RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUCIANO DE SIMON
GIOVANNI TORELLI

Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 380-401
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__380_0>

SOLUZIONI PERIODICHE DI EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI DI TIPO IPERBOLICO NON LINEARI

LUCIANO de SIMON E GIOVANNI TORELLI *)

Introduzione.

Detta S la striscia del piano $\{(x, t) : 0 \leq x \leq \pi, -\infty < t < +\infty\}$ ed assegnata una funzione $f(x, t, u)$, periodica rispetto a t con periodo 2π, si consideri in S il problema:

$$(0.1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon f(x, t, u) = 0 & (0.1') \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & (0.1''). \end{cases}$$

Si cercano le soluzioni $u(x, t)$ [1], periodiche di periodo 2π rispetto a t. Qui ε è un parametro reale variabile in un intorno dello zero. È da notare che per $\varepsilon = 0$ il problema ammette infinite soluzioni. Se esiste un intorno U dello zero tale che per ogni ε appartenente ad U il problema (0,1) ha soluzione, diremo, per abbreviare il discorso, che il problema ha soluzione per ε « piccolo ».

Intorno a questo argomento è stato di recente pubblicato da P. H. Rabinowitz un lavoro assai elaborato e fine [2], nel quale si

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del raggruppamento di ricerca n^0 24 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. Al primo dei due autori sono dovuti prevalentemente i risultati dei §§ 2 e 4, nonchè il lemma 3.1; al secondo, i risultati del § 1 e il teorema III del § 3.

Indirizzo degli A.A.: Istituto di Matematica dell'Università di Trieste.

[1]) Soluzioni in senso « generalizzato », come verrà precisato.

[2]) P. H. RABINOWITZ: *Periodic solutions of non linear hyperbolic partial differential equations*. Communications on pure and applied mathematics (Vol. XX, n^0 1 — feb. 1967, 145-805).

dimostra l'esistenza di una soluzione del problema (0.1) per ε « piccolo », nell'ipotesi che f sia sufficientemente regolare e che sia $f_u \geq h > 0$, (h costante).

Nel presente lavoro riprendiamo la ricerca di Rabinowitz, inquadrandola in uno schema più generale.

Dimostriamo, nel § 1, un teorema astratto (teorema I) in spazi di Banach. Nei §§ 2 e 3, assumendo in vari modi lo spazio in cui è ambientato il problema (0.1), otteniamo, come applicazione del teorema I, vari teoremi di esistenza ed unicità. Il procedimento seguito si presenta più semplice di quello di Rabinowitz e permette una certa attenuazione delle ipotesi; ciò appare soprattutto evidente nel § 3, dove si consegue l'esistenza di una soluzione generalizzata continua, supponendo soltanto f continua e dotata di derivata continua rispetto ad u.

Infine, nel § 4, sempre per mezzo del teorema astratto, otteniamo un'estensione del risultato al caso di due variabili spaziali appartenenti ad un rettangolo, i cui lati soddisfano ad opportune condizioni.

Gli A.A. manifestano la loro gratitudine al Prof. G. Prodi per i consigli e l'incoraggiamento ricevuti.

1. Un teorema di esistenza e unicità di tipo astratto.

Esponiamo alcune notazioni e convenzioni, quindi passiamo a formulare il nostro problema in forma astratta.

Sia A uno spazio di Banach (reale o complesso), somma diretta di due varietà chiuse B e C: $A = B \oplus C$. Siano p_1 e p_2 i due proiettori su B e C rispettivamente.

Sia $C' \subset C$ algebricamente e topologicamente.

Si consideri lo spazio $A' = B \oplus C'$ (con la topologia prodotto) e sia $\alpha : A' \longrightarrow A$ un'applicazione *lineare* continua, tale che $\alpha(B) = 0$, $\alpha(C') = C$, α induca inoltre un isomorfismo di C' in C e la restrizione di α a C' ammetta come inverso γ, operatore lineare continuo di C in C'.

Sia β un operatore continuo (*generalmente non lineare*), definito su A, lipschitziano su ogni insieme limitato di A.

Si consideri l'equazione:

$$(1.1) \qquad (\alpha + \varepsilon\beta)(u) = 0 \qquad \text{con } \varepsilon \text{ parametro reale}$$

nell'incognita u appartenente ad A. Tale equazione, mediante proiezione su B e C rispettivamente, dà luogo al sistema equivalente:

$$(1.2) \qquad \begin{cases} p_1\,\beta\,(v+w)=0 & (1.2') \\ \alpha\,(w)+\varepsilon p_2\,\beta\,(v+w)=0 & (1.2'') \end{cases}$$

con $v=p_1\,u$, $w=p_2\,u$.

Teorema I. Con le notazioni ed ipotesi ora introdotte, si supponga, in più, che la (1.2′) ammetta, per ogni w appartenente a C, un'unica soluzione $v=\vartheta\,(w)$ e che questa dipenda in modo lipschitziano da w, al variare di w su ogni insieme limitato; allora per ogni sfera Σ_r di C con centro nell'origine e raggio $r>0$, la (1.2) ammette una ed una sola soluzione in $B\times\Sigma_r$, per ε non nullo e «piccolo» (in dipendenza da r).

Dimostrazione: Applicando l'operatore γ alla (1.2″), otteniamo l'equazione:

$$w=-\,\varepsilon\gamma\,p_2\,\beta\,(v+w)=-\,\varepsilon\gamma\,p_2\,\beta\,(\vartheta\,(w)+w)$$

che è del tipo:

(1.3) $w=\varepsilon T\,(w)$ essendo T l'operatore $w\longrightarrow-\,\gamma p_2\,\beta\,(\vartheta\,(w)+w)$.

