RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO CAMPANATO

Sul problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine, non variazionali, a coefficienti discontinui

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 153-163

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__153_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUL PROBLEMA DI CAUCHY-DIRICHLET PER EQUAZIONI PARABOLICHE DEL SECONDO ORDINE, NON VARIAZIONALI, A COEFFICIENTI DISCONTINUI

SERGIO CAMPANATO *)

In questa nota considero il problema di Cauchy-Dirichlet per l'operatore parabolico $\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t}$ in un cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$, Ω convesso di $\mathbb{R}^n$, e con dati al bordo nulli. I coefficienti a_{ij} sono misurabili e limitati e l'operatore $Eu = \sum_{ij} a_{ij} D_i D_j u$ è ellittico; la soluzione è cercata nella classe delle funzioni $u \in W_0^{2,1}(Q)$ dove

$$W_0^{2,1}(Q) = \left\{ u \mid u \in L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q),\ u(x, 0) = 0 \right\}$$

Sotto certe ipotesi per gli autovalori della matrice simmetrica $\{a_{ij}\}$ dimostro che l'operatore $E - \frac{\partial}{\partial t}$ è un isomorfismo $W_0^{2,1}(Q) \to L^2(Q)$ (cfr. teor. 2.I).

La tecnica di dimostrazione è analoga a quella utilizzata in [2] nello studio del problema di Dirichlet per l'operatore ellittico Eu. Nel lavoro citato si dimostra che l'operatore E è un isomorfismo $H_0^{1,p} \cap H^{2,p} \to L^p$ per p appartenente ad un intorno di 2 abbastanza piccolo.

---

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Università di Pisa.

Ad analogo risultato si può arrivare anche per l'operatore parabolico $E - \frac{\partial}{\partial t}$ e per il problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo. Mi sono limitato al caso $p = 2$ per non appesantire la trattazione.

Per quanto riguarda le condizioni b) e c) del n. 2 sugli autovalori della matrice $\{a_{ij}\}$ si può osservare che la condizione b) (ipotesi di Cordes), non è eliminabile. Essa è necessaria anche perché l'operatore ellittico E sia un isomorfismo $H_0^1 \cap H^2 \to L^2$ (cfr. [9]). La condizione c) invece meriterebbe un'ulteriore indagine in quanto, mancando di opportuni controesempi, non è chiaro se essa sia legata al metodo di dimostrazione o alla natura del problema.

1. Sia Ω un aperto limitato $\mathbb{R}_x^n$, $n \geq 2$, con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^2. Supponiamo che Ω sia convesso o, più in generale, che la curvatura media di $\partial\Omega$ abbia segno costante non positivo (retta normale orientata verso l'esterno). Indichiamo con Q il cilindro $\Omega \times (0, T)$, $T > 0$, e con (x, t) un punto generico di $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$.

Indichiamo con $H^k(\Omega)$ $[H_0^k(\Omega)]$ la chiusura dello spazio $C^k(\bar{\Omega})$ $[C_0^k(\bar{\Omega})]$ rispetto alla norma

$$\| v \| = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha v \|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Indichiamo con $W_0^{2,1}(Q)$ la classe delle funzioni $u(x, t)$ definite in Q tali che

$$u \in L^2(0, T;\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q) \text{ e } u(x, 0) = 0. \tag{1.1}$$

La condizione $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)$ equivale a dire che $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T;\ L^2(\Omega))$ e per quanto riguarda la condizione $u(x, 0) = 0$ ricordiamo che una funzione $u \in W_0^{2,1}(Q)$ è quasi ovunque uguale ad una funzione continua di $[0, T] \to L^2(\Omega)$ ([8]).

In $W_0^{2,1}(Q)$ assumiamo come norma la seguente

$$\| u \|_{(M)} = \left\{ \int_0^T dt \int_\Omega \left[\sum_{ij} (D_i D_j u)^2 + M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx \right\}^{1/2} \tag{1.2}$$

dove M è una costante positiva fissata e $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Con la norma (1.2), $W_0^{2,1}(Q)$ è uno spazio di Hilbert e, al variare di M nei reali positivi, le norme (1.2) sono a due a due equivalenti.

