RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARCO GRANDIS

Il sistema spettrale di un complesso multiplo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 252-298

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__252_0>

IL SISTEMA SPETTRALE DI UN COMPLESSO MULTIPLO

di MARCO GRANDIS *)

Sia A un complesso doppio di R-moduli, $(A^c)_{c \in \mathbf{Z}^2}$ la sua graduazione, d_1 e d_2 i differenziali (di gradi (1,0) e (0,1)).

Detto Ω l'insieme parzialmente ordinato per inclusione dei segmenti destri di $\mathbf{Z}^2$ (cioè dei sottoinsiemi α di $\mathbf{Z}^2$ tali che se $a \in \alpha$, $b \in \mathbf{Z}^2$ e $a \leq b$ allora $b \in \alpha$) si ha una filtrazione crescente $(A_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ di A su Ω ponendo

$$A_\alpha = \sum_{c \in \alpha} A^c .$$

A può quindi pensarsi come un R-complesso semplice (per contrazione) Ω filtrato; ad esso associamo il *sistema spettrale* costituito dai moduli graduati

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) = Im\,(H(A_\beta/A_\delta) \longrightarrow H(A_\alpha/A_\gamma)) \tag{1}$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega$; $\alpha \supset \beta \supset \delta$; $\alpha \supset \gamma \supset \delta$) e da opportuni omomorfismi di grado 0 e 1. Questo contiene le due sequenze spettrali di A, e altri invarianti di omotopia.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca matematico n^0 20 (Algebra Omologica) del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

Più in generale fissato un sottoinsieme ω di $\mathbf{Z}^m$ $(m \geq 1)$ e detto Ω l'insieme dei suoi segmenti destri, si definisce analogamente il sistema spettrale relativo ad ω di ogni complesso m-uplo di R-moduli avente supporto in ω. I casi notevoli sono ovviamente $\omega = \mathbf{N}^m$ (complessi di cocatene) e $\omega = -\mathbf{N}^m$ (complessi di catene).

Un tale sistema si può considerare ogniqualvolta sia dato un complesso filtrato su un insieme preordinato Ω; fu introdotto da Deheuvels [3] per filtrazioni continue, ad uso della teoria di Morse.

Questo lavoro concerne il sistema spettrale di un complesso m-uplo a valori in una categoria abeliana.

La parte I considera i sistemi spettrali da un punto di vista assiomatico (n^0 1) e loro proprietà generali (n^0 2); l'ambiente è una qualunque categoria abeliana. Sia gli assiomi che il teor. 2.1 mostrano l'importanza delle quaterne *decrescenti* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tra quelle considerate in (1).

La parte II riguarda i complessi multipli, inizialmente di R-moduli. Si definisce come qui accennato il sistema spettrale (relativo ad ω) di un complesso m-uplo avente supporto in ω (n^0 3). Il calcolo dei termini del sistema è ricondotto, mediante isomorfismi canonici (n^0 4) e decomposizioni in somma diretta (n^0 6) a quello degli $\mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta}(A)$ provenienti da quaterne $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ n-ridotte (n^0 5) e connesse (n^0 6); le quaterne decrescenti vengono ricondotte a quaterne dello stesso tipo. Formule di calcolo sono date al n^0 7: in particolare per complessi doppi ($m = 2$) e per certe quaterne si dà una formula in cui intervengono i differenziali d_1 e d_2 anzichè il differenziale totale (teor. 7.2). L'invarianza omotopica dei funtori $\mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta}$ è esaminata al n^0 8: per complessi doppi si dà una caratterizzazione molto semplice (8.3) delle quaterne $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ per cui $\mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta}$ è invariante; per complessi multipli solo una condizione sufficiente (8.2), ricavata mediante gli isomorfismi del n^0 4 da 8.1; quest'ultimo sostanzialmente traduce per i termimi del sistema il noto teorema di invarianza omotopica dei termini E^2 di un modulo differenziale filtrato. Il n^0 9 introduce i funtori N^a_r, M^a_r $(a \in \omega,\ r \geq 1$; invarianti per $r \geq 2)$ e, per $m = 2$, esemplifica per essi e per i termini $'E^{p,q}_r$, $''E^{q,p}_r$ delle due sequenze spettrali la formula detta (7.2).

Il n^0 10 estende la trattazione della parte II a complessi multipli a valori in una categoria abeliana, mediante il teorema di immersione piena di Freyd-Mitchell; ω deve essere « trasversalmente finito » (Parte II, Convenzioni) oppure la categoria deve possedere somme dirette numerabili.

Molte dimostrazioni delle prime due parti sono rimandate alla III, costituita da quelle e da alcuni lemmi necessari ad esse ma non al discorso.

Convenzioni. $\mathscr{A}$ indica sempre una categoria abeliana, $G(\mathscr{A})$ la categoria degli oggetti graduati di tipo $\mathbf{Z}$ su $\mathscr{A}$, cioè successioni $(A^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ di oggetti di $\mathscr{A}$, con morfismi di grado 0 (ancora abeliana); $\overline{G}(\mathscr{A})$ la categoria $\mathbf{Z}$-graduata (Buchsbaum [1], p. 4) avente gli stessi oggetti di $G(\mathscr{A})$ e morfismi di ogni grado. Uno *schema graduato* S (o schema di diagramma graduato) è dato da un insieme I (*vertici*), da insiemi Φ_n (*frecce di grado* n) per ogni intero n, e da applicazioni $D_n : \Phi_n \rightarrow I \times I$ (*direzioni*); è ovvio cosa si intenda per diagramma di schema S a valori in una categoria $\mathbf{Z}$-graduata; la commutatività potrà richiedersi solo se S è uno schema graduato *omogeneo* (cioè tale che due qualunque sue frecce composte di egual origine ed estremo abbiano egual grado). Ogni funtore è inteso covariante. Con n si indica sempre un intero (relativo).

PARTE I. — SISTEMI SPETTRALI

1. Sistemi di omologie relative e sistemi spettrali.

I. Sia Ω un insieme preordinato (dotato cioè di una relazione $\leq$ riflessiva e transitiva): per ogni intero $r \geq 1$ indicheremo con Ω^r la potenza cartesiana r-esima di Ω dotata dell'ordine prodotto, e con Ω_r il sottoinsieme preordinato di quella costituito dalle r-uple decrescenti; Ω_* indica poi il sottoinsieme di Ω^4 formato dalle quaterne $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tali che $\alpha \geq \beta \geq \delta$, $\alpha \geq \gamma \geq \delta$; ovviamente $\Omega_4 \subset \Omega_*$.

II. Diremo *sistema di omologie relative su Ω a valori in $\mathcal{A}$* l'assegnazione dei seguenti dati nella categoria graduata $\overline{G}(\mathcal{A})$:

a) un oggetto $H(\alpha, \beta) = (H^n(\alpha, \beta))_{n \in Z}$ per ogni $(\alpha, \beta) \in \Omega_2$

b) un morfismo $H(\alpha, \beta) \xrightarrow{u} H(\alpha', \beta')$ di grado 0, se $(\alpha, \beta) \leq (\alpha', \beta')$ in Ω_2

c) un morfismo $H(\alpha, \beta) \xrightarrow{d} H(\beta, \gamma)$ di grado 1, se $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega_3$

soggetti a questi assiomi:

(OP.1) se $(\alpha, \beta) \in \Omega_2$, $H(\alpha, \beta) \xrightarrow{u} H(\alpha, \beta)$ è il morfismo identico

(OP.2) se $(\alpha, \beta) \leq (\alpha', \beta') \leq (\alpha'', \beta'')$ in Ω_2, il diagramma

$$\begin{tikzcd} H(\alpha, \beta) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & H(\alpha', \beta') \arrow[r] & H(\alpha'', \beta'') \end{tikzcd}$$

di morfismi u è commutativo

(OP.3) se $(\alpha, \beta, \gamma) \leq (\alpha', \beta', \gamma')$ in Ω_3, il diagramma

$$\begin{tikzcd} H(\alpha, \beta) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "u"] & H(\beta, \gamma) \arrow[d, "u"] \\ H(\alpha', \beta') \arrow[r, "d"] & H(\beta', \gamma') \end{tikzcd}$$

è commutativo

(OP.4) se $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega_3$, il triangolo

$$\begin{tikzcd} H(\alpha, \beta) \arrow[rr, "d"] & & H(\beta, \gamma) \arrow[dl, "u"] \\ & H(\alpha, \gamma) \arrow[ul, "u"] & \end{tikzcd}$$

è esatto.

III. Diremo invece *sistema spettrale su Ω a valori in $\mathcal{A}$* quello costituito dai dati (sempre in $\overline{G}(\mathcal{A})$):

a) un oggetto $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se $i = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \Omega_*$

b) un morfismo $\mathcal{E}_i \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{i'}$ di grado 0, se $i \leq i'$ in Ω_*

c) un morfismo $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{\gamma\delta\varkappa\lambda}$ di grado 1, se $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ e $(\gamma, \delta, \varkappa, \lambda)$ stanno in Ω_*

e dagli assiomi:

(SP.1) se $i \in \Omega_*$, $\mathcal{E}_i \xrightarrow{u} \mathcal{E}_i$ è il morfismo identico

(SP.2) se $i \leq i' \leq i''$ in Ω_*, il diagramma di morfismi u

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_i \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathcal{E}_{i'} \arrow[r] & \mathcal{E}_{i''} \end{tikzcd}$$

è commutativo

(SP.3) se $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \leq (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ e $(\gamma, \delta, \varkappa, \lambda) \leq (\gamma', \delta', \varkappa', \lambda')$ in Ω_*, il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "u"] & \mathcal{E}_{\gamma\delta\varkappa\lambda} \arrow[d, "u"] \\ \mathcal{E}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \arrow[r, "d"] & \mathcal{E}_{\gamma'\delta'\varkappa'\lambda'} \end{tikzcd}$$

è commutativo

(SP.4) se $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa) \in \Omega_5$, è esatta la sequenza

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{\alpha\gamma\delta\varkappa} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha\beta\delta\varkappa} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\varkappa} \longrightarrow 0$$

(SP.5) se $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa, \lambda) \in \Omega_6$, è esatta la sequenza

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\varkappa} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{\gamma\delta\varkappa\lambda} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\beta\delta\varkappa\lambda} \longrightarrow 0$$

(SP.6) se $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \Omega_*$, i morfismi $\mathcal{E}_{\beta\beta\delta\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha\alpha\gamma\gamma}$ sono rispettivamente epi e mono.

Osservo che in (SP.4,5) le condizioni sugli indici sono necessarie per l'esistenza degli oggetti e morfismi presenti. (SP.6) è indipendente dagli altri assiomi, mentre sarebbe conseguenza di (SP.2, 4,5) se ci si limitasse a quaterne decrescenti.

IV. I sistemi di entrambi i tipi sono particolari diagrammi in $\bar{G}(\mathcal{A})$: lo schema graduato dei sistemi di omologie parziali, ad esempio, ha vertici in Ω_2, frecce di grado 0 in $(\Omega_2)_2$, frecce di grado 1 in Ω_3, e le direzioni indicate; sono quindi automaticamente definiti i morfismi, in entrambi i casi, come traslazioni di diagrammi (tra sistemi considereremo solo morfismi di grado 0).

Scrivendo $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ supporremo d'ora innanzi che $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \Omega_*$, scrivendo $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$ che $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \leq (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ in Ω_*.

Teorema 1.1. *Ad ogni sistema di omologie relative H su Ω a valori in $\mathcal{A}$ si può associare il sistema spettrale $\mathcal{E}$ così costituito:*

— $\qquad \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} = Im\,(H(\beta, \delta) \xrightarrow{u} H(\alpha, \gamma))$

— *il morfismo* $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$ *è definito per restrizione da* $H(\alpha, \gamma) \xrightarrow{u} H(\alpha', \gamma')$, *in virtù del diagramma commutativo:*

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} H(\beta, \delta) & \xrightarrow{u} & H(\alpha, \gamma) \\ \Big\downarrow u & & \Big\downarrow u \\ H(\beta', \delta') & \xrightarrow{u} & H(\alpha', \gamma') \end{array}$$

— *il morfismo* $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{\gamma\delta\varkappa\lambda}$ *si ottiene per restrizione dal diagramma commutativo:*

$$(2) \qquad \begin{array}{ccc} H(\beta, \delta) & \xrightarrow{u} & H(\alpha, \gamma) \\ \Big\downarrow d & & \Big\downarrow d \\ H(\delta, \lambda) & \xrightarrow{u} & H(\gamma, \varkappa) \end{array}$$

Inoltre ad ogni morfismo $(f_{\alpha\beta})_{(\alpha, \beta) \in \Omega_2}$ *tra sistemi di omologie relative* H, H' *si può associare un morfismo tra i sistemi spettrali associati definendo* $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ $((\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \Omega_*)$ *per restrizione dal diagramma commutativo:*

$$
\begin{array}{ccc}
H(\beta, \delta) & \xrightarrow{u} & H(\alpha, \gamma) \\
\downarrow f_{\beta\delta} & & \downarrow f_{\alpha\gamma} \\
H'(\beta, \delta) & \xrightarrow{u} & H'(\alpha, \gamma)
\end{array} \tag{3}
$$

Si ha così un funtore della categoria dei sistemi di omologie relative in quella dei sistemi spettrali (*su* Ω, *a valori in* $\mathcal{A}$). Dim. al n^0 11.

