Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Paul Mustatà

Un théorème sur le système Navier-Stokes linéarisé

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 146-152
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__146_0>

UN THÉORÈME SUR LE SYSTÈME NAVIER-STOKES LINÉARISÉ

PAUL MUSTATÀ *)

Les solutions classiques du système Navier-Stokes linéarisé ont été étudiées depuis longtemps [4], [5]. Il semble toutefois que des analogues des théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur [2], [3], [8] n'ont pas été encore mis en evidence (voir les ouvrages de synthèse [1], [6], [7]). Le but de cette note est d'indiquer un tel analogue. En effet on démontre que si le couple (u, p), $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ est une solution régulière du système

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\Delta u_j - \frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x_j} \\ &\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{où } \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

telle que $\operatorname{div} u(x, 0) = 0$, $\Delta u(x, 0) = 0$ et u satisfait a une condition de limitation d'ordre exponentiel 2, alors

$$\Delta u(x, t) = 0.$$

On montre de même la nécessité d'une telle condition de limitation afin que cette propriété reste valide.

---

*) Indirizzo dell'A.: Istitut de Mathématique Académie de R. S. Roumanie, Bucarest, Roumanie Str. M. Eminescu 47.

Soient $\Omega_T = R_n \times [0, T)$ et $\overset{\circ}{\Omega}_T = R_n \times (0, t)$. On considère le système (1). On dit que le couple (u, p), $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ forme une solution régulière de (1) dans Ω_T si $u_i (i = 1,2, .. n)$ sont des fonctions réelles définies et continues sur Ω_T, p est une fonction réelle définie et continue dans $\overset{\circ}{\Omega}_T$, les dérivées, qui figurent dans (1) existent, sont continues dans $\overset{\circ}{\Omega}_T$ et satisfont au système (1) dans $\overset{\circ}{\Omega}_T$.

Nous convenons de dire que $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$, où les fonctions $u_i (i = 1, 2, \ldots n)$ sont definies dans Ω_T est de classe I_α (α étant un nombre positif) dans Ω_T si à chaque nombre $T' \in (0, T)$ correspond un nombre $K \geq 0$, tel que

$$\int_0^{T'} \int_{R_n} | u_j(\xi, \tau) | \exp(- K | \xi |^\alpha) \, d\xi \, d\tau < \infty \qquad (j = 1,2, \ldots n). \tag{2}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit (u, p) une solution régulière de* (1) *dans Ω_T telle que u est de classe I_2 dans Ω_T. On snppose que les fonctions $u_j(x, 0)$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ sont continûment différentiables de second ordre et satisfont aux relations*

i) $$\Delta u_j(x, 0) = 0 \qquad (j = 1,2, \ldots n)$$

ii) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x, 0) = 0.$$

Alors pour chaque $t \in (0, T)$ on a

$$\Delta u_j(x, t) = 0 \qquad (j = 1,2, \ldots n).$$

Pour chaque $r > 0$, nous désignerons per φ_r une fonction sur R_n indéfiniment différentiable égale à 1 sur $\{x \mid |x| < r\}$, égale à 0 sur $\{x \mid |x| > r + 1\}$ et telle que

$$| \varphi_r | + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} \right| + \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq C \tag{3}$$

où C est une constante indépendante de r.

Si nous désignerons

$$L = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial^2 \xi_j^2} - \frac{\partial}{\partial \tau}, \ L^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

on a

$$v\, L\, w - w\, L\, v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial \tau} (v \cdot w) \tag{4}$$

où

$$Q_j = v \frac{\partial w}{\partial \xi_j} - w \frac{\partial v}{\partial \xi_j}.$$