LEMMA 1.I. *Fissato M positivo e fissato $f \in L^2(Q)$, la soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet* [1])

$$\begin{cases} \Delta u - M \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ u \in W_0^{2,1}(Q) \end{cases} \tag{1.3}$$

verifica la maggiorazione

$$\| u \|_{(M)} \leq \| f \|_{L^2(Q)} . \tag{1.4}$$

DIM. Per ogni $u \in W_0^{2,1}(Q)$ risulta [2])

$$\int_Q \Delta u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \, dt \leq 0. \tag{1.5}$$

Inoltre per ogni $v(x) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ si ha la maggiorazione (cfr. [9])

$$\int_\Omega \sum_{ij} (D_i D_j v)^2 \, dx - (n-1) \int_{\partial\Omega} | \operatorname{grad} v |^2 H(x) \, d\sigma = \int_\Omega (\Delta v)^2 \, dx$$

---

[1]) È ben noto che questo problema ammette una sola soluzione $\forall f \in L^2(Q)$.

[2]) È sufficiente supporre u regolare; allora

$$\int_Q \Delta u . \frac{\partial u}{\partial t} \, dx \, dt = -\int_Q \sum_i D_i u . \frac{\partial}{\partial t} D_i u \, dx \, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \sum_i (D_i u)^2 \, dx \, dt = -\frac{1}{2} \int_\Omega \sum_i [D_i u(x, T)]^2 dx \leq 0.$$

dove $H(x)$ è la curvatura media di $\partial\Omega$ nel punto $x \in \partial\Omega$. Per l'ipotesi fatta su Ω risulterà

$$\int_\Omega (D_i D_j v)^2 \, dx \leq \int_\Omega (\Delta v)^2 \, dx \tag{1.6}$$

Se u è la soluzione del problema (1.3), per quasi tutti i $t \in [0, T]$ è $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e quindi, tenuto conto di (1.5) e (1.6)

$$\| u \|^2_{(M)} \leq \int_Q \left[(\Delta u)^2 + M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] dx \, dt \leq$$

$$\leq \int_Q \left[(\Delta u)^2 + M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - 2M \, \Delta u \, \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx \, dt =$$

$$= \int_Q \left(\Delta u - M \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \, dt = \int_Q f^2 \, dx \, dt.$$

TEOREMA 1.I. *Sia $a(x, t)$ una funzione misurabile e limitata in Q, strettamente positiva*

$$0 < A \leq a(x, t) \leq B, \qquad (x, t) \in Q. \tag{1.7}$$

Per ogni $f \in L^2(Q)$ il problema di C. D.

$$\begin{cases} \Delta u - a \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ u \in W_0^{2,1}(Q) \end{cases} \tag{1.8}$$

ammette una e una sola soluzione u e si ha la maggiorazione

$$\| u \|_{\left(\frac{A+B}{2}\right)} \leq \frac{B + A}{2A} \| f \|_{L^2(Q)}. \tag{1.9}$$

DIM. Posto $M = \frac{A+B}{2}$ consideriamo l'applicazione $\varphi : W_0^{2,1}(Q) \to$ $\to W_0^{2,1}(Q)$

$$\varphi(v) = \left(\Delta - M\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}(f) + \left(\Delta - M\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\left([a - M]\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

La tesi è equivalente a dimostrare che $v \to \varphi(v)$ ha uno e un solo punto unito. Se in $W_0^{2,1}(Q)$ assumiamo come norma $\| u \|_{(M)}$ allora φ è una contrazione. Infatti, tenuto conto del lemma 1.I, si ha $\forall v$, $w \in W_0^{2,1}(Q)$

$$\| \varphi(v) - \varphi(w) \|_{(M)} =$$

$$= \left\| \left(\Delta - M\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\left([a - M]\frac{\partial(v - w)}{\partial t}\right)\right\|_{(M)} \leq \left\|(a - M)\frac{\partial(v - w)}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)} \leq$$

$$\leq \frac{B - A}{B + A}\left\| M\frac{\partial(v - w)}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)} \leq \frac{B - A}{B + A}\| v - w \|_{(M)} .$$

Pertanto esiste una e una sola $u \in W_0^{2,1}(Q)$ tale che $u = \varphi(u)$ e u è la soluzione del problema (1.8). Infine

$$\| u \|_{(M)} = \| \varphi(u) \|_{(M)} \leq \| f \|_{L^2(Q)} + \frac{B - A}{B + A}\| u \|_{(M)}$$

e quindi

$$\| u \|_{(M)} \leq \frac{A + B}{2A}\| f \|_{L^2(Q)}.$$

TEOREMA 1.II. *Sia $a(x,t) \in L^\infty(Q)$ e strettamente positiva*

$$0 < A \leq a(x,t) \leq B, \qquad (x,t) \in Q.$$

Per ogni $f \in L^2(Q)$ il problema di C. D.