È invece immediato riconoscere che se $\mathcal{E}$ è un sistema spettrale si ottiene un sistema di omologie relative limitandosi agli oggetti $H(\alpha, \beta) = \mathcal{E}_{\alpha\alpha\beta\beta}$ ed ai morfismi u, d inerenti a quelli; l'assioma (OP.4) è soddisfatto, come ovvia conseguenza dell'esattezza delle sequenze:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & \mathcal{E}_{\alpha\alpha\beta\gamma} & \xrightarrow{u} & \mathcal{E}_{\alpha\alpha\beta\beta} & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}_{\beta\beta\gamma\gamma} & \xrightarrow{u} & \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\gamma} & \to & 0 \\
& & \| & & & & & & \| & & \\
0 & \leftarrow & \mathcal{E}_{\alpha\alpha\beta\gamma} & \xleftarrow{\quad u \quad} & & & \mathcal{E}_{\alpha\alpha\gamma\gamma} & \xleftarrow{u} & \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\gamma} & \leftarrow & 0
\end{array}
$$

ottenute da (SP.5) e (SP.4). Un morfismo di sistemi spettrali ristretto alle quaterne decrescenti $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$ fornisce poi un morfismo di sistemi di omologie relative.

V. Questi funtori realizzano un'equivalenza tra le due categorie, come segue dagli isomorfismi naturali:

$$Im\,(H(\alpha, \beta) \xrightarrow{u} H(\alpha, \beta)) = H(\alpha, \beta) \tag{4}$$

$$Im\,(\mathcal{E}_{\beta\beta\delta\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha\alpha\gamma\gamma}) = \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{5}$$

ottenibili rispettivamente da (OP.1) e (SP.2,6).

VI. Esempi.

a) Sia A un complesso Ω-filtrato a valori in $\mathcal{A}$, cioè un oggetto $A = (A^n)_{n \in Z}$ di $\overline{G}(\mathcal{A})$ munito di un endomorfismo d di grado 1 a quadrato nullo, e di una filtrazione $(A_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ di sottooggetti di A

compatibili con il differenziale. Ad A si può associare un sistema di omologie relative su Ω a valori in $\mathscr{A}$ ponendo:

— se $(\alpha, \beta) \in \Omega_2$, $H(\alpha, \beta) = H(A_\alpha/A_\beta)$

— se $(\alpha, \beta) \leq (\alpha', \beta')$ in Ω_2, il morfismo di grado 0

$$H(A_\alpha/A_\beta) \xrightarrow{u} H(A_{\alpha'}/A_{\beta'})$$

è indotto dalle inclusioni $A_\alpha \subset A_{\alpha'}$, $A_\beta \subset A_{\beta'}$

— se $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega_3$, il morfismo di grado 1

$$H(A_\alpha/A_\beta) \xrightarrow{d} H(A_\beta/A_\gamma)$$

è il connettivo associato alla sequenza accorciata esatta di complessi:

$$0 \longrightarrow A_\beta/A_\gamma \longrightarrow A_\alpha/A_\gamma \longrightarrow A_\alpha/A_\beta \longrightarrow 0.$$

Gli assiomi sono notoriamente soddisfatti.

Il sistema spettrale che se ne deduce per 1.1:

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) = Im\,(H(A_\beta/A_\delta) \xrightarrow{u} H(A_\alpha/A_\gamma))$$

sarà detto *sistema spettrale di* A, e indicato complessivamente (morfismi u, d compresi) con $\mathcal{E}(A)$. Ovviamente per ogni morfismo $f: A \longrightarrow B$ tra complessi Ω-filtrati è definito un morfismo $\mathcal{E}(f): \mathcal{E}(A) \longrightarrow \mathcal{E}(B)$ di sistemi spettrali: $\mathcal{E}$ si presenta quindi come funtore (additivo) della categoria dei complessi Ω-filtrati su $\mathscr{A}$ in quella dei sistemi spettrali su Ω a valori in $\mathscr{A}$.

Per $\Omega = \mathbf{Z}$, *con l'ordine opposto al naturale,* il sistema generalizza la sequenza spettrale del complesso filtrato A; infatti per $r \geq 1$, e p, q interi qualunque:

$$(6)\qquad E_r^{p,q}(A) = Im\,(H^{p+q}(A_p/A_{p+r}) \longrightarrow H^{p+q}(A_{p-r+1}/A_{p+1})) =$$

$$= \mathcal{E}^{p+q}_{p-r+1,\,p,\,p+1,\,p+r}(A)$$

(per l'isomorfismo sfruttato cfr. Cartan-Eilenberg [2], p. 318) e il differenziale della sequenza spettrale si identifica a quello del sistema mediante gli isomorfismi detti.

b) Sia A un complesso m-uplo a valori in $\mathcal{A}$; detto Ω l'insieme dei segmenti destri di $\mathbf{Z}^m$, si definisce in modo ovvio una filtrazione $(A_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ del complesso semplice ottenuto da A per contrazione, e quindi, come in *a*), un sistema spettrale associato ad A, contenente le m sequenze spettrali di quello e altri invarianti d'omotopia; lo studio della situazione qui accennata verrà fatto nella parte II.

c) Sia X uno spazio topologico, $(X_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ una filtrazione decrescente di X indiciata su un insieme preordinato Ω, H^* una teoria di coomologia per coppie di spazi topologici per cui le coppie (X_β, X_α), $(\alpha, \beta) \in \Omega_2$, siano ammissibili (cfr. Eilenberg-Steenrod, Foundations of Algebraic Topology). Si ottiene un sistema di omologie relative ponendo $H(\alpha, \beta) = H^*(X_\beta, X_\alpha)$, e definendo i morfismi u come indotti da inclusioni, i morfismi d mediante il cobordo di una tripla; (OP.4) è la sequenza esatta di coomologia della tripla $(X_\gamma, X_\beta, X_\alpha)$ (loc. cit, p. 29).

d) Sia dato un funtore coomologico $T = (T^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ (Grothendieck [5], p. 140) di una categoria abeliana $\mathcal{A}'$ in $\mathcal{A}$, e un oggetto A di $\mathcal{A}'$ munito di una Ω-filtrazione crescente $(A_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$: questa situazione generalizza *a*), dove $\mathcal{A}'$ è la categoria dei complessi su $\mathcal{A}$ e T è la coomologia. Anche qui si può definire un sistema di omologie relative su Ω a valori in $\mathcal{A}$:

$$H^n(\alpha, \beta) = T^n(A_\alpha / A_\beta)$$

e di conseguenza un sistema spettrale.

VII. I sistemi di omologie relative furono introdotti, per quanto a me noto, da Eilenberg [4] e ripresi da Cartan-Eilenberg [2] (per $\Omega = \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e con in più un assioma di parziale convergenza) allo scopo di dedurne sequenze spettrali. Deheuvels [3], cui è dovuto il nome, ne ricavò invece un « sistema di omologie parziali » più vasto, comprendente oltre agli $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ qui considerati anche gli oggetti $\mathcal{D}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ immagini del morfismo composto

$$H(\alpha, \gamma) \xrightarrow{u} H(\alpha, \beta) \xrightarrow{d} H(\beta, \delta).$$

Lavorando su $\Omega = \mathbf{R} \cup \{-\omega, -\infty, +\infty, +\omega\}$, per applicazioni alla teoria di Morse, egli provò un teorema di completezza di tale sistema (teor. 4 p. 40), che pare non sussistere se Ω non è totalmente ordinato.

2. Proprietà fondamentali dei sistemi spettrali.

I. Sia dato un sistema spettrale $\mathcal{E}$ su Ω (insieme preordinato) a valori nella categoria abeliana $\mathcal{A}$.

a) Come già detto, *se* $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega_3$ *il triangolo*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{\alpha\alpha\beta\beta} \arrow[rr, "d"] & & \mathcal{E}_{\beta\beta\gamma\gamma} \arrow[dl, "u"] \\ & \mathcal{E}_{\alpha\alpha\gamma\gamma} \arrow[ul, "u"] & \end{tikzcd}$$

è esatto (n^0 1, IV).

b) *I morfismi* $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha\beta'\gamma\delta'}$ *sono mono, mentre gli* $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha'\beta\gamma'\delta}$ *sono epi*: segue da (SP.6,1,2).

c) *Se* $\beta \leq \gamma$, $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$: poichè $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha\gamma\gamma\delta}$ è un monomorfismo per *b*), basta provare che $\mathcal{E}_{\alpha\gamma\gamma\delta} = 0$; in effetti per (SP.4,1) c'è la sequenza esatta di morfismi identici:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{\alpha\gamma\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha\gamma\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha\gamma\gamma\delta} \longrightarrow 0.$$

d) *Se* $\beta \leq \gamma'$, $(\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}) = 0$: segue da *c*) e dalla fattorizzazione di u : $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha'\beta\gamma'\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$.

II. Il seguente teorema consente di individuare sequenze spettrali entro il sistema:

TEOREMA 2.1. *I morfismi consecutivi*

$$(2) \qquad \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{\gamma\delta\varkappa\lambda} \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{\varkappa\lambda\mu\nu}$$

hanno composizione nulla; se $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *e* $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ *sono decrescenti il quoziente di omologia della* (2) *è isomorfo a* $\mathcal{E}_{\beta\delta\varkappa\mu}$ *(isomorfismo naturale per mappe di sistemi spettrali, e compatibile con i morfismi* u*).* Dim al n⁰ 11.

È facile vedere che se una delle quaterne esterne di (2) non è decrescente il teorema può non sussistere, anche se $\mathcal{E}$ proviene da un doppio complesso. Questo fatto, oltre agli assiomi (SP.4,5), motiva l'attenzione prestata alle quaterne decrescenti nella parte II.

Da 2.1 si deduce un nuovo legame tra $\mathcal{E}$ ed il sistema H associato:

COROLLARIO 2.2. *Se* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \Omega_4$, $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *è naturalmente isomorfo all'omologia di*

$$H(\alpha, \beta) \xrightarrow{d} H(\beta, \gamma) \xrightarrow{d} H(\gamma, \delta)$$

dove $H(\alpha, \beta) = \mathcal{E}_{\alpha\alpha\beta\beta}$. *L'isomorfismo è compatibile con i morfismi* u.

III. Nel caso che sia $\Omega = \mathbf{Z}$, *con l'ordine opposto al naturale,* si ricava ancora da 2.1 che, posto (per p, q, r interi, $r \geq 1$):

— $E_r^{p,q} = \mathcal{E}^{p+q}_{p-r+1,p,p+1,p+r}$

— $(d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}) = (\mathcal{E}^{p+q}_{p-r+1,p,p+1,p+r} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{p+q+1}_{p+1,p+r,p+r+1,p+2r})$

— $E_r = (E_r^{p,q})_{(p,q) \in \mathbf{Z}^2} \qquad d_r = (d_r^{p,q})_{(p,q) \in \mathbf{Z}^2}$

si ha $H(E_r, d_r) = E_{r+1}$ e quindi una sequenza spettrale (E_r, d_r), secondo la definizione di Mac Lane [6], p. 345. Se inoltre $\mathcal{E}$ è il sistema spettrale $\mathcal{E}(A)$ di un complesso $\mathbf{Z}$-filtrato A, la sequenza spettrale trovata non è altro che quella di A, come visto nell'esempio *a*) del n⁰ 1, VI.

IV. Quanto alla composizione di morfismi u, d del sistema si può provare (ma qui non servirà) che se Ω è filtrante a sinistra e a destra (cioè dati $\alpha, \beta \in \Omega$ esistono $\gamma, \delta \in \Omega$ tali che $\gamma \leq \alpha \leq \delta$, $\gamma \leq \beta \leq \delta$) *il morfismo di composizione di grado* n

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \longrightarrow \mathcal{E}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$$

è al più unico; se $n = 0$ esiste se e solo se $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \leq (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ e coincide con il relativo morfismo u; se $n = 1$ esiste se e solo se $\gamma \leq \alpha'$, $\delta \leq \beta'$, ed è dato dalla diagonale del diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "u"] & \mathcal{E}_{\gamma\delta\varkappa\lambda} \arrow[d, "u"] \\
\mathcal{E}_{\mu\nu\alpha'\beta'} \arrow[r, "d"] & \mathcal{E}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}
\end{tikzcd}$$

(dove $\varkappa \leq \delta$, γ'; $\lambda \leq \varkappa$, δ'; $\nu \geq \beta$, α'; $\mu \geq \alpha$, ν); infine se $n > 1$ esiste sempre ed è nullo. Di conseguenza *ogni diagramma di morfismi u, d su schema omogeneo è commutativo.*

PARTE II. — IL SISTEMA SPETTRALE DI UN COMPLESSO MULTIPLO

Convenzioni. Sia $m \geq 1$; $\mathbf{Z}^m$ è parzialmente ordinato da:

$$(p_1, \dots p_m) \leq (q_1, \dots q_m) \Longleftrightarrow p_1 \leq q_1, \dots p_m \leq q_m .$$

Sia ω un sottoinsieme di $\mathbf{Z}^m$ che resterà fisso in tutta questa parte; $\mathbf{C}$ è l'operatore complementare in $\mathbf{Z}^m$, $\mathbf{C}_\omega$ in ω. Ω indicherà sempre l'insieme dei segmenti destri di ω, cioè di quei sottoinsiemi α di ω tali che se $a \in \alpha$, $b \in \omega$ e $a \leq b$ allora $b \in \alpha$. Ω è l'insieme dei chiusi (risp. aperti) di ω per la topologia d'ordine sinistra (risp. destra); se $\varphi \subset \omega$, indicheremo con $\overline{\varphi}$ (risp. φ^*) la chiusura di φ in tale topologia; diremo che φ è *localmente chiuso in* ω se lo è per l'una o l'altra delle topologie dette; condizioni equivalenti sono $\varphi = \overline{\varphi} \cap \varphi^*$, oppure:

$$(a, b \in \varphi, c \in \omega, a < c < b) \text{ implica } c \in \varphi.$$

Ω è parzialmente ordinato per inclusione, ed è un reticolo. Un elemento $i = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ di Ω_* (cfr. 1,I) sarà detto semplicemente *quaterna* (relativa ad ω), e *quaterna decrescente* se è tale, ossia se sta in Ω_4; la relazione d'ordine in Ω^4 sarà ancora scritta $\subset$: Ω_* e Ω_4 sono sottoreticoli di Ω^4, essendo

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \cap (\alpha', \beta', \gamma', \delta') = (\alpha \cap \alpha', \beta \cap \beta', \gamma \cap \gamma', \delta \cap \delta')$$

e analogamente per l'unione (o, più esattamente, estremo superiore).