Osservando che un'applicazione lipschitziana su ogni insieme limitato, porta insiemi limitati in insiemi limitati ed osservando che la composizione di due applicazioni lipschitziane su insiemi limitati è ancora un'applicazione lipschitziana su insiemi limitati, si ha subito che la T gode di tale proprietà. Allora presa in C la sfera Σ_r, essa verrà trasformata in un sottoinsieme di una sfera di raggio $\varrho\,(r)$ [3]) e, inoltre, T avrà in Σ_r una costante di Lipschitz L_r. Dunque, basta prendere $\varepsilon\leq r/\varrho\,(r)$, $\varepsilon<1/L_r$, perchè εT sia una contrazione in Σ_r. Ciò basta per poter concludere che la (1.3) ammette un'unica soluzione w. Pertanto l'equazione (1.1) ammette $w+\vartheta\,(w)$ come unica soluzione in $B\times\Sigma_r$.

---

[3]) $\varrho\,(r)$ è un'opportuna funzione positiva crescente.

OSSERVAZIONE. Se, nel nostro enunciato, supponiamo β lipschitziana in tutto A e ϑ lipschitziana in tutto C, allora l'operatore T è lipschitziano su tutto C. In questo caso, per $|\varepsilon| > 0$ e « piccolo », risulta garantita l'unicità della soluzione *in tutto* A.

2. Soluzioni periodiche generalizzate a quadrato sommabile.

Nel presente paragrafo e nel seguente daremo alcune applicazioni del teorema I allo studio dell'esistenza di soluzioni periodiche del problema (0.1).

Tutte le soluzioni che considereremo saranno di un tipo generalizzato che ora preciseremo. Prima però, occorre introdurre alcune notazioni.

Precisamente, indicheremo con:

R la retta reale

I il rettangolo $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$

S la striscia $[0, \pi] \times R$

A lo spazio di Hilbert delle funzioni $u(x, t)$, reali, definite in S, 2π-periodiche in t, di quadrato sommabile su I, con la norma usuale: $|u| = \left\{ \iint_I u^2(x, t)\, dx\, dt \right\}^{1/2}$

$\mathcal{C}^k(S)$ lo spazio delle funzioni definite in S, continue con le loro derivate fino all'ordine k e periodiche, rispetto a t, con periodo 2π, con la norma usuale. Scriveremo $\mathcal{C}(S)$ per $\mathcal{C}^0(S)$.

DEFINIZIONE. Diremo soluzione periodica *generalizzata* del problema

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \Box\, u = g & \qquad g \in A \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0\,, \end{cases}$$

una funzione $u \in A$, tale che si abbia per ogni $\varphi \in \mathcal{C}^2(S)$ e nulla sulla frontiera di S:

$$\text{(2.2)} \qquad \iint_I g \cdot \varphi\, dx\, dt = \iint_I u \,\Box\, \varphi\, dx\, dt.$$

Notiamo che la relazione integrale (2.2) include la condizione di annullamento sulla frontiera di S (condizione che, pertanto, viene ad essere anch'essa intesa in senso generalizzato). Non è difficile verificare che una funzione $u \in \mathcal{C}^2(S)$ che soddisfi alla (2.2) è nulla per $x = 0$ ed $x = \pi$; occorre tener presente che le derivate rispetto ad x delle funzioni-test φ possono assumere sulla frontiera di S valori arbitrari (purchè, ovviamente, di classe $\mathcal{C}^1$ e 2π-periodici).

È importante la caratterizzazione delle soluzioni generalizzate fornita dal seguente lemma; per comodità di calcolo, nella sua enunciazione e dimostrazione supporremo che A sia lo spazio delle funzioni a *valori complessi* periodiche di periodo 2π e a quadrato sommabile in I. La conservazione delle notazioni precedenti non porta alcun inconveniente.

Lemma (2.3). Le soluzioni generalizzate del problema (2.1) sono tutte e sole le funzioni $u \in A$ che, rappresentate in serie di Fourier rispetto al sistema ortogonale $\{\text{sen}\, mx\, e^{int}\}$ $(m = 1, 2, \ldots;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ verificano formalmente la relazione $\square u = g$. (Diremo queste ultime *soluzioni formali*).

Dimostrazione. Per mostrare che le soluzioni generalizzate sono soluzioni formali basta introdurre nella (2.2) le funzioni $\varphi = \text{sen}\, mx\, e^{int}$ $(m = 1, 2, \ldots;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; posto $g(x, t) = \sum_{m,n} g_{mn}\, \text{sen}\, mx\, e^{int}$, $u(x, t) = \sum_{m,n} u_{mn}\, \text{sen}\, mx\, e^{int}$, si ottengono subito le relazioni $(m^2 - n^2)\, u_{mn} = g_{mn}$.

Per mostrare che una soluzione formale è una soluzione generalizzata, basta sostituire una soluzione formale u nella (2.1) e svolgere semplici calcoli.

Proseguiamo ora con l'introduzione di altre notazioni:

B — la varietà di A costituita dalle soluzioni generalizzate del problema (2.1) con $g = 0$. La (2.2) mostra che B è chiusa.

$C = B^{\perp}$ — varietà ortogonale a B; mediante il lemma (2.3) si riconosce subito che il problema (2.1) ha soluzione (generalizzata) se e solo se $g \in C$. Tale soluzione è unica se la si prende in C, essendo appunto C ortogonale alla varietà B delle soluzioni proprie.