Soit $(x, t) \in \Omega_T$. Posons dans (4)

$$w(\xi, \tau) = u_j(\xi, \tau), \ v(\xi, \tau) = \varphi_r(x - \xi)\, \Gamma(x - \xi, t - \tau)$$

où pour $x \in R_n, t > 0$ on a

$$\Gamma(x, t) = (4 \pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

et nous intégrons la nuuvelle relation dans le domaine

$$\Delta_\varepsilon = \{(\xi, \tau) \mid |x - \xi| < r + 1, 0 < \tau < t - \varepsilon\}.$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient, tenant compte de la définition de φ_r du fait que Γ est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et du fait que (u, p) satisfait le système (1), que

$$u_j(x, t) = h_j^r(x, t) - g_j^r(x, t) + f_j^r(x, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

où

$$h_j^r(x, t) = \int_0^t \int_{R_n} u_j(\xi, \tau)\, L^* (\Gamma(x - \xi, t - \tau)\, \varphi_r(x - \xi))\, d\xi\, d\tau,$$

$$g_j^r(x, t) = \int_0^t \int_{R_n} \Gamma(x - \xi, t - \tau)\, \varphi_r(x - \xi) \frac{\partial p}{\partial \xi_j}(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

$$f_j^r(x, t) = \int_{R_n} \Gamma(x - \xi, t)\, \varphi_r(x - \xi)\, u_j(\xi, 0)\, d\xi.$$

On a

$$g_j^r(x,t) = -\int_0^t \int_{R_n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\Gamma(x-\xi, t-\tau)\, \varphi_r(x-\xi))\, p(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_{R_n} \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma(x-\xi, t-\tau)\, \varphi_r(x-\xi))\, p(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Si nous posons

$$g^r(x,t) = \int_0^t \int_{R_n} \Gamma(x-\xi, t-\tau)\, \varphi_r(x-\xi)\, p(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

on a comme on sait de la théorie du potentiel de volume que

$$g_j^r(x,t) = \frac{\partial g^r}{\partial x_j}(x,t) \qquad (j = 1, 2, \dots n).$$

On peut vérifier aisément en intégrant par perties que

$$\frac{\partial f_j^r}{\partial x_j}(x,t) = \int_{R_n} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_j}(\xi, 0)\, \varphi_r(x-\xi)\, \Gamma(x-\xi, t-\tau)\, d\xi \qquad (j = 1,2, \dots x)$$

$$\Delta f_j^r(x,t) = 0 \tag{5}$$

et utilisant ii) que

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j^r}{\partial x_j} = 0.$$

Notons que les fonctions h_j^r sont indéfiniment différentiables puisque $L^* \Gamma(x-\xi, t-\tau) = 0$ et $\varphi_r(x-\xi) = 1$ sur $\{\xi \mid |x-\xi| < r\}$.

On a

$$0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(x,t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j^r}{\partial x_j}(x,t) - \Delta g^r(x,t)$$

$$\Delta g^r(x,t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_j^r}{\partial x_j}(x,t).$$

Il résulle de (5) et de la relation précédente que

$$(6) \qquad \Delta u_i(x,t) = \Delta h_i^r(x,t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 h_j^r}{\partial x_i \partial x_j}(x,t) \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Pour $r > 1$, on a, utilisant (3), l'évalution élémentaire

$$\left| \frac{\partial^2 h_j^r}{\partial x_i \partial x_l} \right| = c' \int_0^t \int_{r < |r-\xi| < r+1} |u(\xi,\tau)| \sum_{k=0}^{4} (t-r)^{-\frac{n+k}{2}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi\, d\tau \leq$$

$$\leq \frac{c''}{r^n} \int_t \int_{r < |x-\xi| < r+1} |u(\xi,\tau)| \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{8(t-\tau)}\right) d\xi\, d\tau \; (i, j, l = 1, 2, \dots n).$$

où c', c'' sont des constantes.