Per ogni intero n, ω_n indica l'insieme dei punti $(p_1, \dots p_m)$ di ω tali che $p_1 + \dots + p_m = n$; inoltre $\omega_n' = \omega_{n-1} \cup \omega_n$, $\omega_n'' = \omega_n \cup \omega_{n+1} = \omega_{n+1}'$; diremo che ω è *trasversalmente finito* se ω_n è finito per ogni intero n.

Diremo *contigui* due punti di $\mathbf{Z}^m$ aventi distanza euclidea eguale ad 1; una *spezzata* di $\varphi \subset \mathbf{Z}^m$ è una successione finita $(a_r)_{0 \leq r \leq \bar{r}}$ di punti di φ tale che a_r e a_{r+1} siano contigui per $0 \leq r < \bar{r}$; R_φ indica la relazione di equivalenza in φ generata dalla relazione nelle variabili a e b « *a e b sono elementi contigui di φ* »: in altre parole $aR_\varphi b$ equivale a dire che esiste una spezzata di φ « congiungente » a e b.

La base canonica di $\mathbf{Z}^m$ su $\mathbf{Z}$ sarà scritta $(e_h)_{1 \leq h \leq m}$: $e_1 = (1, 0, \dots 0)$ etc.; i punti contigui ad $a \in \mathbf{Z}^m$ sono quindi gli $a \pm e_h$.

Nei numeri 3 9 di questa parte la categoria ambiente è la categoria $\mathcal{G}^R$ dei moduli (sinistri) su un anello R; al n[0] 10 i risultati sono estesi ad una qualunque categoria abeliana $\mathcal{A}$ (purché ω sia trasversalmente finito, oppure $\mathcal{A}$ abbia somme dirette numerabili). Per motivi pratici si dirà *R-modulo graduato* un R-modulo A munito di una graduazione $(A^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ (famiglia di sottomoduli di cui A è somma diretta): si sostituisce cioè G $(\mathcal{G}^R)$ con una categoria equivalente; modifiche analoghe per complessi di R-moduli, etc.

3. Definizione del sistema spettrale di un complesso multiplo.

I. Sia A un complesso m-uplo di R-moduli: A è un R-modulo munito di una graduazione $(A^c)_{c \in \mathbf{Z}^m}$ di tipo $\mathbf{Z}^m$, e di endomorfismi

d_h di grado e_h $(1 \leq h \leq m)$ a quadrato nullo e *commutanti* :

$$d_h\, d_k = d_k\, d_h \quad (= 0 \text{ se } h = k).$$

Accanto a questi differenziali considereremo i $\overline{d}_h$:

$$\text{(1)} \qquad \overline{d}_h\, x = (-1)^{p_1 + \dots + p_{h-1}}\, d_h\, x\,, \text{ se } x \in A^{p_1, \dots p_m}$$

ancora a quadrato nullo ma anticommutanti: $\overline{d}_h\, \overline{d}_k = - \overline{d}_k\, \overline{d}_h$.

Diremo supporto di A il sottoinsieme $\sigma(A)$ di $\mathbf{Z}^m$ costituito dai punti c tali che $A^c \neq 0$; analogamente se $x \in A$, l'insieme $\sigma(x)$ dei punti c tali che x^c (componente di x in A^c) sia non nullo è il supporto di x. I complessi m-upli di R-moduli con supporto contenuto in ω costituiscono una categoria abeliana $C^m(R, \omega)$; $C^m(R, \mathbf{N}^m)$ è ad es. la categoria dei complessi m-upli di cocatene, mentre $C^m(R, -\mathbf{N}^m)$ è isomorfa alla categoria dei complessi m-upli di catene.

II. Ad ogni oggetto A di $C^m(R, \omega)$ si può associare per « contrazione » un complesso semplice Ω-filtrato di R moduli $\widetilde{A}$ munendo l'R-modulo A di:

— graduazione semplice: $(A^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ dove $A^n = \sum\limits_{c \in \omega_n} A^c$

— differenziale: $\qquad d = \sum\limits_{h=1}^{m} \overline{d}_h$

— filtrazione: $\qquad (A_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ dove $A_\alpha = \sum\limits_{c \in \alpha} A^c$.

Diremo *sistema spettrale* (relativo ad ω) $\mathcal{E}(A)$ di A il sistema spettrale del complesso Ω-filtrato $\widetilde{A}$ (1, VI, a)); nei n$^{\text{i}}$ 3·9 di questa parte $\mathcal{E}$ sarà considerato, salvo contrario avviso, come funtore di $C^m(R, \omega)$ nella categoria dei sistemi spettrali su Ω a valori in $\mathcal{G}^R$, gli $\mathcal{E}_i$ come funtori di quella in $\overline{G}(\mathcal{G}^R)$, i morfismi u, d come morfismi funtoriali tra gli $\mathcal{E}_i$.

III. La filtrazione $(A_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ è più fine delle m filtrazioni canoniche $({}^hF_r\, A)_{r \in \mathbf{Z}}$, perché se $1 \leq h \leq m$ e $r \in \mathbf{Z}$:

$$(2) \qquad {}^hF_r\, A = A_{\varrho_h(r)}$$

dove $\varrho_h(r) = \{(p_1, \dots p_m) \mid (p_1, \dots p_m) \in \omega,\ p_h \geq r\}$; di conseguenza (per quanto detto in 1, VI, a)) il sistema spettrale di A contiene le m sequenze spettrali di A :

$$(3) \qquad {}^hE_r^{p,\,q}(A) = \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{p+q}(A)$$

dove $\alpha = \varrho_h(p - r + 1)$, $\beta = \varrho_h(p)$, $\gamma = \varrho_h(p + 1)$, $\delta = \varrho_h(p + r)$. Notare che $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dipendono da ω per definizione di ϱ_h, e che per la validità della (3) è sufficiente che il sottoinsieme ω di $\mathbf{Z}^m$ contenga il supporto di A. Per $m = 2$ si scriverà $'E, ''E$ anziché ${}^1E, {}^2E$.

IV. Il sistema spettrale contiene altri invarianti di omotopia di A (cfr. n^0 8); un esempio è dato dagli N_r^a, M_r^a del n^0 9. Il calcolo degli $\mathcal{E}_i^n(A)$ è invece affrontato nei n$^{\text{i}}$ 4-7 ; un primo risultato è la formula

$$(4) \qquad \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) = \frac{A_\beta \cap d^{-1} A_\delta}{A_\gamma + dA_\alpha}\ {}^{1)}$$

fornita dalla seguente proposizione, e valida per ogni complesso $\overline{\Omega}$-filtrato di R-moduli ($\overline{\Omega}$ essendo un qualunque insieme preordinato).

Proposizione 3.1. *I funtori H ed $\mathcal{E}$, definiti sulla categoria dei complessi $\overline{\Omega}$-filtrati di R-moduli, sono rispettivamente isomorfi ai funtori H', $\mathcal{E}'$ dati da*:

$$- H'(\alpha, \beta)\, A = \frac{A_\alpha \cap d^{-1} A_\beta}{dA_\alpha + A_\beta} \qquad \mathcal{E}'_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) = \frac{A_\beta \cap d^{-1} A_\delta}{A_\gamma + dA_\alpha}\ {}^{1)}$$

$$- H'(\alpha, \beta)\, A \xrightarrow{u} H'(\alpha', \beta')\, A \quad e \quad \mathcal{E}'_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) \xrightarrow{u} \mathcal{E}'_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}(A)$$

---

[1]) Quoziente generalizzato : se H e K sono sottomoduli di A, $H / K = (H + K)/K$ per definizione.

sono indotti dall'omomorfismo identico di A

$$— H'(\alpha,\beta)\,A \xrightarrow{d} H'(\beta,\gamma)\,A \quad e \quad \mathcal{E}'_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) \xrightarrow{d} \mathcal{E}'_{\gamma\delta\varkappa\lambda}(A)$$

sono indotti dal differenziale di A

— *se* $f: A \to B$ *è un omomorfismo di complessi* $\bar{\Omega}$*-filtrati di* R*-moduli,* $H'(\alpha,\beta)\,A \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} H'(\alpha,\beta)B$ *e* $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) \xrightarrow{f_{\alpha\beta\gamma\delta}} \mathcal{E}'_{\alpha\beta\gamma\delta}(A)$ *sono indotti da* f.

Pure isomorfi sono i funtori H *ed* H', $\mathcal{E}$ *ed* $\mathcal{E}'$, *definiti su* $C^m(R,\omega)$.

DIM. Se A è un complesso $\bar{\Omega}$-filtrato e $(\alpha,\beta) \in \bar{\Omega}_2$:

$$Ker\,(A_\alpha / A_\beta \xrightarrow{d} A_\alpha / A_\beta) = (A_\alpha \cap d^{-1} A_\beta) / A_\beta$$

$$Im\,(A_\alpha / A_\beta \xrightarrow{d} A_\alpha / A_\beta) = (dA_\alpha + A_\beta) / A_\beta$$

$$H\,(A_\alpha / A_\beta) = \frac{A_\alpha \cap d^{-1} A_\beta}{dA_\alpha + A_\beta}\,.$$

Questo isomorfismo è naturale e compatibile con i morfismi u, d; quindi:

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) = Im\,(H\,(A_\beta / A_\delta) \xrightarrow{u} H\,(A_\alpha / A_\gamma))$$

$$= Im \left(\frac{A_\beta \cap d^{-1} A_\delta}{dA_\beta + A_\delta} \xrightarrow{u} \frac{A_\alpha \cap d^{-1} A_\gamma}{dA_\alpha + A_\gamma} \right)$$

$$= \frac{(A_\beta \cap d^{-1} A_\delta) + dA_\alpha + A_\gamma}{dA_\alpha + A_\gamma} = \mathcal{E}'_{\alpha\beta\gamma\delta}(A).$$

isomorfismo esso pure naturale e compatibile con i morfismi u, d. c.v.d.

COROLLARIO 3.2. *Se A è un complesso* $\bar{\Omega}$*-filtrato di* R*-moduli (oppure un oggetto di* $C^m(R,\omega)$*) il morfismo* $\mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) \xrightarrow{u} \mathcal{E}^n_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}(A)$ *è:*

— *monomorfismo se e solo se* $A^n_\beta \cap d^{-1} A_\delta \cap (dA_{\alpha'} + A_{\gamma'}) \subset dA_\alpha + A_\gamma$

— *epimorfismo se e solo se* $A^n_{\beta'} \cap d^{-1} A_{\delta'} \subset (A_\beta \cap d^{-1} A_\delta) + dA_{\alpha'} + A_{\gamma'}$

— *nullo se e solo se* $A^n_\beta \cap d^{-1} A_\delta \subset dA_{\alpha'} + A_{\gamma'}$.

4. Isomorfismi di n-equivalenza e morfismi generalizzati.

I. Se $i = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ è una quaterna e n un intero, diremo *nocciolo n-esimo di i* l'insieme $\vartheta = (\beta - \gamma) \cap \omega_n$, e *coppia n-esima di i* la coppia (ζ, η) di sottoinsiemi di ω:

ζ = saturato di ϑ per $R_{\zeta'}$, dove $\zeta' = (\alpha - \gamma) \cap \omega'_n$ [2]
η = saturato di ϑ per $R_{\eta'}$, dove $\eta' = (\beta - \delta) \cap \omega''_n$.

Ovviamente $\vartheta = \zeta' \cap \eta' = \zeta \cap \eta$.

