$$III_{\widetilde{\mathbf{T}}} = \frac{1}{3}(tr\,\widetilde{\mathbf{T}}^3 - I^3_{\widetilde{\mathbf{T}}} - 3\,I_{\widetilde{\mathbf{T}}}\,II_{\widetilde{\mathbf{T}}}),$$

per avere che, nell'ipotesi dell'isotropia, la relazione (1.8) si esplicita in

$$\mathbf{C} = 2\varrho_R \left|\left(\frac{\partial\gamma}{\partial I_{\widetilde{\mathbf{T}}}} + I_{\widetilde{\mathbf{T}}}\frac{\partial\gamma}{\partial II_{\widetilde{\mathbf{T}}}} + II_{\widetilde{\mathbf{T}}}\frac{\partial\gamma}{\partial III_{\widetilde{\mathbf{T}}}}\right)\mathbf{1} - \right. \tag{3.2}$$

$$\left. - \left(\frac{\partial\gamma}{\partial II_{\widetilde{\mathbf{T}}}} + I_{\widetilde{\mathbf{T}}}\frac{\partial\gamma}{\partial III_{\widetilde{\mathbf{T}}}}\right)\widetilde{\mathbf{T}} + \frac{\partial\gamma}{\partial III_{\widetilde{\mathbf{T}}}}\widetilde{\mathbf{T}}^2\right|.$$

---

[8]) **Cfr., ad es.,** [1], **2,** a).

Da questa relazione appare evidente che ogni direzione principale per $\tilde{\mathbf{T}}$ è anche direzione principale per $\mathbf{C}$. È sufficiente pertanto ricordare che in un materiale isotropo ogni direzione principale per $\mathbf{C}$ è anche direzione principale per $\tilde{\mathbf{T}}$, per poter concludere che *per i materiali iperelastici isotropi per i quali risultino invertibili le relazioni scalari riassunte nella* (1.5) *le direzioni principali per i tensori* $\tilde{\mathbf{C}}$ *e* $\tilde{\mathbf{T}}$ *coincidono.*

Tenendo presente che l'immagine nella configurazione attuale di una direzione principale di $\mathbf{C}$ è direzione principale per il tensore degli sforzi $\mathbf{T}$, e viceversa, si ha quindi che, se accade che una delle due indicatrici di $\mathbf{C}$ e di $\mathbf{T}$ (o di $\tilde{\mathbf{T}}$) è rotonda, rotonda è pure la restante; in particolare, se una delle due è una sfera, anche la restante è una sfera, ciò stando ad esprimere che se uno dei due tensori $\mathbf{C}$ e $\mathbf{T}$ (o $\tilde{\mathbf{T}}$) è isotropo, anche l'altro è isotropo.

*
* *

Introdotta per $\mathbf{F}$ la decomposizione

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \tag{3.3}$$

dove $\mathbf{V}$ è il *tensore di dilatazione sinistro* e $\mathbf{R}$ è il *tensore rotazione* (rappresentante la rotazione locale), si consideri ora il tensore di Cauchy Green sinistro, $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$, legato a $\mathbf{C}$ da

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}\mathbf{C}\mathbf{R}^T, \tag{3.4}$$

e il tensore

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{R}^T, \tag{3.5}$$

per il quale, stante (1.2) e (3.3), risulta

$$\mathbf{W}^* = J\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{T}\mathbf{V}^{-1}\,.$$

Stante (3.4) e (3.5), dalla relazione (3.2) si deduce, moltiplicando ambo i membri di essa a sinistra per $\mathbf{R}$ e a destra per $\mathbf{R}^T$ e tenendo presente che $\mathbf{W}^*$, per il modo stesso con cui è stato definito, ha gli stessi coefficienti principali di $\tilde{\mathbf{T}}$,

$$(3.6) \qquad \mathbf{B} = 2\varrho_R \left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial I_{\mathbf{W}^*}} + I_{\mathbf{W}^*}\frac{\partial\gamma}{\partial II_{\mathbf{W}^*}} + II_{\mathbf{W}^*}\frac{\partial\gamma}{\partial III_{\mathbf{W}^*}}\right)\mathbf{1} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial\gamma}{\partial II_{\mathbf{W}^*}} + I_{\mathbf{W}^*}\frac{\partial\gamma}{\partial III_{\mathbf{W}^*}}\right)\mathbf{W}^* + \frac{\partial\gamma}{\partial III_{\mathbf{W}^*}}\mathbf{W}^{*2}\right].$$

4. Osservazioni sulle condizioni di isotropia.

È noto che per un materiale iperelastico il verificarsi dell'eguaglianza

$$(4.1) \qquad P = J^{-1}\, tr\,[\mathbf{W}^*\,\dot{\mathbf{B}}]$$

è proprietà caratteristica dell'isotropia [9]. Pertanto, sussistendo l'eguaglianza

$$(4.2) \qquad tr\,[\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{C}] = tr\,[\mathbf{W}^*\,\mathbf{B}],$$

dalle relazioni (1.6), (1.4) si deduce che, nell'ipotesi dell'isotropia, risulta

$$(4.3) \qquad \varrho_R\,\dot{\gamma} = \frac{1}{2}\, tr\,[\mathbf{B}\dot{\mathbf{W}}^*].$$

Viceversa, stanti le relazioni (1.6), (4.2) e (1.4), il verificarsi della (4.3) implica il verificarsi della relazione (4.1), ossia l'isotropia del materiale.