$$\text{(1.10)} \qquad \begin{cases} a\Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ \\ u \in W_0^{2,1}(Q) \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione u e si ha la maggiorazione

$$\| u \|_{\left(\frac{A+B}{2A}\right)} \leq \frac{A+B}{2A^2} \| f \|_{L^2(Q)} . \tag{1.11}$$

2. Sia $\{a_{ij}(x,t)\}$ una matrice $n \times n$ simmetrica di funzioni misurabili e limitate in Q. Facciamo le seguenti ipotesi

a) Esiste un $\nu > 0$ tale che $\sum_{ij} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \geq \nu |\lambda|^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ e per quasi tutti i punti $(x,t) \in Q$.

b) Detti $\mu_i(x,t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ gli autovalori della matrice $\{a_{ij}(x,t)\}$, esiste una costante $\mathbb{k}$, $0 \leq \mathbb{k} < 1$, tale che per quasi tutti i punti $(x,t) \in Q$ risulti

$$\frac{(\sum_i \mu_i)^2}{\sum_i \mu_i^2} \geq n - \mathbb{k}^2. \tag{2.1}$$

c) Esistono due costanti positive A e B tali che

$$0 < A \leq \sum_i \mu_i(x,t) \leq B, \qquad \frac{2A}{A+B} > \mathbb{k}. \tag{2.2}$$

Poniamo

$$\beta = \frac{(\sum_i \mu_i)^2}{\sum_i \mu_i^2}, \ \gamma = \sum_i \mu_i, \ \alpha = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Le funzioni $\alpha, \beta, \gamma \in L^\infty(Q)$ e sono strettamente positive.

LEMMA 2.I. *Se valgono le ipotesi* a) b) c) *allora*

$$\sup_Q \left\{ n - \beta + \left[\frac{\beta - (n - \mathbb{k}^2)}{n - \mathbb{k}^2} \right]^2 \frac{4B^2}{(A+B)^2} \right\}^{1/2} \leq \mathbb{k} \tag{2.3}$$

DIM. Per l'ipotesi b) risulta

$$n - \mathbb{k}^2 \leq \beta \leq n.$$

Posto $F(\beta) = n - \beta + \left[\dfrac{\beta - (n - \mathbb{k}^2)}{(n - \mathbb{k}^2)}\right]^2 \dfrac{4B^2}{(A+B)^2}$, $F(\beta)$ è una funzione convessa di β e quindi

$$\sup_Q \sqrt{F(\beta)} \leq \max \left\{ \sqrt{F(n)},\ \sqrt{F(n - \mathbb{k}^2)} \right\} = \max \left\{ \frac{2\mathbb{k}^2 B}{(n - \mathbb{k}^2)(A+B)},\ \mathbb{k} \right\}$$

Tenuto conto dell'ipotesi c)

$$\max \left\{ \frac{2\mathbb{k}^2 B}{(n - \mathbb{k}^2)(A+B)},\ \mathbb{k} \right\} = \mathbb{k}$$

e la tesi è provata.

Indichiamo con Eu l'operatore $\sum_{ij} a_{ij}(x,t) D_i D_j u$.

Teorema 2.I. *Se la matrice* $\{a_{ij}(x,t)\}$ *verifica le condizioni* a) b) c) *allora* $\forall f \in L^2(Q)$ *il problema di* C. D.

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{cases} Eu - \dfrac{\partial u}{\partial t} = f \\ u \in W_0^{2,1}(Q) \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione e si ha la maggiorazione

$$\text{(2.5)} \qquad \| u \|_{(M)} \leq \frac{A+B}{2A - \mathbb{k}(A+B)} \cdot \frac{1}{\nu} \| f \|_{L^2(Q)}$$

$$\text{con } M = (n - \mathbb{k}^2) \frac{A+B}{2AB}.$$

Dim. Se u è soluzione del problema (2.4) allora

$$\Delta u - \frac{n - \mathbb{k}^2}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha f + (\Delta - \alpha E) u + \left(\alpha - \frac{n - \mathbb{k}^2}{\gamma}\right) \frac{\partial u}{\partial t}$$

e quindi

$$u = \left(\Delta - \frac{n - \mathbf{k}^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} (\alpha f) +$$

$$+ \left(\Delta - \frac{n - \mathbf{k}^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \left[(\Delta - \alpha E)\, u + \frac{\beta - (n - \mathbf{k}^2)}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial t}\right] = \varphi(u).$$

Sappiamo, per il teorema 1.I, che $\left(\Delta - \frac{n - \mathbf{k}^2}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}$ è un isomorfismo di $L^2(Q)$ su $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}(Q)$ pertanto φ applica $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}(Q)$ in $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}(Q)$.