Diremo *n equivalenti* $(i \underset{n}{\sim} j)$ due quaterne aventi la stessa coppia n-esima. La fig. 1 mostra, per $m = 2$, $\omega = \mathbf{Z}^2$, $i = (\varrho_1(1), \varrho_1(3), \varrho_1(4), \varrho_1(6))$, $n = 7$, le zone ζ ed η:

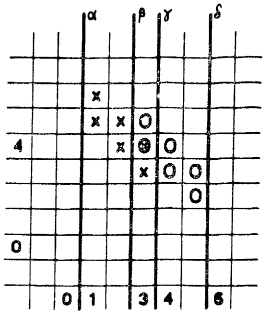

Fig. 1

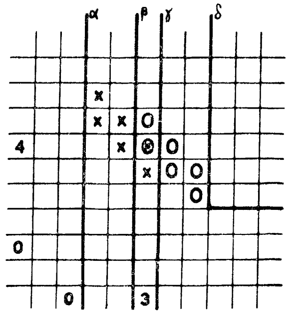

Fig. 1′

Come sempre si farà in queste figure i punti di $\mathbf{Z}^2$ sono rappresentati da quadrati elementari del «reticolo» ivi tracciato (il punto (p, q) corrisponde all'intersezione tra la striscia verticale p e la striscia orizzontale q); il segno $\times$ (risp. 0) in un quadrato significa che il punto di $\mathbf{Z}^2$ che esso rappresenta sta in ζ (risp. η). La quaterna decrescente i considerata in fig. 1 è notevole perché $\mathcal{E}_i^n = {}'E_3^{3,\, n-3}$ (cfr. 3. (3)); in questo caso si ha $\zeta = \zeta'$ e $\eta = \eta'$; non così in fig. 1′. Le due quaterne sono n-equivalenti per ogni $n \geq 7$.

[2]) Ossia: ζ è l'insieme dei punti di ζ' equivalenti a punti di ϑ secondo $R_{\zeta'}$ cioè (cfr. convenzioni della parte II) dei punti di ζ' connettibili a punti di ϑ mediante una spezzata contenuta in ζ'.

TEOREMA 4.1. *Se i, j sono quaterne n-equivalenti, anche $i \cap j$* e *$i \cup j$ sono n-equivalenti ad esse* [3]. Dim. al n⁰ 12.

TEOREMA 4.2. *Se i, j sono quaterne n-equivalenti e $i \subset j$, il morfismo funtoriale $\mathcal{E}_i^n \xrightarrow{u} \mathcal{E}_j^n$ è isomorfismo.* Dim. al n⁰ 12.

II. Da 4.1 e 4.2 si ha immediatamente che, se i, j sono quaterne n-equivalenti, il seguente diagramma commutativo di morfismi funtoriali:

(1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_i^n \arrow[r, "u_1"] & \mathcal{E}_{i \cup j}^n \\
\mathcal{E}_{i \cap j}^n \arrow[u, "u_3"'] \arrow[r, "u_2"] & \mathcal{E}_j^n \arrow[u, "u_4"']
\end{tikzcd}$$

è formato da isomorfismi, e definisce quindi un isomorfismo funtoriale

(2) $$v_{ij}^n : \mathcal{E}_i^n \longrightarrow \mathcal{E}_j^n \qquad (v_{ij}^n = \overset{-1}{u_4}\, u_1 = u_2\, \overset{-1}{u_3})$$

che diremo *isomorfismo di n-equivalenza*. Se $i \subset j$, v_{ij}^n è un morfismo u.

COROLLARIO 4.3. *Se Γ è una classe di n-equivalenza di Ω_*, $(v_{ij}^n)_{(i,j) \in \Gamma^2}$ è un sistema transitivo di isomorfismi per i funtori $(\mathcal{E}_i^n)_{i \in \Gamma}$.*

DIM. Se i, j, k sono quaterne n-equivalenti, dal seguente diagramma commutativo di isomorfismi u:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{E}_{i \cup k}^n \arrow[d] & & \\
 & & \mathcal{E}_{i \cup j \cup k}^n & & \\
\mathcal{E}_i^n \arrow[r] \arrow[uurr] & \mathcal{E}_{i \cup j}^n \arrow[ur] & \mathcal{E}_j^n \arrow[l] \arrow[r] & \mathcal{E}_{j \cup k}^n \arrow[ul] & \mathcal{E}_k^n \arrow[l] \arrow[uull]
\end{tikzcd}$$

si ricava facilmente $v_{ik}^n = v_{jk}^n\, v_{ij}^n$. c.v.d.

Abbiamo così provato che $\mathcal{E}_i^n$ *dipende solo dalla classe di n-equivalenza di i in Ω_*.*

---

[3]) Non è invece generalmente vero che $\underset{n}{\sim}$ sia compatibile con la struttura reticolare di Ω_*.

III. Gli omomorfismi u, v si possono generalizzare nel seguente modo. Se i, j sono quaterne diremo che $i \underset{n}{<} j$ se esistono due quaterne i', j' tali che:

$$i \underset{n}{\sim} i', \quad i' \subset j', \quad j' \underset{n}{\sim} j \text{ [4]}. \tag{3}$$

In tal caso si può definire un morfismo $w^n_{ij} : \mathcal{E}^n_i \longrightarrow \mathcal{E}^n_j$ mediante la composizione:

$$\mathcal{E}^n_i \xrightarrow{v} \mathcal{E}^n_{i'} \xrightarrow{u} \mathcal{E}^n_{j'} \xrightarrow{v} \mathcal{E}^n_j . \tag{4}$$

Il morfismo non dipende da i', j' perché se i'', j'' sono nelle stesse condizioni, $i \underset{n}{\sim} i' \cup i''$ e $j \underset{n}{\sim} j' \cup j''$ per 4.1, onde il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}^n_{i'} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \mathcal{E}^n_{j'} \arrow[d] \arrow[dr, "v"] & \\
\mathcal{E}^n_i \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "v"'] & \mathcal{E}^n_{i' \cup i''} \arrow[r, "u"] & \mathcal{E}^n_{j' \cup j''} \arrow[r, "v"] & \mathcal{E}^n_j \\
 & \mathcal{E}^n_{i''} \arrow[r, "u"] \arrow[u] & \mathcal{E}^n_{j''} \arrow[u] \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd} \tag{5}$$

dove le mappe verticali sono contemporaneamente morfismi u e v, è a maglie elementari commutative (anche per 4.3), e quindi è commutativo. Ciò prova che i morfismi w sono ben definiti.

IV. Ovviamente se $i \subset j$, w^n_{ij} è un morfismo u, mentre se $i \underset{n}{\sim} j$, $w^n_{ij} = v^n_{ij}$. Per i morfismi w non sussiste l'unicità della composizione; ad es. il morfismo composto

$$\mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}^n_{\alpha\alpha\alpha\alpha} \xrightarrow{v} \mathcal{E}^n_{\delta\delta\delta\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{6}$$

è sempre nullo, mentre $\mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{u} \mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta}$ è non nullo se $\mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta}$ non lo è; esempi più notevoli si possono ricavare dalle rappresentazioni di somma diretta del n^0 6. Però:

Proposizione 4.4. *Se $i \underset{n}{\sim} i'$, $j \underset{n}{\sim} j'$, $k \underset{n}{\sim} k'$ in Ω_*, e $i' \subset j' \subset k'$, allora $w^n_{jk} w^n_{ij} = w^n_{ik}$.*

---

[4] $\underset{n}{<}$ è riflessiva e non transitiva (in genere); estesa per transitività si banalizza: qualunque siano le quaterne $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ si ha: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \subset$ $\subset (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) \underset{n}{\sim} (\delta', \delta', \delta', \delta') \subset (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$.

DIM. Abbiamo un diagramma

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_i^n \arrow[r, "w"] \arrow[d, "v_1"] & \mathcal{E}_j^n \arrow[r, "w"] \arrow[d, shift left, "v_3"] & \mathcal{E}_k^n \\
\mathcal{E}_{i'}^n \arrow[r, "u_1"] \arrow[rr, bend right, "u_3"'] & \mathcal{E}_{j'}^n \arrow[r, "u_2"] \arrow[u, shift left, "v_2"] & \mathcal{E}_{k'}^n \arrow[u, "v_4"']
\end{tikzcd}
$$

a maglie commutative, ove v_2 e v_3 sono isomorfismi reciproci per 4.3; allora $w_{jk}^n w_{ij}^n = v_4 u_3 v_1$ coincide con w_{ik}^n, per definizione di quest'ultimo. c. v. d.

PROPOSIZIONE 4.5. *Se $i \underset{n}{\prec} j$ in Ω_* e i noccioli n-esimi di i e j non si incontrano, $w_{ij}^n = 0$. Se il nocciolo n-esimo di i è vuoto, $\mathcal{E}_i^n = 0$.*

DIM. Il morfismo w è dato da una composizione del tipo (4); i noccioli n-esimi di i', j' non si incontrano, essendo $i \underset{n}{\sim} i'$, $j \underset{n}{\sim} j'$. Posto $i' = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), j' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ si ha:

$$(\beta - \gamma) \cap (\beta' - \gamma') \cap \omega_n = \emptyset$$

quindi $\beta \cap \omega_n \subset ((\beta - \gamma) \cap \omega_n) \cup \gamma \subset \gamma' \cup \gamma = \gamma'$ (sfruttando $\beta \subset \beta'$, $\gamma \subset \gamma'$) e di conseguenza $A_\beta^n \subset A_{\gamma'}$; 3.2 prova allora che il morfismo u di $\mathcal{E}_{i'}^n$ in $\mathcal{E}_{j'}^n$ è nullo, onde $w_{ij}^n = 0$. Il secondo asserto segue dal primo per $i = j$. c. v. d.

V. Si può infine osservare che per $m = 1$ e $\omega = \mathbf{Z}$, Ω_* ha cinque classi di n-equivalenza per ogni intero n, delle quali solo due danno luogo ad invarianti omotopici: il funtore nullo e l'omologia in grado n; infatti, se i è una quaterna relativa a $\mathbf{Z}$ e (ζ, η) è la sua coppia n-esima, sono possibili i seguenti casi:

1) $\zeta = \eta = \emptyset$: $\qquad \mathcal{E}_i^n(A) = 0$

2) $\zeta = \eta = \{n\}$: $\qquad \mathcal{E}_i^n(A) = A^n$

3) $\zeta = \{n-1, n\},\ \eta = \{n\}:$ $\qquad \mathcal{E}_i^n(A) = Coker(A^{n-1} \xrightarrow{d} A^n)$

4) $\zeta = \{n\}, \eta = \{n, n+1\}:$ $\qquad \mathcal{E}_i^n(A) = Ker(A^n \xrightarrow{d} A^{n+1})$

5) $\zeta = \{n-1, n\}, \eta = \{n, n+1\}: \ \mathcal{E}_i^n(A) = H^n(A).$

Poiché per $m = 1$ Ω è totalmente ordinato, la quaterna i può sempre supporsi decrescente per 2, I, c). Ciò non vale per $m \geq 2$, anche a meno di n-equivalenza: cfr. fig. 4′.

5. Riduzione del calcolo di $\mathcal{E}_i^n$: quaterne n-ridotte.

I. Se $i = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ è una quaterna, diremo *coppia di i* la coppia $(\alpha - \gamma, \beta - \delta)$ di sottoinsiemi di ω; viceversa data una coppia (φ, ψ) di sottoinsiemi di ω, diremo che essa è *ammissibile* (risp. *stretta*) se proviene da una quaterna (risp. quaterna decrescente) nel modo detto. Se due quaterne hanno egual coppia sono n-equivalenti per ogni intero n.

PROPOSIZIONE 5.1. *Una coppia (φ, ψ) di sottoinsiemi di ω è ammissibile se e solo se:*

a) φ, ψ sono localmente chiusi in ω

b) $\varphi^* \cap \overline{\psi} \subset \varphi \cap \psi$.

In tal caso tra le quaterne che hanno coppia (φ, ψ) ce n'è una minima $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ ed una massima $(\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'')$ date da:

$$(1) \qquad \alpha' = \overline{\varphi} \cup \overline{\psi},\ \beta' = \overline{\psi},\ \gamma' = \alpha' - \varphi^*,\ \delta' = \beta' - (\varphi \cup \psi)^*$$

$$(2) \qquad \delta'' = \complement_\omega((\varphi \cup \psi)^*),\ \gamma'' = \complement_\omega(\varphi^*),\ \beta'' = \delta'' \cup \overline{\psi},\ \alpha'' = \gamma'' \cup \overline{\varphi} \cup \overline{\psi}.$$

Se $\varphi \subset \omega_n'$, $\psi \subset \omega_n''$ per un opportuno intero n, la coppia (φ, ψ) è ammissibile.

Dim. al n⁰ 13.

PROPOSIZIONE 5.2. *Una coppia ammissibile (φ, ψ) di sottoinsiemi di ω è stretta se e solo se $\varphi \cup \psi$ è localmente chiuso in ω. In tal caso* *tra le quaterne decrescenti che ad essa danno luogo ce n'è una minima* $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ *ed una massima* $(\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'')$ *date da:*

$$(3)\quad \alpha' = \bar{\varphi} \cup \bar{\psi},\ \beta' = \alpha' - (\varphi - \psi)^*,\ \gamma' = \alpha' - \varphi^*,\ \delta' = \alpha' - (\varphi \cup \psi)^*$$

$$(4)\quad \delta'' = \mathbf{C}_\omega((\varphi \cup \psi)^*),\ \gamma'' = \delta'' \cup \overline{\psi - \varphi},\ \beta'' = \delta'' \cup \bar{\psi},\ \alpha'' = \delta'' \cup \bar{\varphi} \cup \bar{\psi}.$$

Dim. al n^0 13.

Proposizione 5.3. *Per ogni intero n la coppia n-esima di una quaterna* (risp. *quaterna decrescente*) *è ammissibile* (risp. *stretta*).
Dim. al n^0 13.