Si ha pertanto che l'eguaglianza (4.3) *è caratteristica dei materiali iperelastici isotropi* (per i quali risultino invertibili le relazioni scalari riassunte nella (1.5)).

È sufficiente poi ricordare la relazione (1.7) per dedurre che l'eguaglianza (4.3) è quivalente alla [10])

$$(4.4) \qquad tr\,[\mathbf{C}\,\dot{\tilde{\mathbf{T}}}] = tr\,[\mathbf{B}\,\dot{\mathbf{W}}^*],$$

che è quindi anch'essa *caratteristica dell'isotropia.*

---

[9]) Cfr. [1], 1, d) e 2, a).

[10]) L'eguaglianza (4.4) fa riscontro alla

$$tr\,[\tilde{\mathbf{T}}\,\dot{\mathbf{C}}] = tr\,[\mathbf{W}^*\,\dot{\mathbf{B}}].$$

* * *

Si proverà ora che *l'ipotesi che* γ *dipenda da* $\mathbf{W}^*$ (*e unicamente da esso*) *implica che* γ *sia una funzione isotropa di* $\mathbf{W}^*$.

E infatti è evidente che, comunque si scelga il tensore ortogonale $\mathbf{Q}$, sottoponendo la configurazione $\mathbf{x}$ ad un opportuno spostamento rigido rotatorio, si può sempre fare in modo che il tensore rotazione risulti proprio espresso da $\mathbf{Q}^T$. Ne segue che, una volta effettuato detto spostamento, dalla relazione (3.5) si deduce

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}\mathbf{W}^* \mathbf{Q}^T,$$

e pertanto si ha

$$\gamma\,(\tilde{\mathbf{T}}) = \gamma\,(\mathbf{Q}\mathbf{W}^* \mathbf{Q}^T).$$

D'altra parte, si sa per ipotesi che γ dipende unicamente da $\mathbf{W}^*$ e quindi risulta

$$\gamma\,(\mathbf{Q}\mathbf{W}^* \mathbf{Q}^T) = \gamma\,(\mathbf{W}^*).$$

Questa relazione, stante l'arbitrarietà di Q, sta proprio ad esprimere che il verificarsi di (4.3) implica che γ sia una funzione isotropa di $\mathbf{W}^*$, ossia, per un noto teorema, che dipenda da $\mathbf{W}^*$ unicamente per il tramite dei suoi invarianti principali (che coincidono con quelli di $\tilde{\mathbf{T}}$).

Stante il teorema ora provato, si ha quindi che l'ipotesi che γ dipenda da $\mathbf{W}^*$ (e unicamente da esso) implica l'isotropia dal materiale.

Il viceversa è già stato provato al n. precedente, ed è implicito nelle relazioni (3.6). Comunque si può provare subito direttamente. Infatti, dall'ipotesi dell'isotropia del materiale segue che deve essere verificata la relazione (4.3), la quale appunto implica che γ sia funzione di $\mathbf{W}^*$ (e di $\mathbf{W}^*$ soltanto).

A questo punto poi è sufficiente ricordare il teorema dimostrato poco sopra per dedurre subito che l'ipotesi dell'isotropia del materiale implica che la funzione γ sia isotropa.

Si è così ritrovato per altra via un risultato già stabilito al n. precedente, facendo ricorso alle relazioni (3.1).

In base a quanto visto nel presente n., si può concludere che, nell'ipotesi che le relazioni scalari equivalenti alla (1.5) siano invertibili, alle sei condizioni elencate in [1], 2, a) si possono aggiungere le seguenti:

VII) *sussiste l'eguaglianza* (4.3) (*o, il che è lo stesso,* (4.44));

VIII) *l'energia complementare di deformazione è una funzione di* $\mathbf{W}^*$.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. GALLETTO: *Sulla potenza dello stress e sull'isotropia dei materiali iperelastici,* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, Vol. XL (1968), pp. 227-236.

[2] D. GALLETTO: *Sui materiali iperelastici anisotropi,* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, Vol. XL (1968), pp. 237-251.

[3] A. SIGNORINI: *Estensione delle formule di Almansi ai sistemi elastici anisotropi,* Rend. Acc. Lincei, S. VIII, Vol. XXV (1958), pp. 246-253.

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 aprile 1968.