RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE DE MARCO

Una disuguaglianza sulle sezioni di insiemi H^k-rettificabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 402-407

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__402_0>

UNA DISUGUAGLIANZA SULLE SEZIONI DI INSIEMI H^k-RETTIFICABILI

GIUSEPPE DE MARCO *)

Se C è una curva piana continua semplice rettificabile, e $v_1(t, C)$ $[v_2(t, C)]$ denota il numero, eventualmente infinito, dei punti $(x_1, x_2) \in C$ tali che $x_1 = t\,[x_2 = t]$, Banach (vedere [B]) dimostra che $v_1(t, C)$ e $v_2(t, C)$ sono integrabili e che risulta

$$\max\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t, C)\, dt\,;\int_{-\infty}^{+\infty} v_2(t, C)\, dt\right\} \leq l(C).$$

dove $l(C)$ è la lunghezza della curva; e risulta anche subito che

$$l(C) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t, C)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(t, C) dt.$$

In questo lavoro estendiamo queste disuguaglianze a classi di insiemi più generali, negli spazi euclidei R^n.

1. Saranno seguite, in linea di massima, le notazioni di Federer, [F 3]. Siano n, k, s interi, $1 \leq s \leq k \leq n$; sia H^k *la misura k-dimen-*

---

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata, Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei raggruppamenti di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

sionale di Hausdorff in R^n; per ogni numero naturale m, indichiamo con I_m l'insieme $\{1, \dots, m\}$ e se $1 \leq s \leq m$, indichiamo con $\Lambda(s, m)$ l'insieme delle applicazioni strettamente crescenti di I_s in I_m; se $\lambda \in \Lambda(s, n)$ sia R^λ lo spazio generato dai vettori $\{e_{\lambda(i)} : i \in I_s\}$, dove $(e_1, \dots, e_n)$ è la base canonica di R^n; p_λ sia la proiezione ortogonale di R^n su R^λ.

Un insieme $E \subset R^n$ si dice *H^k-rettificabile* se esiste una funzione lipschitziana $f : R^k \to R^n$ tale che $H^k(E - f(R^n)) = 0$.

Se E è H^k-misurabile, e di misura H^k σ-finita, la funzione $v_\lambda(t, E)$ definita su R^λ dalla formula $v_\lambda(t, E) = H^{k-s}(E \cap p_\lambda^{-1}\{t\})$ è H^s-misurabile (vedere [F 3], Theorem 3.1, part 2).

Dimostreremo che:

Se E è H^k-misurabile e H^k-rettificabile risulta:

$$\int_{R^\lambda} v_\lambda(t, E)\, dt \leq H^k(E) \quad \text{per ogni} \quad \lambda \in \Lambda(s, n) \tag{1}$$

$$\binom{k}{s} H^k(E) \leq \sum_{\lambda \in \Lambda(s, n)} \int_{R^\lambda} v_\lambda(t, E)\, dt. \tag{2}$$

Per la (1), cfr. [F 2], 3. Questo autore considera il caso di E insieme arbitrario, ma a secondo membro compare allora un coefficiente maggiore di 1.

Ci serviremo del seguente risultato di Federer, [F3], Theorem 3.1:

Siano X, Y *varietà di classe* C^1; sia $\dim X = k \geq s = \dim Y$ *se* $f : X \to Y$ *è lipschitziana, per ogni insieme* H^k *misurabile* $A \subset X$ *si ha*:

$$\int_A Jf(x)\, dH^k x = \int_Y H^{k-s}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dH^s y$$

dove $Jf(x)$ è la norma della trasformazione lineare indotta da $Df(x)$ tra $\wedge_s E$ e $\wedge_s F$, essendo E ed F gli spazi direttori delle varietà lineari tangenti a X e Y nei punti x e $f(x)$, rispettivamente.

La funzione $Jf(x)$ è definita in tutti i punti in cui $Df(x)$ esiste, e cioè H^k-quasi ovunque in X, per teoremi noti sulle funzioni lipschitziane.

Prendendo in E e in F basi ortonormali, $Jf(x)$ è la radice quadrata della somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine s della matrice di $Df(x)$ rispetto a queste basi.