II. Diremo *n-ridotta* una quaterna (decrescente o no) per cui la coppia e la coppia n-esima coincidono. Se $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ è ridotta relativamente a due interi distinti n, n' allora $\beta - \gamma \subset \omega_n \cap \omega_{n'} = \emptyset$ ed essa è ridotta relativamente ad ogni intero. Intuitivamente si può dire che tra le quaterne n-equivalenti ad una data quelle n-ridotte sono « le più semplici »; ne esistono sempre per il seguente corollario delle tre precedenti proposizioni.

Corollario 5.4. *Se i è una quaterna* (risp. *quaterna decrescente*) *esistono quaterne* (risp. *q. decrescenti*) *n-ridotte n-equivalenti ad i, ed esse sono tutte e sole le quaterne* (risp. *q. decrescenti*) *aventi per coppia la coppia n-esima* (ζ, η) *di i; tra esse ce n'è una minima ed una massima date dalle formule* (1) *e* (2) *di* 5.1 (risp. (3) *e* (4) *di* 5.2) *per* $\varphi = \zeta, \psi = \eta$. Dim. al n^0 13.

Il calcolo di $\mathcal{E}_i^n$ *può quindi sempre effettuarsi sostituendo ad i una quaterna* i_0 *n-ridotta, decrescente se i lo è.* Inoltre $\mathcal{E}_{i_0}^{n'} = 0$ per ogni intero $n' \neq n$ (per 4.5), e quindi, come R-moduli:

$$\mathcal{E}_i^n = \mathcal{E}_{i_0}^n = \mathcal{E}_{i_0}.$$

La minima quaterna (risp. q. decrescente) 7-ridotta 7-equivalente alla quaterna della fig. 1 è rappresentata in fig. 2′ (risp. 2″): leggere α', β', γ', δ' con l'aiuto di 5.1 (risp. 5.2), per $\varphi = \zeta$, $\psi = \eta$.

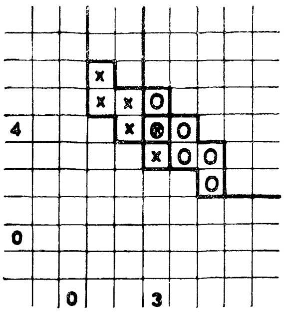

Fig. 2′

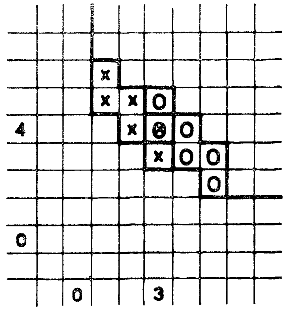

Fig. 2″

III. Infine una coppia (ζ, η) di sottoinsiemi di ω si dice *n-ridotta* se è ammissibile e le quaterne di cui è coppia sono n-ridotte; ciò equivale a dire (anche per 5.1) che:

$a)$ $\zeta \subset \omega_n'$ e $\eta \subset \omega_n''$

$b)$ ζ (risp. η) è il saturato di $\zeta \cap \eta$ per R_ζ (risp. R_η).

Essa è stretta se e solo se $\zeta \cup \eta$ è localmente chiuso in ω (5.2).

6. Riduzione del calcolo di $\mathcal{E}_i^n$: quaterne n-ridotte connesse.

I. Sia $i = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ una quaterna n-ridotta, $(\zeta, \eta) = (\alpha - \gamma, \beta - \delta)$ la sua coppia. Consideriamo la relazione di equivalenza R_i in $\zeta \cup \eta$, generata dalla relazione nelle variabili a e b:

$$(1) \qquad \text{«}(a, b \in \zeta \cup \eta)\ \&\ (aR_\zeta\, b \textit{ oppure } aR_\eta\, b)\text{»}.$$

R_i (che scriveremo anche $R_{\zeta\eta}$) è più fine di $R_{\zeta \cup \eta}$. Poniamo ancora $\Xi_i = (\zeta \cup \eta)/R_i$, insieme delle classi di equivalenza di R_i; se ω è trasversalmente finito, $\zeta \cup \eta$ e Ξ_i sono finiti.

Nella fig. 3 (dove $m = 2, \omega = \mathbf{Z}^2$) i è la quaterna decrescente 9-ridotta minima che dà luogo alla coppia (ζ, η) ivi segnata (cfr. 5.2); Ξ_i ha tre elementi distinti dal tratteggio:

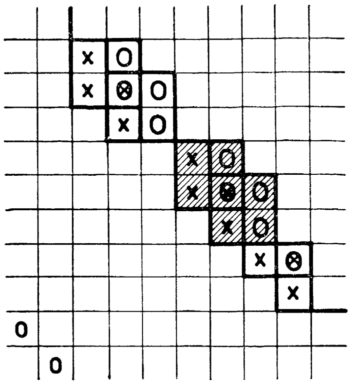

Fig. 3

II. Utilizziamo Ξ_i per decomporre il funtore $\mathcal{E}_i^n$ in somma diretta.

Proposizione 6.1. *Sia i una quaterna* (risp. *q. decrescente*) *n-ridotta, (ζ, η) la sua coppia; per ogni $\xi \in \Xi_i$ la coppia $(\zeta \cap \xi, \eta \cap \xi)$ è n-ridotta* (risp. *n-rid. stretta*); *dette i'_ξ e i''_ξ rispettivamente le quaterne minima e massima di cui $(\zeta \cap \xi, \eta \cap \xi)$ è coppia si ha: $i'_\xi \subset i \subset i''_\xi$.* Dim. al n^0 14.

Teorema 6.2. *Se i è una quaterna n-ridotta e A un oggetto di $C^m(\boldsymbol{R}, \omega)$, gli omomorfismi* (cfr. 6.1):

$$\mathcal{E}^n_{i'_\xi}(A) \xrightarrow{u} \mathcal{E}^n_i(A) \xrightarrow{u} \mathcal{E}^n_{i''_\xi}(A), \qquad \xi \in \Xi_i \tag{2}$$

sono una «rappresentazione completa di somma diretta» [5]), *naturale per morfismi di $C^m(R, \omega)$.* Dim. al n^0 14.

---

[5]) Una famiglia $M_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} M \xrightarrow{v_\lambda} M'_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ di R-omomorfismi è una *rappresentazione completa di somma diretta* se:

a) $v_\mu u_\lambda$ è isomorfismo se $\lambda = \mu$, nullo se $\lambda \neq \mu$

b) la somma dei sottospazi $Im\ u_\lambda$ di M è M.

In tal caso la famiglia dei monomorfismi u_λ dà una rappresentazione di M come somma diretta degli M_λ; viceversa data una tale rappresentazione è immediato derivarne una completa.

Corollario 6.3. *Se nelle stesse ipotesi i è decrescente, dette j'_ξ e j''_ξ rispettivamente le quaterne (n-ridotte) decrescenti minima e massima di cui $(\zeta \cap \xi, \eta \cap \xi)$ è coppia, $j'_\xi \underset{n}{\prec} i \underset{n}{\prec} j''_\xi$ e gli omomorfismi*

$$(3) \qquad \overset{n}{\mathcal{E}}_{j'_\xi}(A) \xrightarrow{w} \overset{n}{\mathcal{E}}_i(A) \xrightarrow{w} \overset{n}{\mathcal{E}}_{j''_\xi}(A), \qquad \xi \in \Xi_i$$

sono una rappresentazione completa di somma diretta [5]*, naturale.*

Dim. Se $\xi \in \Xi_i$, le quaterne $j'_\xi, j''_\xi, i'_\xi, i''_\xi$ (cfr. 6.1) sono n-equivalenti avendo egual coppia $(\zeta \cap \xi, \eta \cap \xi)$; la tesi segue allora immediatamente da 6.2 e dalla definizione dei morfismi w (4, III). c. v. d.

Sulla fig. 3 è facile individuare i sottoinsiemi $\zeta \cap \xi, \eta \cap \zeta$ e quindi le quaterne $i'_\xi, i''_\xi, j'_\xi, j''_\xi$. Si può altresì vedere che le relazioni $j'_\xi \underset{n}{\prec} i \underset{n}{\prec} j''_\xi$ possono non essere inclusioni.

III. Diremo che una quaterna n-ridotta i è *connessa* se Ξ_i ha un solo elemento; per 6.2, 6.3 *il calcolo di $\overset{n}{\mathcal{E}}_i$ può sempre effettuarsi sostituendo ad i quaterne n-ridotte e connesse, decrescenti se i è tale.* Una coppia n-ridotta (ζ, η) sarà detta *connessa* se le quaterne di cui è coppia sono tali: ciò equivale a dire che la relazione $R_{\zeta\eta}$ è sempre vera in $\zeta \cup \eta$.

7. Alcune formule per il calcolo di $\overset{n}{\mathcal{E}}_i(A)$.

I. Sia A un oggetto di $C^m(R, \omega)$; si è già visto (cfr. 3.1) l'isomorfismo naturale:

$$(1) \qquad \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) = \frac{A_\beta \cap d^{-1} A_\delta}{A_\gamma + dA_\alpha}$$

valido anche per complessi filtrati su un qualunque insieme preordinato. Solo per complessi m-upli abbiamo invece:

Proposizione 7.1. *Per ogni quaterna $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ c'è un isomorfismo naturale:*

$$(2) \qquad \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) = \frac{A_{\beta-\gamma} \cap (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta)}{A_{\beta-\gamma} \cap (A_\gamma + dA_\alpha)} \; ^{6)}$$

[6] $A_{\beta-\gamma}$ e A_ϑ sono sottomoduli graduati di A, ma in genere non sottocomplessi. I quozienti delle formule (2), (3) sono generalizzati (cfr. nota [1]); ordinari se $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ è decrescente.

e quindi :

$$\mathcal{E}^{n}_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) = \frac{A_{\vartheta} \cap (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_{\delta})}{A_{\vartheta} \cap (A_{\gamma} + dA_{\alpha})} \tag{3}$$ [6]

dove $\vartheta = (\beta - \gamma) \cap \omega_n$ *è il nocciolo n-esimo della quaterna data.* Dim. al n^0 15.

II. Per complessi *doppi* A in $C^2(R, \omega)$ vale poi la seguente formula (4), in cui intervengono i differenziali parziali d_1 e d_2 anziché quello totale, come nelle precedenti. Viene usato l'ordine *traverso* in $\mathbf{Z}^2$:

$$(p, q) \prec (p', q') \Longleftrightarrow (p \leq p' \ \& \ q \geq q').$$

Per esso gli ω_n' sono totalmente ordinati.

Teorema 7.2. *Sia* $m = 2$, *i una quaterna,* (ζ, η) *la sua coppia n-esima ; se* ζ e η *sono finiti e il nocciolo n-esimo* $\vartheta = \zeta \cap \eta$ *è costituito dal solo punto c, c'è un isomorfismo* (*naturale per mappe di* $C^2(R, \omega)$) :

$$\mathcal{E}^{n}_{i}(A) = \frac{(\overbrace{d_2^{-1}\, d_1\, d_2^{-1} \dots B_p}^{p} \cap \overbrace{d_1^{-1}\, d_2\, d_1^{-1} \dots B_q}^{q})^c}{(\underbrace{d_1\, d_2^{-1} d_1 \dots B_{r+1}}_{r} + \underbrace{d_2 d_1^{-1}\, d_2 \dots B_{s+1}}_{s})^c} \tag{4}$$

dove :

$$\begin{aligned} p &= Card\,\{a \mid a \in \eta - \vartheta, a \prec c\}, & q &= Card\,\{a \mid a \in \eta - \vartheta, a \succ c\} \\ r &= Card\,\{a \mid a \in \zeta - \vartheta, a \prec c\}, & s &= Card\,\{a \mid a \in \zeta - \vartheta, a \succ c\} \end{aligned} \tag{5}$$

e $B_h = A$ *se h è pari,* $B_h = 0$ *se h è dispari. Se p* (risp. *q, r, s*) *è nullo il termine corrispondente in* (4) *va sostituito con* A (risp. A, 0, 0). Dim. al n^0 15.

Osservo che una coppia n-ridotta (ζ, η) tale che $\zeta \cap \eta$ sia costituito da un punto è connessa; se ω è trasversalmente finito ζ ed η sono automaticamente finiti. In pratica pare che 7.2 (eventualmente mediante le decomposizioni in somma diretta del n^0 6) copra tutti i casi interessanti per complessi doppi; la formula si può comunque estendere ad una qualunque quaterna, ciò che non sarà qui fatto per evitare di introdurre complicate notazioni.