Dimostriamo che φ è una contrazione qualora si assuma come norma in $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}(Q)$ la seguente

$$\| u \|_{(M)} \quad \text{con } M = (n - \mathbf{k}^2) \frac{A + B}{2AB}$$

A tal fine osserviamo che

$$0 < \frac{n - \mathbf{k}^2}{B} \leq \frac{n - \mathbf{k}^2}{\gamma} \leq \frac{n - \mathbf{k}^2}{A}$$

quindi, tenuto conto della maggiorazione (1.9), si ha $\forall\, v, w \in \overset{\circ}{W}{}^{2,1}(Q)$

$$\| \varphi(v) - \varphi(w) \|_{(M)} \leq$$

$$\leq \frac{A + B}{A} \left\| (\Delta - \alpha E)(v - w) + \frac{\beta - (n - \mathbf{k}^2)}{\gamma} \frac{\partial (v - w)}{\partial t} \right\|_{L^2(Q)} =$$

$$= \frac{A + B}{2A} \left\{ \int_Q \left[\sum_{ij} (\delta_{ij} - \alpha a_{ij}) D_i D_j (v - w) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\beta - (n - \mathbf{k}^2)}{M\gamma} M \frac{\partial (v - w)}{\partial t} \right]^2 dx\, dt \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{A + B}{2A} \left\{ \int_Q \left(\sum_{ij} (\delta_{ij} - \alpha a_{ij})^2 + \left[\frac{\beta (n - \mathbf{k}^2)}{M\gamma} \right]^2 \right) \cdot \right.$$

$$\cdot\left(\sum_{ij}(D_i D_j(v-w))^2 + M^2\left(\frac{\partial(v-w)}{\partial t}\right)^2\right) dx\, dt\Big\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{A+B}{2A}\left\{\int_Q F(\beta)\left[\sum_{ij}(D_i D_j(v-w))^2 + M^2\left(\frac{\partial(v-w)}{\partial t}\right)^2\right] dx\, dt\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{A+B}{A}\sup_Q \sqrt{F(\beta)}\cdot\| v-w \|_{(M)}.$$

In virtù del lemma 2.I e dell'ipotesi c) è

$$\frac{A+B}{2A}\sup_Q \sqrt{F(\beta)} \leq \mathbb{k}\,\frac{A+B}{2A} < 1$$

quindi φ è una contrazione. Quindi esiste una e una sola $u \in W_0^{2,1}(Q)$ tale che $u = \varphi(u)$. Ciò equivale a dire che il problema (2.4) ha $\forall f \in L^2(Q)$ una e una sola soluzione. Per la soluzione u si ottiene la seguente maggiorazione

$$\| u \|_{(M)} = \| \varphi(u) \|_{(M)} \leq \frac{A+B}{2A}\| \alpha f \|_{L^2(Q)} + \frac{A+B}{2A}\mathbb{k}\,\| u \|_{(M)}$$

da cui

$$\| u \|_{(M)} \leq \frac{A+B}{2A - \mathbb{k}(A+B)}\| f\alpha \|_{L^2(Q)}.$$

Da questa maggiorazione segue la (2.5) tenuto conto che [3])

$$\alpha(x,t) \leq \frac{1}{\nu} \quad \text{in } Q.$$

---

[3]) La condizione a) assicura che $\mu_i(x,t) \geq \nu$ $(i = 1, \dots, n)$ $(x,t) \in Q$. Quindi il vettore $\mu(x,t) = (\mu_1, \dots, \mu_2)$ non è interno alla sfera di centro $\left(\frac{\nu}{2}, \dots, \frac{\nu}{2}\right)$ e raggio $\frac{\nu}{2}\sqrt{n}$. Ciò significa appunto che

$$\frac{\sum_i \mu_i}{\sum_i \mu_i^2} \leq \frac{1}{\nu}.$$

3. Le condizioni b) e c) enunciate nel paragrafo precedente hanno una immediata interpretazione geometrica: Poniamo $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ e $\Lambda = \{\mu : \mu_1 > 0, \dots, \mu_n > 0\}$. La condizioni b) equivale a imporre che esista un cono rotondo $\mathcal{C}$ di vertice 0, di asse $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$, strettamente contenuto in Λ, tale che $\mu \in \mathcal{C}$ per quasi tutti i punti $(x, t) \in Q$.