Sia $\lambda \in \Lambda(s, n)$; applichiamo questo teorema al caso di $X \subset R^n$, $Y = R^\lambda$, $f = p_\lambda \mid X = \varphi_\lambda$; si ha, in base alla definizione di $v_\lambda(t, A)$

$$\int_{R^\lambda} v_\lambda(t, A)\, dt = \int_{R^\lambda} v_\lambda(t, A)\, dH^s t = \int_A J\varphi_\lambda(x)\, dH^k x.$$

Dimostriamo che per ogni $x \in X$ valgono le relazioni:

$$J\varphi_\lambda(x) \leq 1 \tag{3}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda(s, n)} J\varphi_\lambda(x) \geq \binom{k}{s}. \tag{4}$$

Sia T lo spazio direttore della varietà lineare $x + T$ tangente ad X nel punto x, sia $(u_1, \dots, u_k)$ una base ortonormale per T, completata da $(u_{k+1}, \dots, u_n)$ a base ortonormale di R^n.

Sia

$$u_j = \sum_{1 \leq i \leq n} e_i \alpha_i^j \qquad 1 \leq j \leq n$$

la matrice $A = (\alpha_i^j)_{1 \leq i,\, j \leq n}$ è ortogonale e la matrice di $D\varphi_\lambda(x) = p_\lambda \mid T$ rispetto alle basi $(u_1, \dots, u_k)$ per T e $(e_{\lambda(1)}, \dots, e_{\lambda(s)})$ per R^λ è

$$(\alpha_{\lambda(i)}^j)_{1 \leq i \leq s,\, 1 \leq j \leq k}.$$

Se $\mu \in \Lambda(s, n)$, si ponga $A_\lambda^\mu = (\alpha_{\lambda(i)}^{\mu(j)})_{1 \leq i,\, j \leq s}$; allora

$$[J\varphi_\lambda(x)]^2 = \sum_{\mu \in \Lambda(s, k)} (\det A_\lambda^\mu)^2 \leq \sum_{\mu \in \Lambda(s, n)} (\det A_\lambda^\mu)^2. \tag{5}$$

Ora, per il teorema di Binet:

$$\sum_{\mu \in \Lambda(s, n)} (\det A_\lambda^\mu)^2 = \det(A_\lambda\, {}^t A_\lambda)$$

essendo $A_\lambda = (\alpha_{\lambda(i)}^{j})_{1 \leq i \leq s,\, 1 \leq j \leq n}$, ${}^{t}A_\lambda$ la trasposta di A_λ; per l'ortogonalità di A, $A_\lambda\, {}^{t}A_\lambda$ è la matrice unità di ordine s, quindi l'ultimo termine in (5) è uguale a 1.

La (3) è dimostrata; si ha allora $[J\varphi_\lambda(x)]^2 \leq J\varphi_\lambda(x)$ e da ciò

$$\sum_{\lambda \in \Lambda(s,n)} J\varphi_\lambda(x) \geq \sum_{\lambda \in \Lambda(s,n)} [J\varphi_\lambda(x)]^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(s,n)} \sum_{\mu \in \Lambda(s,k)} (\det A_\lambda^\mu)^2 =$$

$$= \sum_{\mu \in \Lambda(s,k)} \sum_{\lambda \in \Lambda(s,n)} (\det A_\lambda^\mu)^2 = \sum_{\mu \in \Lambda(s,k)} \det({}^{t}A^\mu A^\mu) = \binom{k}{s}$$

sfruttando nuovamente il teorema di Binet, l'ortogonalità della matrice A, avendo posto $A^\mu = (\alpha_i^{\mu(j)})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq s}$ e osservando che $\Lambda(s,k)$ ha $\binom{k}{s}$ elementi.

Quindi (1) e (2) seguono subito da (3) e (4), nel caso che l'insieme H^k-misurabile E sia contenuto in una varietà di classe C^1.