C' il sottospazio di C costituito dalle soluzioni del problema (2.1) (naturalmente con $g \in C$). Introdurremo in C' la norma:

$$\| u \|_{C'}^2 = \iint_I | \square u |^2 \, dx \, dt$$

dove l'operatore $\square$ è sempre da intendersi nel senso generalizzato detto sopra. Si riconosce facilmente che C' è completo.

A' lo spazio somma diretta di B e C', dotato della topologia del prodotto.

p_1 e p_2 i proiettori ortogonali di A su B e C rispettivamente.

Aggiungiamo ora alcune osservazioni, che saranno particolarmente utili nel prossimo paragrafo. Il lemma (2.3) permette di caratterizzare le varietà B e C mediante i coefficienti di Fourier, rispetto al sistema $\{\text{sen}\, mx\, e^{int}\}$. Si riconosce facilmente che B è la varietà degli elementi di A che hanno nulli tutti i coefficienti di Fourier per $m \neq n$, mentre C è la varietà degli elementi di A che hanno nulli i coefficienti di Fourier per $m = n$.

Si ottiene anche, con semplici calcoli, questa ulteriore caratterizzazione:

gli elementi di B sono tutte e sole le funzioni u rappresentabili nella forma:

$$u(x, t) = \varphi(t + x) - \varphi(t - x) \tag{2.4}$$

essendo φ funzione periodica con periodo 2π, a quadrato sommabile in $[0, 2\pi]$.

Vediamo ora con quale grado di arbitrarietà per φ vale la rappresentazione (2.4): è evidente che φ può essere modificata con una costante additiva, senza che venga meno la relazione (2.4). Possiamo allora imporre a φ di avere valor medio nullo. Dimostreremo che, con questa condizione, φ risulta univocamente determinata da u.

Indichiamo con P lo spazio delle funzioni reali, definite in R, 2π-periodiche, a valor medio nullo, e a quadrato sommabile in $[0, \pi]$, munito della norma:

$$\| \varphi \|^2 = \int_0^{2\pi} \varphi^2 (t)\, dt.$$

Consideriamo ora l'applicazione lineare $K : A \longrightarrow P$ così definita:

$$u(x, t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [u(x, s - x) - u(x, s + x)]\, dx = \varphi(s). \tag{2.5}$$

Si verifica subito, che se u appartiene a B ed è espresso mediante la (2.4), allora $K(u) = \varphi$. Quindi φ è unicamente determinata da $u \in B$.

Dunque K subordina tra B e P un isomorfismo $\overline{K}$ (che è isometrico a meno di un fattore di proporzionalità); $\overline{K}^{-1}$ è l'applicazione definita dal secondo membro della (2.4).

Di conseguenza, $\overline{K}^{-1} K$ dà la proiezione (ortogonale) di A su B:

$$p_1 = \overline{K}^{-1} \overline{K}. \tag{2.6}$$

Ciò posto, siamo in grado di enunciare il teorema:

Teorema II. Se la funzione f, che compare nel problema (0.1) verifica le seguenti ipotesi:

(i) $f(x, t, u)$ è misurabile, rispetto alle variabili x e t, per ogni valore di u ed $f(x, t, 0)$ è funzione a quadrato sommabile su I.

(ii) il rapporto incrementale di f rispetto ad u si mantiene compreso fra due costanti positive H e h, indipendenti da x, t, u:

$$0 < h \leq \frac{f(x, t, u'') - f(x, t, u')}{u'' - u'} \leq H$$

allora il problema (0.1) ammette, per ε non nullo e «piccolo», una unica soluzione generalizzata $u(x, t) \in A$.

Dimostrazione. Anzitutto si riconosce che, nelle ipotesi ammesse, per ogni $u(x, t) \in A$ anche la funzione composta $f(x, t, u(x, t))$ è in A [4]).

---

[4]) Si può, ad esempio, approssimare u in A mediante funzioni misurabili assumenti solo un numero finito di valori.

Da quanto abbiamo premesso, risulta che $\alpha = \square$ è un isomorfismo (algebrico e topologico) di C' su C. Poniamo:

$$\gamma = \alpha^{-1} \quad \text{e ancora:} \quad \beta(u)(x, t) = f(x, t, u(x, t)) \qquad u(x, t) \in A.$$

Chiaramente β è un operatore continuo e lipschitziano di A in sè.

Gli spazi A, B, C, C', le applicazioni p_1, p_2 e gli operatori α, β, γ possono avere i significati indicati dal teorema I; resta pertanto da verificare che è soddisfatta l'ipotesi principale di quel teorema, cioè che l'equazione in v:

$$p_1 \beta(v + w) = 0$$

ammette, per ogni $w \in C$, un'unica soluzione $v = \vartheta(w)$, dipendente in modo lipschitziano da w.

Introduciamo l'operatore $S_w : u \longrightarrow S_w u = p_1 \beta(u + w) \qquad u \in B$. Tenendo conto che p_1 è autoaggiunto e sfruttando l'ipotesi (ii), si trova:

$$(S_w u'' - S_w u',\ u'' - u') = (\beta(u'' + w) - \beta(u' + w),\ u'' - u') =$$

$$= \iint_I \{ f(x, t, u''(x, t) + w(x, t)) - f(x, t, u'(x, t) + w(x, t)) \} \cdot$$

$$\cdot [u''(x, t) - u'(x, t)]\, dx\, dt \geq$$

$$\geq \iint_I h \cdot [u''(x, t) - u'(x, t)]^2\, dx\, dt = h \, \| u'' - u' \|^2.$$

Allora, per un noto teorema di G. Minty sugli operatori monotoni in spazi di Hilbert [5]), S_w ammette inverso S_w^{-1}. Ciò prova che l'equazione:

$$p_1 \beta(v + w) = 0$$

ammette per ogni $w \in C$, una ed una sola soluzione $v = \vartheta(w)$ appartenente allo spazio B.