Soient $T' \in (0, T), K$ et M des nombres positifs tels que

$$\int_0^{T'} \int_{R_n} |u_j(\xi,\tau)| \exp(-K|\xi|^2)\, d\xi\, d\tau \leq M < \infty \qquad (j = 1,2, \dots n)$$

(l'existence de K et M est assurée puisque u est de classe I_2). Pour chaque $t \in (0, T'), t \leq \delta < \frac{1}{8k}$, on a

$$\left| \frac{\partial^2 h_j^k}{\partial x_i \partial x_l}(x,t) \right| \leq$$

$$\leq \frac{c''}{r^n} \sup_{\xi \in R_n} \exp\left(K|\xi|^2 - \frac{|x-\xi|^2}{8\delta}\right) \int_0^T \int_{R_n} |u(\xi,\tau)| \exp(-K|\xi|^2)\, d\xi\, d\tau \leq$$

$$\leq \frac{c''' M}{r^n} \exp(c_0 |x|^2).$$

Faisant tendre maintenant r vers l'infini dans (6), on obtient pour chaque $t \in (0, T'), t < \frac{1}{8k}$ que

$$\Delta u_j(x,t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots n).$$

En appliquant le même procédé successivement pour les couches $R_n \times \times \left(\frac{k}{16k}, \frac{k+2}{16k}\right)$ $(k = 1, 2 \ldots)$, après un nombre fini de pas on peut établir pour chaque $t \in (0, T')$ la relation

$$\Delta u_j(x, t) = 0.$$

REMARQUES 1. La condition de limitation n'est pas superflue. En effet, on sait que pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut construire une fonction v sur $R \times [0, T)$ telle que

$$v \not\equiv 0, v(x, 0) = 0, \quad v \in I_{2+\varepsilon}(R \times (0, T)),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \qquad \text{dans } R \times (0, T).$$

Evidement v n'est pas de classe I_2 et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \not\equiv 0.$$

Considérons les fonctions u_i: $(i = 1, 2, \ldots n)$ sur $R_n \times [0, T)$

$$u_i(x, t) = v(x_{i+1}, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots n - 1)$$

$$u_n(x, t) = v(x_1, t).$$

On voit tout de suite que le couple (u, p) où $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ et $p = 0$ satisfait au système (1), les conditions i), ii) et que u est de classe $I_{2+\varepsilon}$ dans Ω_T mais $\Delta u_k \not\equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots n)$.

2. Soit $(u, p), u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ où $u_1(x, t) = t, u_j(x, t) = 0$ $(j = 1, 2 \ldots n)$ et $p(x, t) = -x_1$. On a que (u, p) est une solution de (1), $u_j(x, 0) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ et que u est de clase I_2 dans Ω_T. Cet exemple montre que les conditions $u(x, 0) = 0$ et u est de classe I_2 dans Ω_T ne sont pas soffisantes pour assurer l'unicité d'une solution de (1) dans Ω_T.

BIBLIOGRAPHIQUE

[1] LADYZENSKAYA (O. A.): *Problèmes mathematiques de la dynamique des fluides visqueux incompressible.* Moscou, 1961.

[2] LADYZENSKAYA (O. A.): *Sur l'unicité de solutions du problème de Cauchy pour l'équation linéaire parabolique.* Math Sbornik, 1950, **27**, p. 175-184.

[3] NICOLESCU (MIRON) : *Sur l'équation de la chaleur.* Commentarii Helv. 1937, **10** p. 3-17.

[4] ODQVIST (F. K. G.): *Uber die Randwerten aufgaben der Hydrodynamik zäher Fluissigkeiten.* Math. Zeitschr, 1930, **32**, p. 329-385.

[5] OSENN (C. W) : *Neucre Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik.* Leipzig, 1927.

[6] PRODI (G) : *Résultats récents et problémes anciens dans la théorie des équations de Navier Stokes. Les équations aux dérivées partielles* (Coll. Intern. C. N. R. S., No. 117 Paris 1963), p. 181-196.

[7] SERRIN (J) : *The initial value problem fer the Navier-Stokes eq., Non linear problems* (Proc. Symp. Univ. Wisconsin 1962, p. 69-98.

[8] TIHONOV (A. N.) : *Théoremes d'unicité pour l'équation de la chaleur,* Math. Sbornik 1935 **42**, p. 199-216.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5-2-68