8. Invarianza omotopica dei funtori $\mathcal{E}_i^n$.

I. Una condizione sufficiente è data dal:

Teorema 8.1. *Sia $i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ una quaterna decrescente tale che gli antecedenti immediati*[7] *in ω di ogni punto di α_r $(1 < r \leq 4)$ stiano in α_{r-1}; il funtore $\mathcal{E}_i$ è allora invariante per omotopie di $C^m(R, \omega)$.*

Dim. Siano $f, g : A \longrightarrow B$ morfismi omotopi di $C^m(R, \omega)$: sono dati i morfismi graduati $s_h : A \longrightarrow B$ di grado $-e_h$ $(1 \leq h \leq m)$ tali che

$$f - g = \sum_{h=1}^{m} s_h \bar{d}_h + \bar{d}_h s_h, \qquad s_h \bar{d}_k + \bar{d}_k s_h = 0 \text{ se } h \neq k.$$

Sia A' l'R-modulo differenziale $\mathbf{Z}$-filtrato ottenuto munendo A del differenziale totale d e della filtrazione $(F_p A)_{p \in \mathbf{Z}}$ così definita:

$$F_p A = \begin{cases} A & \text{se } p < 1 \\ A_{\alpha_p} & \text{se } 1 \leq p \leq 4 \\ O & \text{se } p > 4. \end{cases} \tag{1}$$

Analogamente si definisce B' (le filtrazioni sono crescenti rispetto all'ordine opposto al naturale su $\mathbf{Z}$); f e g sono compatibili con la struttura detta; $s = \sum_{h=1}^{m} s_h : A' \longrightarrow B'$ è un omomorfismo verificante:

$$f - g = sd + ds \qquad s(F_p A) \subset F_{p-1} B$$

cioè è un'omotopia di ordine ≤ 1 delle mappe $f, g : A' \longrightarrow B'$, secondo la terminologia di Cartan-Eilenberg [2], p. 321.

Inoltre c'è un isomorfismo naturale

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i^n(A) &= Im\,(H(A_{\alpha_2}/A_{\alpha_4}) \longrightarrow H(A_{\alpha_1}/A_{\alpha_3})) \\ &= Im\,(H(F_2A/F_4A) \longrightarrow H(F_1A/F_3A)) = \\ &= \mathcal{E}_{1234}(A') = E_2^2(A') \end{aligned}$$

[7]) Gli antecedenti immediati di un punto a di $\mathbf{Z}^m$ sono ovviamente quelli contigui, ovvero i punti $a - e_h$ $(1 \leq h \leq m)$.

La prop. 3.1 del testo citato (p. 321) prova quindi la tesi. c. v. d.

Diremo *omotopicamente stabili* le quaterne verificanti la condizione detta in 8.1. Per 4.3 :

COROLLARIO 8.2. *Se i è una quaterna n-equivalente ad una quaterna omotopicamente stabile, $\mathcal{E}_i^n$ è invariante d'omotopia.*

II. Per $m = 2$ vale una caratterizzazione dei funtori invarianti $\mathcal{E}_i^n$, che non ho potuto estendere ad $m > 2$ (per $m = 1$ cfr. n^0 4, V):

TEOREMA 8.3. *Se $m = 2$ e la quaterna $i = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ soddisfa la condizione :*

(O_n) se $(p, q) \in (\beta - \gamma) \cap \omega_n$ allora $(p - 1, q), (p, q - 1), (p + 1, q), (p, q + 1)$ stanno in $(\alpha - \delta) \cup \complement\, \omega$

il funtore $\mathcal{E}_i^n$ è invariante per omotopie di $C^2(R, \omega)$. Tale condizione è anche necessaria se l'anello R non è nullo. Dim. al n^0 16.

La condizione (O_n) verte esclusivamente sulla coppia n-esima (ζ, η) di i: infatti i la verifica se e solo se

(O') se $a \in \zeta \cap \eta$, i punti di ω contigui ad a stanno in $\zeta \cup \eta$.

Quindi se (O_n) è soddisfatta da i lo è anche da tutte le quaterne n-equivalenti ad i, e inoltre se i è n-ridotta anche dalle i'_ξ, i''_ξ $(\xi \in \Xi_i)$ di 6.1.

III. Il teorema 8.3 non è conseguenza di 8.2 : basta considerare la coppia 3-ridotta in fig 4′, che soddisfa (O'), non è stretta per 5.2. e quindi (5.3) non è coppia terza di alcuna quaterna decrescente; anche limitandosi a quaterne decrescenti, la coppia 5-ridotta stretta della fig. 4″

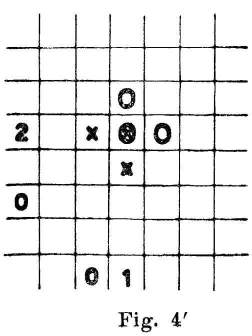

Fig. 4′

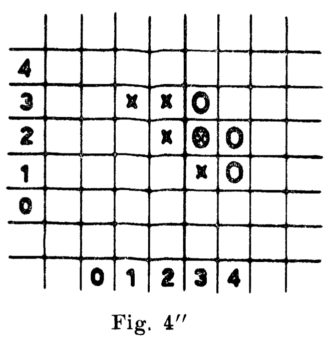

Fig. 4″

verifica (O') ma non esistono quaterne omotopicamente stabili di cui essa sia coppia quinta [8]).

9. Gli invarianti ${}^hE_r^{p,q}$, M_r^a, N_r^a.

I. Siano p, q interi, $r \geq 1$, $1 \leq h \leq m$. Si è visto (n⁰ 3) che:

(1)
$$ {}^hE_r^{p,q} = \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}^{p+q} $$

dove $\alpha = \varrho_h(p - r + 1)$, $\beta = \varrho_h(p)$, $\gamma = \varrho_h(p + 1)$, $\delta = \varrho_h(p + r)$; tali funtori sono quindi (cfr. 8.1) invarianti d'omotopia per $r \geq 2$, come ben noto. Il n⁰ 7 fornisce formule di calcolo per essi; in particolare per ogni complesso doppio A di R-moduli:

(2)
$$ {}'E_r^{p,q}(A) = \frac{(d_2^{-1}\, 0 \cap (d_1^{-1}\, d_2)^{r-1} A)^{p,q}}{((d_1\, d_2^{-1})^{r-1}\, 0 + d_2\, A)^{p,q}} $$ [9])

(3)
$$ {}''E_r^{q,p}(A) = \frac{((d_2^{-1}\, d_1)^{r-1} A \cap d_1^{-1}\, 0)^{p,q}}{(d_1\, A + (d_2\, d_1^{-1})^{r-1}\, 0)^{p,q}} $$

dove $(d_1\, d_2)^{r-1} A$, ad esempio, è un'abbreviazione per

$$ d_1^{-1}\, d_2 \ldots d_1^{-1}\, d_2\, A $$

in cui $d_1^{-1}\, d_2$ sia ripetuto $r - 1$ volte.

---

[8]) Supponiamo per assurdo che esista una tale quaterna $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$; $(1, 3) \in \zeta \subset \alpha - \gamma$, quindi $(1, 4) \in \alpha$; $(1, 4) \in \gamma$ perché altrimenti starebbe in $(\alpha - \gamma) \cap \omega_5$ e, essendo contiguo ad $(1, 3) \in \zeta$, starebbe anch'esso in ζ; allora pure $(2, 4) \in \gamma$ e, per la stabilità, $(2, 3) \in \beta$; ma $(2, 3) \in \zeta \subset \alpha - \gamma$, onde sta anche in $(\beta - \gamma) \cap \omega_5 = \zeta \cap \eta$, il che è falso.

[9]) Infatti, preso $\omega = \mathbf{Z}^2$ (non si hanno ipotesi sul supporto di A), si applica 7.2 alla quaterna $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ considerata in (1) per $h = 1$, osservando (cfr. fig. 1) che il nocciolo $(p + q)$-esimo di questa è il punto (p, q) e che le formule 7.(5) danno per essa i numeri: $1, 2(r - 1), 2(r - 1), 1$.

II. Ovviamente avendo informazioni sul supporto di A le formule date si possono in certi casi semplificare; se ad esempio A è un complesso (doppio) di cocatene, preso $\omega = N^2$ si ottiene da 7.2:

$$(4) \qquad 'E_r^{2,0}(A) = \frac{(d_2^{-1}\, 0 \cap d_1^{-1}\, 0)^{2,0}}{(d_1\, d_2^{-1}\; d_1 d_2^{-1}\, 0)^{2,0}} \qquad (r \geq 3).$$

III. Sia ora, per m arbitrario, $a \in \omega_n$; detta $e = (1, \dots 1)$ l'identità moltiplicativa di $\mathbf{Z}^m$, poniamo:

$$(5) \qquad N_r^a = \mathcal{E}^n_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}$$

$$(6) \qquad M_r^a = \mathcal{E}^n_{\alpha''\beta''\gamma''\delta''}$$

dove:

$$\alpha' = (a - (r-1)\, e)^-, \; \beta' = \bar{a}, \; \gamma' = (a + e)^-, \; \delta' = (a + re)^-$$

$$\alpha'' = \mathbf{C}_\omega\, ((a - re)^*), \; \beta'' = \mathbf{C}_\omega\, ((a - e)^*), \; \gamma'' = \mathbf{C}_\omega\, a^*, \; \delta'' = \\ = \mathbf{C}_\omega((a + (r-1)\, e)^*).$$

N_r^a e M_r^a sono invarianti d'omotopia per $r \geq 2$ (8.1). Le quaterne considerate (tutte decrescenti) e le loro coppie n-esime sono esemplificate nelle fig. 5′ e 5″ rispettivamente, per $m = 2$, $\omega = \mathbf{Z}^2$, $r = 3$, $a = (3, 4)$ e, di conseguenza, $n = 7$:

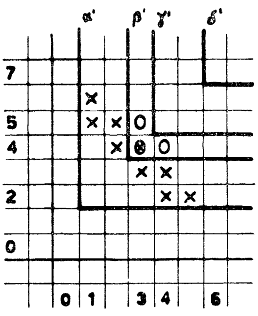

Fig. 5′

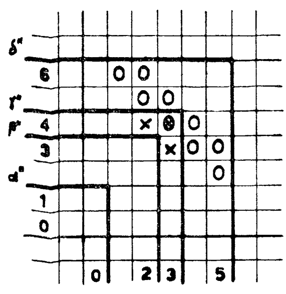

Fig. 5″

Si può osservare che le quaterne $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ e $(\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'')$ sono n-equivalenti rispettivamente a $(\alpha', \beta', \emptyset, \emptyset)$ e $(\omega, \omega, \gamma'', \delta'')$.

IV. Sia ora $m = 2$, $a = (p, q)$. Esaminando le quaterne considerate in (1), (5), (6), si riconosce che c'è un diagramma (commutativo) di morfismi u:

$$\begin{tikzcd} N_r^{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & 'E_r^{p,q} \arrow[d] \arrow[dl] \\ ''E_r^{q,p} \arrow[r] & M_r^{p,q} \end{tikzcd}$$

V. Per un complesso doppio A valgono le formule (ottenute da 7.2):

$$N_r^{p,q}(A) = \frac{(d_2^{-1}\, 0 \cap d_1^{-1}\, 0)^{p,q}}{((d_1\, d_2^{-1})^{r-1}\, 0 + (d_2\, d_1^{-1})^{r-1}\, 0)^{p,q}} \tag{8}$$

$$M_r^{p,q}(A) = \frac{((d_2^{-1}\, d_1)^{r-1}\, A \cap (d_1^{-1}\, d_2)^{r-1}\, A)^{p,q}}{(d_1\, A + d_2\, A)^{p,q}}\,. \tag{9}$$

10. Estensione ad una categoria abeliana arbitraria.

I. Sia $\mathscr{A}$ una categoria abeliana, $C^m(\mathscr{A}, \omega)$ la categoria, ancora abeliana, degli m-complessi a valori in $\mathscr{A}$ e supporto in ω: un oggetto è una famiglia $(A^c)_{c \in \mathbf{Z}^m}$ di oggetti di $\mathscr{A}$, ove $A^c = 0$ se $c \notin \omega$, munita di endomorfismi d_h di grado e_h $(1 \leq h \leq m)$ a quadrato nullo e commutanti. Si definiscono i $\bar{d}_h$ come al n⁰ 3.

Supponiamo che ω *sia trasversalmente finito, oppure* $\mathscr{A}$ *abbia somme dirette numerabili*: si potrà allora porre per ogni intero n:

$$A^n = \bigoplus_{c \in \omega_n} A^c$$

e ottenere così un oggetto $(A^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ di $\bar{G}(\mathscr{A})$; esso può essere dotato di un differenziale (cioè endomorfismo di grado 1, a quadrato nullo) d così definito: $A^n \xrightarrow{d} A^{n+1}$ è determinato dai morfismi

$$\sum_m^{h=1} \tilde{d}_h : A^c \to A^{n+1}, \qquad c \in \omega_n$$

dove $\tilde{d}_h$ è la composizione

$$A^c \xrightarrow{\bar{d}_h} A^{c+e_h} \xrightarrow{\text{iniez.}} A^{n+1}.$$

Infine una Ω-filtrazione crescente $(A_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ del complesso semplice costruito si ha ponendo:

$$A_\alpha = (A_\alpha^n)_{n \in \mathbf{Z}}\,, \text{ dove } A_\alpha^n = \bigoplus_{c \in \alpha \cap \omega_n} A_c\,.$$

Quindi, nelle ipotesi dette su ω od $\mathcal{A}$, è definito il funtore *contrazione* di $C^m(\mathcal{A}, \omega)$ nella categoria dei complessi Ω-filtrati a valori in $\mathcal{A}$, e di conseguenza, per 1, VI, a), il funtore $\mathcal{E}$ su $C^m(\mathcal{A}, \omega)$.

II. Quanto detto in questa II parte per $\mathcal{G}^R$ si può ora estendere ad $\mathcal{A}$, in alcuni punti per traduzione immediata, ma soprattutto facendo ricorso al teorema di immersione piena di Freyd-Mitchell (cfr. [7], teor. 7.2 p. 151).