---

[5]) G. J. Minty: *Monotone (non linear) operators in Hilbert Space.* Duke Math. J., 29, 341-346 (1962).

Facciamo ora vedere che v dipende in modo lipschitziano da w. Considerati due punti distinti $w', w'' \in C$ e posto $v' = \vartheta(w')$, $v'' = \vartheta(w'')$, risulta:

$$p_1 \beta(v'' + w'') = p_1 \beta(v' + w') = 0$$

e quindi:

$$\begin{aligned} 0 &= (p_1 \beta(v'' + w'') - p_1 \beta(v' + w'), \; v'' - v') = \\ &= (\beta(v'' + w'') - \beta(v' + w''), \; v'' - v') + \\ &\quad + (\beta(v' + w'') - \beta(v' + w'), \; v'' - v') \end{aligned}$$

e per la (ii):

$$\begin{aligned} h \, \| v'' - v' \|^2 &\leq |(\beta(v'' + w'') - \beta(v' + w''), \; v'' - v')| = \\ &= |(\beta(v' + w'') - \beta(v' + w'), \; v'' - v')| \leq \\ &\leq H \, \| v'' - v' \| \, \| w'' - w' \| \end{aligned}$$

da cui:

$$\| v'' - v' \| \leq \frac{H}{h} \| w'' - w' \| .$$

Abbiamo così verificato che sono soddisfatte le ipotesi che permettono di applicare al problema considerato il teorema I: la dimostrazione del teorema II risulta così completa.

3. Soluzioni periodiche continue.

Nel presente paragrafo si esamina la questione relativa all'esistenza di soluzioni continue del problema (0. 1), quando si assuma continuo il « dato » $f(x, t, u)$. È naturale trattare questo caso sostituendo gli spazi introdotti nel paragrafo precedente con analoghi spazi costituiti da funzioni continue. Tali spazi e le relative notazioni, scelte in modo da rendere più evidente l'analogia, sono:

$\widetilde{A} = \mathcal{C}(S)$ lo spazio delle funzioni $u(x, t)$ reali definite in S, periodiche in t con periodo 2π e continue; è un sottospazio dello spazio A, considerato nel § 2. In $\widetilde{A}$ introdurremo l'ordinaria norma lagrangiana, che indicheremo con $\| \ \|$.

$\widetilde{B} = B \cap \mathcal{C}(S)$

$\widetilde{C} = C \cap \mathcal{C}(S)$.

Dalle (2.6), (2.4), (2.5) risulta che p_1 è un operatore continuo in $\widetilde{A}$; perciò $p_1(\widetilde{A}) \subset B \cap \mathcal{C}(S) = \widetilde{B}$; d'altra parte, essendo $\widetilde{B} \subset B$, p_1 è l'identità su $\widetilde{B}$. Analogamente, p_2 è un proiettore continuo di $\widetilde{A}$ su $\widetilde{C}$.

Notiamo che gli elementi $u \in \widetilde{B}$, che sono soluzioni generalizzate del problema (2.1), si annullano *in senso ordinario* sulla frontiera di S. Infatti, se $u \in \widetilde{B} \subset B$, vale la rappresentazione (2.4) dove, essendo u continua, φ risulta continua in base alla (2.5).

Proseguendo, poniamo

$\widetilde{C}' = \gamma(\widetilde{C})$. In altre parole, $\widetilde{C}'$ è il sottospazio di C' formato da tutte le soluzioni in senso generalizzato del problema (2.1) con secondo membro in $\widetilde{C}$. Introdurremo in $\widetilde{C}'$ la norma $\| u \|_{\widetilde{C}'} = \| \square u \|$. Come è facile verificare, con questa norma $\widetilde{C}'$ è completo.

Il seguente lemma stabilisce importanti proprietà dello spazio $\widetilde{C}'$:

LEMMA (3.1). Ogni $u \in \widetilde{C}'$ è continua e si annulla sulla frontiera di S. Lo spazio $\widetilde{C}'$ è incluso in $\widetilde{C}$ con norma più fine.

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che u sia soluzione del problema (2.1), con secondo membro $g \in \widetilde{C}$, si traduce, in base al lemma (2.3), nel fatto che u è una soluzione formale del problema $\square u = g$, ottenuta mediante rappresentazione in serie rispetto al sistema ortogonale $\{\text{sen}\, mx\, e^{int}\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Conviene ora utilizzare il sistema ortogonale $\{e^{i(mx+nt)}\}$, $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Si ha allora, posto

$$g(x, t) = \sum_{m^2 \neq n^2} g'_{mn}\, e^{i(mx+nt)}, \qquad \text{dove è} \qquad g'_{-mn} = - g'_{mn}$$

ed è $\sum_{m^2 \neq n^2} |g'_{mn}|^2 < \infty$:

$$u(x, t) = \sum_{m^2 \neq n^2} \frac{g'_{mn}}{m^2 - n^2} e^{i(mx+nt)} .$$

Da questa espressione risulta

$$4\pi^2 u = H * g \tag{3.2}$$

dove il segno $*$ indica il prodotto di convoluzione nel toro $T^2 = (R/\mathrm{mod}\, 2\pi)^2$ ed H è la funzione

$$H(x, t) = \sum_{m^2 \neq n^2} \frac{e^{i(mx+nt)}}{m^2 - n^2} .$$

Questa funzione è a quadrato sommabile, essendo $\sum_{m^2 \neq n^2} \frac{1}{(m^2 - n^2)^2} < +\infty$ ed è quindi sommabile. Poichè g è continua, da ben note proprietà del prodotto di convoluzione, si può dedurre che u è continua.