L'apertura di questo cono è funzione del parametro $\mathbb{k}$, infatti detto v il vettore unitario $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ si ha

$$\frac{(\mu \mid v)}{\| \mu \|} > 1 - \frac{\mathbb{k}^2}{n} \qquad \forall \mu \in \mathcal{C}.$$

Per $\mathbb{k} = 0$ il cono $\mathcal{C}$ si riduce alla semiretta $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n > 0$ e per $\mathbb{k} = 1$ il cono $\mathcal{C}$ è tangente agli iperpiani coordinati.

Per $n = 2$ la condizione b) è sempre verificata. Dalla condizione di ellitticità

$$\nu \mid \lambda \mid^2 \leq \sum_{ij} a_{ij} \lambda_i \lambda_j \leq M \mid \lambda \mid^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}^2$$

si ottiene facilmente questa valutazione per $\mathbb{k}$

$$0 \leq \mathbb{k} \leq \frac{M - \nu}{\sqrt{M^2 + \nu^2}} \leq \left(1 - \frac{\nu}{M}\right).$$

La condizione c) esprime il fatto che per quasi tutti i punti $(x, t) \in Q$ il vettore $\mu(x, t)$ appartiene ad una striscia limitata da due iperpiani

$$\sum_i \mu_i = A \qquad \text{e} \qquad \sum_i \mu_i = B$$

« abbastanza vicini ». L'abbastanza vicino dipende del parametro $\mathbb{k}$; da (2.2) si ricava infatti che

$$0 \leq B - A < 2 \frac{1 - \mathbb{k}}{2 - \mathbb{k}} B. \tag{3.1}$$

Questa condizione è certamente verificata, qualunque siano A e B, se $\mathbb{k} = 0$. Questo è in accordo con il teorema 1.II.

La condizione (3.1) è anche verificata nel caso in cui, al variare di (x, t) in Q, il vettore $\mu(x, t)$ appartiene sempre ad un certo iperpiano $\sum_i \mu_i = \text{cost.} > 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO - *Equazioni paraboliche del secondo ordine e spazi* $\mathcal{L}^{2,\theta}(\Omega,\delta)$ - Ann. di Matem. Vol. LXXIII (1966).

[2] S. CAMPANATO - *Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale* - Ann. Scuola N. S. di Pisa, vol. XXI (1967).

[3] E. GAGLIARDO - *Problema al contorno per equazioni lineari di tipo parabolico in n variabili* - Ricerche di Matem. vol. V (1956).

[4] F. GAGLIARDO - *Teoremi di esistenza e di unicità per problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche lineari e quasi lineari in n variabili* - Ricerche di Matem. vol. V (1956).

[5] F. GUGLIELMINO - *Sulle equazioni paraboliche del secondo ordine di tipo non variazionale* - Ann. di Matem. vol. LXV (1964).

[6] F. GUGLIELMINO - *Nuovi contributi allo studio delle equazioni paraboliche del secondo ordine di tipo non variazionale* - Ricerche di Matem. vol. XIV (1965).

[7] A. M. IL'IN, A. S. KALASHNIKOV, O. A. OLEINIK - *Linear equations of the second order of parabolic type* - Russian Mathematical Surveys 17 (1962).

[8] J. L. LIONS - *Équations différentielles opérationelles dans les espaces de Hilbert* - Ciclo di Lezioni su Equaz. diff. astratte (C.I.M.E) 1963.

[9] G. TALENTI - *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coeffiicienti misurabili* - Ann. di Matem. vol. LXIX (1965).

[10] E. ASTESIANO - *Operatori parabolici estremanti* - Boll. U.M.I. n. 3 (1968).

[11] A. FRIEDMANN - *Partial differential equations of parabolic type* - Prentice Hall (1964).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27-4-1968