Per 6.2 si conviene che una famiglia $M_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} M \xrightarrow{v_\lambda} M'_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ di morfismi in $\mathcal{A}$ è una rappresentazione completa di somma diretta se:

a) $v_\mu u_\lambda$ è isomorfismo se $\lambda = \mu$, nullo se $\lambda \neq \mu$

b) $(M_\lambda \xrightarrow{u_\lambda} M$ è una rappresentazione di somma diretta.

Se Λ è finito la condizione b) può sostituirsi con:

b') $\sum_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda v'_\lambda = 1_M$, dove $v'_\lambda = (v_\lambda u_\lambda)^{-1} v_\lambda$.

Osservo infine che la prima condizione di 3.2 dovrà essere scritta:

$$A_\beta^n \wedge d^{-1} A_\delta^{n+1} \wedge (dA_{\alpha'}^{n-1} \vee A_{\gamma'}^n) \subset dA_\alpha^{n-1} \vee A_\gamma^n$$

poichè qui non si può confrontare ad es. A_β^n, oggetto di $\mathcal{A}$, con $A_\delta = (A_\delta^n)_{n \in \mathbf{Z}}$, oggetto di $G(\mathcal{A})$. Modifiche analoghe per il resto di 3.2, etc.

PARTE III. — DIMOSTRAZIONI

11. Dimostrazioni dei numeri 1 e 2.

LEMMA 11.1. *Nella categoria abeliana $\mathcal{A}$ sia dato il diagramma commutativo:*

$$
(1)\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"] & B \arrow[d, "\beta"] & \\
E \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\zeta"] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dl, "\eta"] & D \\
F & &
\end{tikzcd}
$$

con riga e colonna esatte e $\eta\beta = 0$. *Allora la sequenza* :

$$
(2)\qquad 0 \longrightarrow Im\ \beta\alpha \xrightarrow{\iota} Im\ \beta \xrightarrow{\gamma'} Im\ \gamma\beta \longrightarrow 0
$$

dove ι *è l'inclusione e* γ' *è indotto da* γ *per restrizione, è esatta.*

Dim. Per il metateorema 2.8 di [7], p. 101, basta provare l'asserto per $\mathscr{A} = \mathcal{G}$, categoria dei gruppi abeliani.

Decomponiamo $\sigma = \beta\alpha$, β, $\tau = \gamma\beta$ nelle fattorizzazioni :

$$
A \xrightarrow{\sigma'} Im\ \sigma \xrightarrow{\sigma''} C, \quad B \xrightarrow{\beta'} Im\ \beta \xrightarrow{\beta''} C, \quad B \xrightarrow{\tau'} Im\ \tau \xrightarrow{\tau''} D.
$$

Che ι sia mono e γ' epi è ovvio ; inoltre $\gamma'\,\iota = 0$ perché :

$$
\tau''\,\gamma'\,\iota\sigma' = \gamma\beta\alpha = \gamma\,\varepsilon\,\delta = 0
$$

e σ' è epi, τ'' mono. Resta da provare che $Ker\ \gamma' \subset Im\ \iota = Im\ \beta\alpha$.

Sia $c \in Ker\ \gamma' \subset Im\ \beta \subset C$: sarà $c = \beta b$, $b \in B$, e poiché $\gamma c = \gamma' c = 0$ si avrà pure $c = \varepsilon e$, $e \in E$; allora $\zeta e = \eta\varepsilon e = \eta c = \eta\beta b = 0$ perché $\eta\beta = 0$ per ipotesi ; per l'esattezza della colonna esiste $a \in A$ tale che $e = \delta a$. e quindi :

$$
c = \varepsilon e = \varepsilon\delta a = \beta\alpha a \in Im\ \beta\alpha.
$$

c.v.d.

Il lemma generalizza il lemma 1.1 di Cartan-Eilenberg [2], p. 316 (porre $E = A$, $\delta = 1_A$, $F = 0$, $\zeta = \eta = 0$), e facilita molto la seguente dimostrazione.

Dimostrazione di 1.1. I primi tre assiomi ed il sesto sono ovviamente verificati da $\mathcal{E}$. (SP. 4) è provato in ogni dimensione n dal lemma 11.1 applicato al diagramma (a valori nella categoria abeliana $\mathscr{A}$):

$$\begin{tikzcd}
H^n(\gamma,\varkappa) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"] & H^n(\beta,\varkappa) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_0"] & H^n(\alpha,\varkappa) \arrow[dl, "u_2"] \\
H^n(\gamma,\delta) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d"] & H^n(\alpha,\delta) \arrow[r, "u"] \arrow[dl, "d_0"] & H^n(\alpha,\gamma) \\
H^{n+1}(\delta,\varkappa) & &
\end{tikzcd}$$

(i morfismi supplementari u_1, u_2 provano che: $d_0\,u_0 = (d_0\,u_2)\,u_1 = 0$).

(SP.5) si ottiene « incollando » per ogni intero n le sequenze esatte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\varkappa} \xrightarrow{u} \mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta} \longrightarrow \mathcal{D}^{n+1}_{\beta\gamma\delta\varkappa} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}^{n+1}_{\beta\gamma\delta\varkappa} \longrightarrow \mathcal{E}^{n+1}_{\gamma\delta\varkappa\lambda} \xrightarrow{u} \mathcal{E}^{n+1}_{\beta\delta\varkappa\lambda} \longrightarrow 0$$

(per $\mathcal{D}_{\beta\gamma\delta\varkappa}$ cfr. n^0 1, VII) che si ottengono applicando il lemma detto ai due diagrammi :

$$\begin{tikzcd}
H^n(\beta,\varkappa) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"] & H^n(\beta,\delta) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"] & H^n(\beta,\gamma) \arrow[dl, "u"] \\
H^n(\alpha,\varkappa) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"] & H^n(\alpha,\gamma) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "u"] & H^{n+1}(\gamma,\varkappa) \\
H^n(\alpha,\beta) & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H^n(\beta,\delta) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "u"] & H^{n+1}(\delta,\lambda) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"] & H^{n+1}(\delta,\varkappa) \arrow[dl, "u"] \\
H^n(\beta,\gamma) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] & H^{n+1}(\gamma,\varkappa) \arrow[r, "u"] \arrow[dl, "u"] & H^{n+1}(\beta,\varkappa) \\
H^{n+1}(\gamma,\delta) & &
\end{tikzcd}$$

Si osservi che, per (OP. 3), le immagini delle composizioni

$$H^n(\beta, \delta) \xrightarrow{u} H^n(\alpha, \gamma) \xrightarrow{d} H^{n+1}(\gamma, \varkappa)$$

$$H^n(\beta, \delta) \xrightarrow{d} H^{n+1}(\delta, \gamma) \xrightarrow{u} H^{n+1}(\gamma, \varkappa)$$

sono entrambe $\mathcal{D}^{n+1}_{\beta\gamma\delta k}$. c.v.d.

Passiamo ora al n^0 2.

LEMMA 11.2. *Dato il diagramma a valori in* $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ & \searrow^{\alpha} \quad {}^{\beta}\nearrow & \\ & E & \\ & \nearrow_{\gamma} \quad {}_{\delta}\searrow & \\ C & & D \end{array} \tag{3}$$

con diagonali esatte e $\beta\alpha = 0$, *c'è un isomorfismo*

$$H(A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} B) \longrightarrow Im\ \delta\gamma$$

naturale per traslazioni del diagramma (3).

DIM. $H(A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} B) = Ker\ \beta / Im\ \alpha = Im\ \gamma / Ker\ \delta$ per l'esattezza delle diagonali; c'è uno ed un solo isomorfismo $(Im\ \gamma / Ker\ \delta) \longrightarrow Im\ \delta\gamma$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{l} Im\ \gamma \xrightarrow{\delta'} Im\ \delta\gamma \\ \downarrow \pi \\ Im\ \gamma / Ker\ \delta \end{array} \tag{4}$$

dove δ' è l'epimorfismo definito da δ per restrizione e π è la proiezione canonica. Inoltre ogni traslazione di (3) dà una traslazione di (4) e quindi anche dell'isomorfismo detto. c.v.d.

DIMOSTRAZIONE di 2.1. Che la composizione sia nulla risulta dal diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta} & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}_{\gamma\delta\varkappa\lambda} & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}_{\varkappa\lambda\mu\nu} \\ \downarrow u & & \downarrow u & & \downarrow u \\ \mathcal{E}_{\alpha\alpha\alpha\alpha} & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}_{\alpha\alpha\varkappa\lambda} & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}_{\varkappa\lambda\mu\nu} \end{array}$$

Supposto $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ e $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ decrescenti, consideriamo per ogni intero n il diagramma in $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathcal{E}^{n-1}_{\alpha\beta\gamma\delta} \arrow[dr, "d"] & & \mathcal{E}^{n+1}_{\varkappa\lambda\mu\nu} \\ & \mathcal{E}^{n}_{\gamma\delta\varkappa\lambda} \arrow[ur, "d"] \arrow[dr, "u"] & \\ \mathcal{E}^{n}_{\gamma\delta\varkappa\mu} \arrow[ur, "u"] & & \mathcal{E}^{n}_{\beta\delta\varkappa\lambda} \end{tikzcd}$$

per 11.2 e (SP.5) c'è un isomorfismo naturale:

$$H\,(\mathcal{E}^{n-1}_{\alpha\beta\gamma\delta} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{n}_{\gamma\delta\varkappa\lambda} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{n+1}_{\varkappa\lambda\mu\nu}) = Im\,(\mathcal{E}^{n}_{\gamma\delta\varkappa\mu} \xrightarrow{u} \mathcal{E}^{n}_{\beta\delta\varkappa\lambda})$$

e, sfruttando il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}^{n}_{\gamma\delta\varkappa\mu} \arrow[r, "u'"] \arrow[rr, bend right, "u"'] & \mathcal{E}^{n}_{\beta\delta\varkappa\mu} \arrow[r, "u''"] & \mathcal{E}^{n}_{\beta\delta\varkappa\lambda} \end{tikzcd}$$

dove u' è epi, u'' mono (2, I, b)), si ha la tesi. c.v.d.

12. Dimostrazioni del n° 4.

Sarà utile per questo numero e per i successivi notare che se $a \in \omega_n$, $b \in \omega_{n'}$ e $a < b$ allora $n < n'$; se $a < b < c$ in $\omega'_n \cup \omega''_n$ allora $a \in \omega_{n-1}$, $b \in \omega_n$, $c \in \omega_{n+1}$ e tali punti sono contigui; ogni sottoinsieme di ω'_n è localmente chiuso in ω.

Dimostrazione di 4.1. Siano $i_1 = i$, $i_2 = j$, $i_3 = i \cap j$, $i_4 = i \cup j$, e per $1 \leq r \leq 4$:

$$i_r = (\alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \delta_r) \qquad \vartheta_r = (\beta_r - \gamma_r) \cap \omega_n$$

$$\zeta'_r = (\alpha_r - \gamma_r) \cap \omega'_n \qquad \eta'_r = (\beta_r - \delta_r) \cap \omega''_n$$

(ζ_r, η_r): coppia n-esima di i_r.

Per ipotesi $\zeta_1 = \zeta_2$, $\eta_1 = \eta_2$, $(\vartheta_1 = \vartheta_2)$. Quindi, essendo:

$$\vartheta_3 = (\beta_1 \cap \beta_2 - \gamma_1 \cap \gamma_2) \cap \omega_n, \quad \vartheta_4 = (\beta_1 \cup \beta_2 - \gamma_1 \cup \gamma_2) \cap \omega_n$$

si ha:

$$\vartheta_1 = \vartheta_1 \cap \vartheta_2 = (\beta_1 - \gamma_1) \cap (\beta_2 - \gamma_2) \cap \omega_n \subset \vartheta_3 , \vartheta_4$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_1 \cup \vartheta_2 = ((\beta_1 - \gamma_1) \cup (\beta_2 - \gamma_2)) \cap \omega_n \supset \vartheta_3 , \vartheta_4$$

cioè $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \vartheta_4$; chiameremo ϑ tale sottoinsieme.

Proviamo che $\zeta_1 = \zeta_3 = \zeta_4$, sfruttando le relazioni di immediata verifica:

$$\zeta_1' \cap \zeta_2' \subset \zeta_3' , \zeta_4' \qquad\qquad \zeta_1' \cup \zeta_2' \supset \zeta_3' , \zeta_4' .$$

Si deve provare che se $(a_r)_{0 \leq r \leq \bar{r}}$ è una spezzata di ω_n' avente $a_0 \in \vartheta$, e φ è l'insieme dei suoi punti, allora:

$$\varphi \subset \zeta_1 <==> \varphi \subset \zeta_3 <==> \varphi \subset \zeta_4 .$$

Ora: $\zeta_1 \subset \zeta_1' \cap \zeta_2' \subset \zeta_3' , \zeta_4'$ quindi $\varphi \subset \zeta_1$ implica $\varphi \subset \zeta_3 , \zeta_4$, ovviamente. Viceversa sia $\varphi \subset \zeta_3$ (risp. ζ_4) e proviamo che $\varphi \subset \zeta_1$ per induzione su $\bar{r}$; se $\bar{r} = 0$ ciò è ovvio; supponiamolo vero per $\bar{r} - 1 \geq 0$ e proviamolo per $\bar{r}$: per l'ipotesi d'induzione $\varphi - \{a_{\bar{r}}\} \subset \zeta_1$, e $a_{\bar{r}} \in \zeta_3$ (risp. ζ_4) che è contenuto in $\zeta_1' \cup \zeta_2'$; essendo $a_{\bar{r}}$ contiguo ad $a_{\bar{r}-1} \in$ $\in \zeta_1 = \zeta_2$ ne viene che $a_{\bar{r}} \in \zeta_1 = \zeta_2$, e quanto affermato è vero.