Si ha poi:

$$\| u \| \leq \frac{1}{4\pi^2} \| H \|_{L_1} \| g \| . \tag{3.3}$$

Consideriamo infatti la funzione

$$H_r(x, t) = \sum_{\substack{m^2 \neq n^2 \\ m^2+n^2 \leq r^2}} \frac{e^{i(mx+nt)}}{m^2 - n^2}$$

e poniamo

$$u_r(x, t) = \sum_{\substack{m^2 \neq n^2 \\ m^2+n^2 \leq r^2}} \frac{g'_{mn}}{m^2 - n^2} e^{i(mx+nt)} .$$

Si ha, evidentemente, $4\pi^2 u_r = H_r * g$, da cui utilizzando le (3.2) e la (3.3):

$$\| u - u_r \| \leq \frac{1}{4\pi^2} \| H - H_r \|_{L_1} \| g \| .$$

Dal momento che è $\lim\limits_{r \to \infty} H_r = H$ in L^2, e quindi anche in L^1, la convergenza uniforme di u_r ad u risulta provata. Di qui, la continuità di u. È evidente poi che u si annulla per $x = 0$ ed $x = \pi$.

La (3.3) prova che $\widetilde{C}'$ è incluso in $\widetilde{C}$ con topologia più fine.

Per quanto riguarda $f(x, t, u)$ supporremo che:

(j) f sia definita in $S \times R$, sia ivi continua e 2π-periodica in t.

(jj) f ammetta derivata parziale rispetto ad u continua e sia $f_u \geq h > 0$ in ogni punto.

Possiamo ora enunciare il risultato principale di questo paragrafo:

TEOREMA III. Valendo per f le ipotesi (j), (jj), per ogni $\varepsilon \neq 0$ « piccolo », il problema (0.1) ammette almeno una soluzione generalizzata periodica di periodo 2π. Tale soluzione è unica, sempre per ε abbastanza piccolo, negli insiemi del tipo: $B \times \Sigma_r$ (essendo Σ_r una sfera dello spazio $\widetilde{C}$, con centro nell'origine e raggio $r > 0$).

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\widetilde{\alpha}$ l'operatore $\Box$ ristretto a $\widetilde{C}'$, con $\widetilde{\beta}$ l'operatore β (cfr. § 2) ristretto ad $\widetilde{A}$, cioè l'operatore $\widetilde{\beta}$ tale che $\widetilde{\beta}(u)(x, t) = f(x, t, u(x, t))$. Si verifica subito che gli spazi $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$, con i proiettori p_1 e p_2, e gli operatori $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ soddisfano alle condizioni preliminari volute dal teorema I. Notiamo che, in virtù della esistenza della derivata f_u e della sua continuità, $\widetilde{\beta}$ è lipschitziano su ogni insieme limitato di $\widetilde{A}$.

Resta dunque da verificare soltanto che l'equazione

$$p_1 \widetilde{\beta}(v + w) = 0 \tag{3.4}$$

ammette, per ogni $w \in \widetilde{C}$, una ed una sola soluzione $v = \vartheta(w) \in \widetilde{B}$ e che ϑ è un'applicazione lipschitziana in ogni insieme limitato di $\widetilde{C}$.

Indichiamo con $\widetilde{P}$ lo spazio delle funzioni di una variabile, continue, a valor medio nullo e periodiche di periodo 2π, con la norma consueta. Dalle (2.4), (2.5) risulta che K subordina un isomorfismo $\overline{K}$ (algebrico e topologico) tra $\widetilde{B}$ e $\widetilde{P}$. Allora, posto $\varphi = \overline{K}v$, la (3.4) si scrive:

$$p_1 \tilde{\beta} (\bar{K}^{-1} \varphi + w) = 0$$

e, tenuto conto della (2.6):

$$K \tilde{\beta} (\bar{K}^{-1} \varphi + w) = 0 \; . \tag{3.5}$$

Ora, posto

$$f[x, t, v + w(x, t)] = F(x, t, v) \; , \tag{3.6}$$

la (3.5) si può scrivere:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{ F(x, s - x, \varphi(s) - \varphi(s - 2x)) - \\ - F(x, s + x, \varphi(s + 2x) - \varphi(s)) \} \, dx = 0 \tag{3.7}$$

nell'incognita $\varphi \in \tilde{P}$. Siamo dunque passati ad un'equazione integrale in cui l'incognita è una funzione di una sola variabile. Si tratta di un'equazione della forma $T(\varphi) = 0$, dove T è un'applicazione continua di $\tilde{P}$ in sè. Proveremo che tale equazione è risolubile mostrando che la T è biiettiva. A tal fine sarà sufficiente provare, essendo $\tilde{P}$ connesso, che $T(\tilde{P})$ è al tempo stesso aperto e chiuso. Fissati ad arbitrio φ', φ'', poniamo

$$\varrho' = T(\varphi'), \qquad \varrho'' = T(\varphi''), \qquad \varphi = \varphi'' - \varphi'.$$

Applicando il teorema del valor medio si ha

$$\varrho''(s) - \varrho'(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F_u(x, s - x, \xi(x, s)) [\varphi(s) - \varphi(s - 2x)] \, dx + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F_u(x, s + x, \eta(x, s)) [\varphi(s) - \varphi(s + 2x)] \, dx$$

con ovvio significato di $\xi(x, s)$ e di $\eta(x, s)$.