Se E è H^k-rettificabile, esiste una successione $(X_i)_{i \in N}$ (N insieme dei naturali) di varietà di classe C^1 e un insieme M di misura H^k-nulla tali che:

$$E \subset \bigcup_{i \in N} X_i \cup M.$$

Posto:

$$A_i = E \cap (X_i - \bigcup_{0 \leq j < i} X_j); \qquad B = E \cap M$$

si ha:

$$E = \bigcup_{i \in N} A_i \cup B$$

dove gli A_i sono a due a due disgiunti, sono contenuti in una varietà C^1 sono H^k-misurabili se tale è E, e $H^k(B) = 0$.

Ciascuno degli A_i verifica quindi (1) e (2), e sommando rispetto a $i \in N$ le disuguaglianze così ottenute, e ricordando che, in base a [F 2], n. 3 si ha:

$$\int_{R^\lambda} v_\lambda(t, B)\, dt = 0 \text{ per ogni } \qquad \lambda \in \Lambda(s,n)$$

si giunge al risultato voluto.

2. Si osservi che se E è contenuto in una varietà lineare k-dimensionale parallela a un sottospazio coordinato k-dimensionale $R^{\varkappa}$, $\varkappa \in \Lambda(k, n)$ allora nella (1) vale il segno di uguaglianza per tutti e soli i $\lambda \in \Lambda(s, n)$ tali che $\lambda(I_s) \subset \varkappa(I_k)$; infatti in tal caso $J(p_\lambda | R^{\varkappa})(x) = 1$ per ogni $x \in R^{\varkappa}$ e il teorema precedentemente enunciato si riduce al teorema di Fubini; per tutti i $\lambda \in \Lambda(s, n)$ per cui $\lambda(I_s) \not\subset \varkappa(I_k)$ il primo membro di (1) vale zero; quindi anche nella (2) vale il segno di uguaglianza.

Se si esce dalla classe degli insiemi H^k-rettificabili la (2) in generale non è più valida.

Si ponga per ogni $A \subset R^n$, $x \in R^n$:

$$\overline{\theta}^k(H^k, A, x) = \max \lim_{r \to 0^+} \frac{H^k(A \cap \{y \in R^n : |y - x| < r\})}{\alpha(k)\, r^k}$$

dove $\alpha(k)$ è la misura di Lebesgue in R^k dell'insieme $\{z : z \in R^k, |z| < 1\}$.

Sia poi G_n il gruppo delle isometrie lineari di R^n, Φ_n la misura di Haar su G_n tale che $\Phi_n(G_n) = 1$.

Si dimostra in [F 1], 9.6, che ogni $A \subset R^n$ che sia H^k-misurabile e tale che $H^k(A) < \infty$, si decompone nella riunione di tre insiemi misurabili e disgiunti, A_1, A_2, A_3, dei quali A_1 è H^k-rettificabile, A_3 è tale che per ogni $x \in A_3$ si ha $\overline{\theta}^k(H^k, A, x) = 0$ oppure $\overline{\theta}^k(H^k, A, x) = \infty$, mentre A_2 non contiene sottoinsiemi H^k-rettificabili di misura positiva, ed è tale che

$$H^k(p_k \circ u(A_2)) = 0 \text{ per } \Phi_n\text{-quasi ogni } u \in G_n$$

p_k indicando la proiezione ortogonale di R^n sul sottospazio generato da $\{e_1, \dots, e_k\}$.

Esisterà quindi una isometria $w \in G_n$ tale che

$$H^k(p_\lambda \circ w(A_2)) = 0 \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda(k, n)$$

perciò, nei casi in cui $H^k(A_2) > 0, k = s$, la (2) non è valida per l'insieme A_2.

BIBLIOGRAFIA

S. BANACH

[B] *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie.* Fund. Math. vol. VII (1925), pp. 225-236.

H. A. FEDERER

[F 1] *The* (Φ, k)*-rectifiable subsets of* n*-space.* Trans. Amer. Math. Soc. vol. 62 (1947), pp. 114-192.

[F 2] *Some Integralgeometric Theorems.* Trans. Amer. Math. Soc. vol. 77 (1954), pp. 238-261.

[F 3] *Curvature measures.* Trans. Amer. Math. Soc. vol. 93 (1959), pp. 418-491.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 dicembre 1967