Si presenta dunque una relazione del tipo:

$$2\pi\,[\varrho''(s) - \varrho'(s)] = \varphi(s)\int_0^\pi \chi(x, s)\,dx - \int_0^\pi \chi(x, s)\,\varphi(s - 2x)\,dx +$$

$$+\ \varphi(s)\int_0^\pi \psi(x, s)\,dx - \int_0^\pi \psi(x, s)\,\varphi(s + 2x)\,dx.$$

Poichè φ è a valor medio nullo su $[0, 2\pi]$ nulla cambia se aggiungiamo o togliamo, nel secondo e quarto integrale, delle costanti arbitrarie alle funzioni χ e φ. In particolare, possiamo togliere da entrambe le funzioni la quantità h che figura nell'ipotesi (jj). Detti poi

$$M'' = \max_{0\leq s\leq 2\pi} \varphi(s),\ M' = \min_{0\leq s\leq 2\pi} \varphi(s)$$

e tenendo conto che $\chi - h,\ \psi - h \geq 0$, si ha, per ogni s:

$$\varphi(s)\int_0^\pi \chi(x, s)\,dx - M''\int_0^\pi [\chi(x, s) - h]\,dx + \varphi(s)\int_0^\pi \psi(x, s)\,dx -$$

$$- M''\int_0^\pi [\psi(x, s) - h]\,dx \leq 2\pi\,[\varrho''(s) - \varrho'(s)] \leq$$

$$\leq 2\pi \max_{0\leq s\leq 2\pi} |\,\varrho''(s) - \varrho'(s)\,| = 2\pi\,\|\,\varrho'' - \varrho'\,\|.$$

Ora se poniamo $s = \bar{s}$, con $\bar{s}$ tale che $\varphi(\bar{s}) = M''$, risulta, dopo ovvie semplificazioni:

$$M''\,h \leq \|\,\varrho'' - \varrho'\,\|.$$

Procedendo in modo analogo per il minimo si trova

$$M'\,h \geq -\,\|\,\varrho'' - \varrho'\,\|,$$

da cui

$$\max_s |\,\varphi''(s) - \varphi'(s)\,| \leq \frac{1}{h}\max |\,\varrho''(s) - \varrho'(s)\,|$$

o, più concisamente,

$$\| \varphi'' - \varphi' \| \leq \frac{1}{h} \| \varrho'' - \varrho' \| . \tag{3.8}$$

Quest'ultima disuguaglianza, unitamente alla continuità di T, mostra che T è iniettivo e che $T(\widetilde{P})$ è chiuso. Possiamo inoltre ricavare una maggiorazione a priori per le soluzioni della (3.7). Infatti, se φ è una soluzione, ponendo $\varphi' = 0$, $\varphi'' = \varphi$, otteniamo in corrispondenza:

$$\varrho' = T(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{ F(x, s - x, 0) - F(x, s + x, 0) \} \, dx,$$

$$\varrho'' = T(\varphi'') = 0,$$

$$2 \, | \varrho'(s) | \leq \max_{x \in I} | F(x, s - x, 0) | + \max_{x \in I} | F(x, s + x, 0) |$$

da cui, tenendo conto delle (3.6)

$$\| \varrho' \| \leq \max_I | F(x, t, 0) | = \max_I | f(x, t, w(x, t)) |$$

perciò, per la (3.8) si ha

$$\| \varphi \| \leq \frac{1}{h} \max_I | f(x, t, w(x, t)) |$$

e, applicando la (2.4):

$$\| v \| \leq \frac{2}{h} \max_I | f(x, t, w(x, t)) | . \tag{3.9}$$

Proviamo ora che $T(\widetilde{P})$ è aperto, facendo vedere che la T è localmente invertibile in ogni punto φ_0. Essendo T (come è facile verificare) differenziabile con continuità in $\widetilde{P}$, una condizione sufficiente per la invertibilità locale è che il differenziale sia invertibile. Nel nostro caso tale differenziale si scrive:

$$(3.10)\quad D(\eta)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi F_u(x, s-x, \varphi_0(s)-\varphi_0(s-2x))[\eta(s)-\eta(s-2x)]\,dx -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi F_u(x, s+x, \varphi_0(s+2x)-\varphi_0(s))[\eta(s+2x)-\eta(s)]\,dx.$$

Vogliamo ora studiare l'invertibilità dell'applicazione lineare D. Ponendo

$$(3.11)\quad l(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{ F_u(x, s-x, \varphi_0(s)-\varphi_0(s-2x)) +$$

$$+ F_u(x, s+x, \varphi_0(s+2x)-\varphi_0(s))\}\,dx$$

la (3.10) assume la forma:

$$(3.12)\quad D(\eta)(s) = l(s)\,\eta(s) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{ F_u(x, s+x, \varphi_0(s+2x)-\varphi_0(s))\,\eta(s+2x) +$$

$$+ F_u(x, s-x, \varphi_0(s)-\varphi_0(s-2x))\,\eta(s-2x)\}\,dx.$$

Notiamo che, per il modo con cui è stato ottenuto, l'operatore D porta $\widetilde{P}$ in sè; tuttavia, preso $\eta \in \widetilde{P}$, non è detto che $l\eta \in \widetilde{P}$; infatti $l\eta$ è continua, periodica con periodo 2π, ma non è detto che abbia valor medio nullo.

Introduciamo allora l'applicazione

$M: \eta \to l\eta - \overline{l\eta}$ (dove il soprassegno indica il valore medio) e indichiamo con G l'operatore:

$$G(\eta)(s) = \overline{l\,\eta} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{ F_u(x, s+x, \varphi_0(s+2x) - \varphi_0(s))\,\eta(s+2x) +$$

$$+ F_u(x, s-x, \varphi_0(s) - \varphi_0(s-2x))\,\eta(s-2x) \}\, dx.$$

Allora il differenziale si può scrivere nella forma

$$D(\eta) = M(\eta) + G(\eta).$$

Si riconosce facilmente (tenendo presente che $l(s) \geq h$) che M è un automorfismo dello spazio $\widetilde{P}$; inoltre G è un operatore compatto. Vale allora il teorema dell'alternativa e, per dimostrare l'invertibilità basta dimostrare che se è $D(\eta) = 0$, allora è $\eta = 0$. Ciò può essere ottenuto direttamente dalla (3.12) ricalcando il metodo seguito per ottenere la maggiorazione (3.8). Precisamente, sia $D(\eta) = 0$ e sia $\bar{s}$ un punto di massimo per η; sia M'' il massimo. Allora dalla (3.12), tenendo presente che η ha valor medio nullo, si ha:

$$l(s)\,\eta(s) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [F_u(x, s+x, \varphi_0(s+2x) - \varphi_0(s)) - h]\,\eta(s+2x)\,dx -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [F_u(x, s-x, \varphi_0(s) - \varphi_0(s-2x)) - h]\,\eta(s-2x)\,dx = 0.$$

Poichè è $F_u - h \geq 0$, si ha:

$$l(s)\,\eta(s) - M'' \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [F_u(x, s+x, \varphi_0(s+2x) - \varphi_0(s)) - h]\,dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [F_u(x, s-x, \varphi_0(s) - \varphi_0(s-2x) - h)]\,dx \right\} \leq 0.$$

Ricordando la (3.11) si può scrivere:

$$l(s)\,\eta(s) - M''\,l(s) + M''\,h \leq 0.$$

Facendo ora $s = \bar{s}$ si ottiene $M''\,h \leq 0$, da cui $M'' \leq 0$. In modo analogo si ottiene $M' = \min \eta(s) \geq 0$. Si conclude che è $\eta = 0$.

Si è così provato che, per ogni $w \in \tilde{C}$, la (3.4) ha una ed una sola soluzione $\vartheta(w) \in \tilde{B}$. Resta da provare che θ è una applicazione lipschitziana su ogni sfera di $\tilde{C}$. Sia infatti Σ una sfera di $\tilde{C}$ con centro nell'origine; l'insieme $\vartheta(\Sigma)$ è limitato in $\tilde{B}$, in virtù della (3.9). L'insieme $A = \theta(\Sigma) \oplus \Sigma \subset \tilde{B} \oplus \tilde{C} = \tilde{A}$ è dunque contenuto in una sfera di $\tilde{A}$ avente centro nell'origine e raggio $\varrho > 0$. Per le ipotesi ammesse per f, $\tilde{\beta}$ soddisfa in A ad una condizione di Lipschitz, con costante L_ϱ. Pertanto, indicando con w_1, w_2 due elementi di Σ e ponendo $v_1 = \vartheta(w_1)$, $v_2 = \vartheta(w_2)$, si ha, essendo $p_1\tilde{\beta}(v_2 + w_2) = 0$, $p_1\tilde{\beta}(v_1 + w_1) = 0$,

$$p_1\tilde{\beta}(v_2 + w_2) - p_1\tilde{\beta}(v_1 + w_2) = p_1\tilde{\beta}(v_1 + w_1) - p_1\tilde{\beta}(v_1 + w_2).$$

Dalla (3.8) si ricava allora

$$\| v_2 - v_1 \| \leq \frac{2}{h}\, \| p_1 \|\, L_\varrho \| w_2 - w_1 \|.$$

La dimostrazione del teorema è III così completa.

4. Caso di due variabili spaziali.

In questa parte del nostro lavoro esponiamo una semplice applicazione del metodo da noi seguito, al problema in due variabili spaziali ed una temporale, analogo a (0.1). Le ipotesi in cui ci metteremo saranno analoghe a quelle considerate nel § 2.

Sia Ω un aperto di R^2 con frontiera Γ sufficientemente regolare e si consideri in $\Omega \times R$ il problema

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \square\, u + \varepsilon f(x, y, t, u) = 0, & \varepsilon \text{ parametro reale non nullo} \\ u \mid_{\Gamma \times R} = 0 & \left(\square = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

dove f è supposta periodica di periodo 2π rispetto a t e si cerca una soluzione u periodica di periodo 2π rispetto a t.

Si tratta anzitutto di introdurre una opportuna versione generalizzata del problema (4.1). A questo scopo consideriamo l'equazione

$$(4.2) \qquad \square\, u = g(x, y, t),$$

con g 2π-periodica in t, di quadrato sommabile su $I = \Omega \times [0, 2\pi]$. Una funzione u definita in $\Omega \times R$ verrà detta soluzione generalizzata, 2π-periodica, della (4.2), « nulla alla frontiera » se verifica l'identità:

$$(4.3) \qquad \iiint_I u \,\square\, \varphi \, dx\, dy\, dt = \iiint_I g\, \varphi\, dx\, dy\, dt$$

per ogni φ di classe $\mathcal{C}^2$, definita in $\Omega \times R$, 2π-periodica rispetto a t e nulla alla frontiera, cioè su $\Gamma \times R$.

Per le soluzioni generalizzate qui introdotte valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nel § 2. In particolare, le soluzioni generalizzate sono tutte e sole le soluzioni formali ottenute mediante sviluppi in serie rispetto al sistema ortogonale

$$\{\omega_m(x)\, e^{ikt}\} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

dove le ω_m sono autosoluzioni del problema $-\Delta\omega = \lambda\omega$, con condizione di annullamento sulla frontiera di Ω (le ipotesi di regolarità devono essere tali da implicare che le autosoluzioni siano di classe $\mathcal{C}^2$).

Converremo allora di chiamare soluzione generalizzata, 2π-periodica, nulla alla frontiera, del problema (4.1) ogni funzione $u(x, y, t)$ a quadrato sommabile in I, verificante la (4.3) con $g(x, y, t) = f(x, y, t, u(x, y, t))$.

Fatte queste premesse, dimostriamo che:

TEOREMA IV. Si consideri il problema (4.1), dove l'aperto Ω sia costituito dai punti interni ad un rettangolo T del piano (x, y): $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$.

Valgano inoltre le seguenti ipotesi:

(i) i numeri $\lambda^2 = (\pi/a)^2$, $\mu^2 = (\pi/b)^2$ siano razionali.

(ii) $f(x, y, t, u)$ sia misurabile rispetto ad x, y, t per ogni valore di u, sia 2π-periodica in t ed $f(x, y, t, 0)$ sia di quadrato sommabile su $I = T \times [0, 2\pi]$.

(iii) Il rapporto incrementale di f rispetto ad u sia compreso fra due costanti positive H ed h:

$$0 < h \leq \frac{f(x, y, t, u'') - f(x, y, t, u')}{u'' - u'} \leq H.$$

Esiste allora un $\delta > 0$, tale che, per ogni $\varepsilon \neq 0$, con $|\varepsilon| < \delta$, la (4.1) ammette una ed una sola soluzione 2π-periodica.

DIMOSTRAZIONE. Cerchiamo, anzitutto, di determinare le varietà B e C come fatto per il caso bidimensionale. Definiamo dunque B come la varietà costituita dalle soluzioni periodiche «nulle alla frontiera» dell'equazione $\Box u = 0$ in $L^2(I)$.

Ricorriamo alla rappresentazione mediante serie di Fourier. Le funzioni che ci interessano sono del tipo:

$$u(x, y, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \sum_{l, m=1}^{\infty} u_{klm} e^{ikt} \operatorname{sen}\left(l \frac{\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(m \frac{\pi}{b} y\right),$$

possiamo perciò scrivere:

$$B = \{u : u_{klm} \neq 0 \Longrightarrow k^2 - \lambda^2 l^2 - \mu^2 m^2 = 0\}.$$

Evidentemente, la varietà ortogonale a B sarà:

$$C = \{u : k^2 - \lambda^2 l^2 - \mu^2 m^2 = 0 \Longrightarrow u_{klm} = 0\}.$$

Ricalcando quanto fatto nel caso di due variabili, andiamo alla ricerca di C', cioè dello spazio delle soluzioni generalizzate, « nulle alla frontierà » in C dell'equazione ;

$$\Box u = g, \qquad g \in C. \tag{4.4}$$

Detti rispettivamente u_{klm} e g_{klm} i coefficienti di Fourier di u e g, la (4.4), in base a quanto premesso intorno alla rappresentazione delle soluzioni generalizzate, dà luogo alle relazioni :

$$(k^2 - \lambda^2 l^2 - \mu^2 m^2)\, u_{klm} = g_{klm}$$

da cui

$$u_{klm} = \begin{cases} \dfrac{g_{klm}}{k^2 - \lambda^2 l^2 - \mu^2 m^2} & \text{se} \quad k^2 - \lambda^2 l^2 - \mu^2 m^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad k^2 - \lambda^2 l^2 - \mu^2 m^2 = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Resta da provare che i numeri u_{klm} ricavati dalla (4.5) definiscono un elemento $u \in L^2(I)$, cioè che :

$$\sum_{k,\, l,\, m} u_{klm}^2 < +\infty.$$

Poichè λ^2 e μ^2 sono stati supposti razionali, possiamo scrivere $\lambda^2 = p/q$, $\mu^2 = r/q$, con p, q, r interi positivi, che possiamo supporre primi fra loro, cosicchè risulta

$$k^2 - \lambda^2 l^2 - \mu^2 m^2 = \frac{qk^2 - p\, l^2 - rm^2}{q}.$$

Ora, il numeratore della frazione è un intero diverso da zero, dunque

$$\frac{|\, qk^2 - p\, l^2 - rm^2 \,|}{q} \geq \frac{1}{q}$$

e quindi

$$|\, u_{klm} \,| \leq q \,|\, g_{klm} \,|.$$

Ciò prova che

$$\sum_{klm} u_{klm}^2 < +\infty$$

ossia che $u \in C$.

Introdotta in C' la norma

$$\| u \|_{C'}^2 = \iiint_I (\square\, u)^2 \, dx \, dy \, dt$$

si verifica immediatamente che C' è di Banach e che $\square$ stabilisce tra C' e C un omeomorfismo. È facile a questo punto, arrivare alla conclusione ripetendo, con ovvie modifiche, i ragionamenti svolti nel corso della dimostrazione del teorema II.

OSSERVAZIONE. Il fatto che l'esistenza di una soluzione dipenda dal carattere aritmetico dei numeri λ^2 e μ^2 può apparire paradossale. Si rifletta però che l'ampiezza δ dell'intervallo del parametro ε per cui è garantita la soluzione dipende dal minimo denominatore comune delle frazioni che rappresentano λ^2 e μ^2; quando questo cresce, δ tende a zero.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20-1-1968.