L'eguglianza $\eta_1 = \eta_3 = \eta_4$ si prova in modo analogo (cambiare ζ_r con η_r, ζ_r' con η_r', ω_n' con ω_n''). c.v.d.

Dimostrazione di 4.2. Sia $i = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $j = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, (ζ, η) la coppia n-esima comune di i e j, $\vartheta = \zeta \cap \eta$ il nocciolo n-esimo. Per 3.2 è sufficiente provare che:

$$a)\ A_\beta^n \cap (dA_{\alpha'} + A_{\gamma'}) \subset dA_\alpha + A_\gamma$$

$$b)\ A_{\beta'}^n \cap d^{-1} A_{\delta'} \subset (A_\beta \cap d^{-1} A_\delta) + A_{\gamma'} .$$

Proviamo a). Sia $x \in A_\beta^n \cap (dA_{\alpha'} + A_{\gamma'})$: allora $x = y + dz$ dove $y \in A_{\gamma'}^n$ e $z \in A_{\alpha'}^{n-1}$; poniamo inoltre:

$$z' = \sum_{a \in \zeta} z^a \qquad \text{(supposto: } \sigma(z') = \sigma(z) \cap \zeta)$$

onde $x = y + d(z - z') + dz'$, dove $dz' \in dA_\alpha$, e basta provare che $y + d(z - z') \in A_\gamma$. Sia $a \in \sigma(y + d(z - z'))$ e supponiamo per assurdo che $a \notin \gamma$; ci sono due casi.

— Se $a \notin \beta$ allora $x^a = 0$ e quindi:

$$(dz')^a = -(y + d(z - z'))^a \neq 0$$

deve perciò esistere un antecedente immediato [7] b di a in $\sigma(z') \subset \subset \zeta \subset \alpha$; allora anche a, maggiore di b (in ω) sta in α: $a \in (\alpha - \gamma) \cap \cap \omega'_n$, ed essendo a contiguo a $b \in \zeta$ sta anch'esso in ζ: $a \in \zeta \subset \alpha' - \gamma'$; allora $y^a = 0$ e quindi $(d(z - z'))^a \neq 0$: esiste perciò un antecedente immediato c di a tale che $(z - z')^c \neq 0$. Ora: $c \in \sigma(z - z') \subset \sigma(z) \subset \subset \alpha' \cap \omega_{n-1}$, e $c \notin \gamma'$ perché $c < a \in \zeta \subset \alpha' - \gamma'$: di conseguenza $c \in (\alpha' - \gamma') \cap \omega'_n$ ed essendo c contiguo ad $a \in \zeta$, ne viene che $c \in \zeta$, assurdo perché $c \in \sigma(z - z')$.

— Se invece $a \in \beta$ si ha subito $a \in (\beta - \gamma) \cap \omega_n = \vartheta \subset \zeta$, cioè $a \in \zeta$ e l'assurdo si prova come prima.

Proviamo b). Sia $x \in A^n_{\beta'} \cap d^{-1} A_{\delta'}$: posto

$$y = \sum_{a \in \eta} x^a$$

$x - y \in A_{\gamma'}$ perché se $a \in \sigma(x)$ e $a \notin \gamma'$ allora $a \in (\beta' - \gamma') \cap \omega_n = \vartheta \subset \eta$. Basta quindi provare che $y \in A_\beta \cap d^{-1} A_\delta$ per avere la tesi. Ma $y \in A_\beta$ perché $\sigma(y) = \sigma(x) \cap \eta \subset \beta$; sia $a \in \sigma(dy)$ e supponiamo per assurdo che $a \notin \delta$.

Poiché $(dy)^a \neq 0$ esiste un antecedente immediato b di a in $\sigma(y) \subset \eta \subset \beta$; allora anche a, essendo maggiore di b in ω, sta in β: $a \in (\beta - \delta) \cap \omega_{n+1}$ e, per la contiguità di a con $b \in \eta$, $a \in \eta$. Sia ora c un qualunque antecedente immediato di a, e proviamo che $x^c = y^c$; se $x^c = 0$ ciò è ovvio, per cui si può supporre $c \in \sigma(x) \subset \beta'$; ma $c < a \notin \delta'$ quindi $c \in (\beta' - \delta') \cap \omega_n$; poiché poi c è contiguo ad $a \in \eta$, ne viene $c \in \eta$ e $x^c = y^c$, come volevasi. Allora $(dx)^a = (dy)^a \neq 0$, quindi $a \in \delta'$ perché per ipotesi $x \in d^{-1} A_{\delta'}$, e ciò è assurdo perché $a \in \eta \subset \beta' - \delta'$. c.v.d.

13. Dimostrazioni del n. 5.

Dimostrazione di 5.1. Sia $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ una quaterna, $(\varphi, \psi) = (\alpha - \gamma, \beta - \delta)$ la sua coppia: φ, ψ sono allora localmente chiusi in ω e:

$$\varphi^* \cap \overline{\psi} = (\alpha - \gamma)^* \cap (\beta - \delta)^- \subset (\mathbf{C}_\omega \gamma)^* \cap \overline{\beta} = \beta - \gamma = \varphi \cap \psi.$$

Viceversa supponiamo che (φ, ψ) verifichi $a)$ e $b)$, e definiamo la quaterna $i' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ come in 5.(1):

$$\alpha' = \overline{\varphi} \cup \overline{\psi}, \ \beta' = \overline{\psi}, \gamma' = \alpha' - \varphi^*, \ \delta' = \beta' - (\varphi \cup \psi)^*$$

la coppia di tale quaterna è (φ, ψ):

$$\alpha' - \gamma' = \alpha' - (\alpha' - \varphi^*) = \alpha' \cap \varphi^* = (\overline{\varphi} \cap \varphi^*) \cup (\overline{\psi} \cap \varphi^*) =$$
$$= \varphi \cup (\varphi \cap \psi) = \varphi$$

$$\beta' - \delta' = \beta' - (\beta' - (\varphi \cup \psi)^*) = \beta' \cap (\varphi \cup \psi)^* =$$
$$= (\overline{\psi} \cap \varphi^*) \cup (\overline{\psi} \cap \psi^*) = (\psi \cap \varphi) \cup \psi = \psi$$

onde (φ, ψ) è ammissibile; se poi $i = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ è una qualunque quaterna avente per coppia (φ, ψ), $i' \subset i$ perché:

$$\alpha' = \overline{\varphi \cup \psi} \subset \overline{\alpha} = \alpha \qquad \qquad \beta' = \overline{\psi} \subset \overline{\beta} = \beta$$
$$\gamma' = \alpha' - \varphi^* \subset \alpha - \varphi = \alpha - (\alpha - \gamma) = \gamma$$
$$\delta' = \beta' - (\varphi \cup \psi)^* \subset \beta - \psi = \beta - (\beta - \delta) = \delta.$$

Dimostrazione analoga per la quaterna massima. L'ultima affermazione è pressoché immediata sfruttando le condizioni $a)$ e $b)$. c.v.d.

DIMOSTRAZIONE DI 5.2. Sia $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ una quaterna decrescente, $(\varphi,\psi) = (\alpha - \gamma, \beta - \delta)$ la sua coppia: allora $\varphi \cup \psi$ coincide con $\alpha - \delta$, che è localmente chiuso in ω. Viceversa sia (φ, ψ) una coppia ammissibile con $\varphi \cup \psi$ localmente chiuso in ω, e definiamo la quaterna decrescente $i' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ come in 5.(3); come visto in 5.1, $\alpha' - \gamma' = \varphi$; inoltre sfruttando le condizioni $a)$, $b)$ di 5.1:

$$\beta' - \delta' = (\alpha' - (\varphi - \psi)^*) - (\alpha' - (\varphi \cup \psi)^*) =$$
$$= (\alpha' \cap (\varphi \cup \psi)^*) - (\varphi - \psi)^* = (\varphi \cup \psi) - (\varphi - \psi)^* =$$
$$= \psi - (\varphi - \psi)^*$$

ma :

$$(\varphi - \psi)^* = (\varphi - (\varphi \cap \psi))^* = (\varphi - (\varphi^* \cap \bar{\psi}))^* \subset (\varphi^* - \bar{\psi})^* =$$
$$= \varphi^* - \bar{\psi} \subset \complement\, \psi$$

quindi $\beta' - \delta' = \psi$, e (φ, ψ) è ammissibile; se poi $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ è una qualunque quaterna *decrescente* avente coppia (φ, ψ), abbiamo $\alpha' \subset \subset \alpha$, $\gamma' \subset \gamma$ (per 5.1) e :

$$\beta' = \alpha' - (\varphi - \psi)^* \subset \alpha - (\alpha - \beta) = \beta$$

$$\delta' = \alpha' - (\varphi \cup \psi)^* \subset \alpha - (\alpha - \delta) = \delta. \qquad \text{c.v.d.}$$

Dimostraziome di 5.3. Sia $i = (\alpha, \beta. \gamma, \delta)$ una quaterna, (ζ, η) la sua coppia n-esima : essa è ammissibile per l'ultimo asserto di 5.1 ; per 5.2 resta da provare che se i è decrescente $\zeta \cup \eta$ è localmente chiuso in ω : siano $a, b \in \zeta \cup \eta$, $c \in \omega$, $a < c < b$: si deve provare che $c \in \zeta \cup \eta$. Poiché $\zeta \cup \eta \subset \omega_n' \cup \omega_n''$ i tre punti sono contigui e $a \in \omega_{n-1}$, $c \in \omega_n$, $b \in \omega_{n+1}$; quindi $a \in \zeta \subset \alpha - \gamma$, $b \in \eta \subset \beta - \delta$ e di conseguenza $c \in (\alpha - \delta) \cap \omega_n$; ma $(\alpha - \delta) = (\alpha - \gamma) \cup (\beta - \delta)$ perché i è decrescente, per cui a sta in ζ oppure in η. c.v.d.

Dimostrazione di 5.4. Sia i una quaterna, (ζ, η) la sua coppia n-esima. Se $i_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0)$ è una quaterna avente per coppia (ζ, η), il nocciolo n-esimo di i_0 è

$$(\beta_0 - \gamma_0) \cap \omega_n = \zeta \cap \eta \cap \omega_n = \zeta \cap \eta$$

cioè quello di i; se ne deduce facilmente che la coppia n-esima di i_0 è proprio (ζ, η), cioè i_0 è n-ridotta n-equivalente ad i. Il viceversa è immediato. Che esistano di tali quaterne (e che ne esistano di decrescenti se i lo è) è affermato da 5.3. L'ultimo asserto segue da 5.1 (risp. 5.2). c.v.d.

14. Dimostrazioni del n⁰ 6.

Dimostrazione di 6.1. Sia i una quaterna n-ridotta, $(\zeta, \eta) = = (\alpha - \gamma, \beta - \delta)$ la sua coppia, $\xi \in \Xi_i$: $(\zeta \cap \xi, \eta \cap \xi)$ è ammissibile per 5.1 ; proviamo che è n ridotta (5, III). Sia $a \in \zeta \cap \xi$: esiste allora, per definizione di coppia n-esima, una spezzata $\tau = (a_r)_{0 \leq r \leq \bar{r}}$ di punti di ζ, con $a_0 \in \vartheta$ e $a_{\bar{r}} = a$; i punti di τ sono R_i-equivalenti, quindi $a \in \xi$ implica che τ sia contenuta in ξ : ne viene $a\, R_{\zeta \cap \xi}\, a_0$, $a_0 \in \vartheta \cap \xi = (\zeta \cap \xi) \cap (\eta \cap \xi)$; analogamente si prova che $\eta \cap \xi$ è il saturato di $\vartheta \cap \xi$ per $R_{\eta \cap \xi}$.

Sia ora $i' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ la minima quaterna avente per coppia $(\zeta \cap \xi, \eta \cap \xi)$, e proviamo che $i' \subset i$ sfruttando 5.1 :

— $\alpha' = ((\zeta \cap \xi) \cup (\eta \cap \xi))^- = \bar{\xi} \subset \alpha$. $\qquad \beta' = (\eta \cap \xi)^- \subset \beta$

— $\gamma' = \alpha' - (\zeta \cap \xi)^* = \bar{\xi} - (\zeta \cap \xi)^*$ è contenuto in γ perché se $a \in \bar{\xi} - \gamma \subset \alpha - \gamma = \zeta$ esiste $b \in \xi$, $b \leq a$; quindi $b \in \alpha - \gamma = \zeta$ ed essendo $\zeta \subset \omega'_n$, o il punto a coincide con $b \in \zeta \cap \xi$, oppure a è contiguo ad esso, il che porta ancora ad $a \in \zeta \cap \xi$.

— $\delta' = \beta' - ((\zeta \cap \xi) \cup (\eta \cap \xi))^* = (\eta \cap \xi)^- - \xi^*$ è contenuto in δ, come si vede con ragionamento analogo al precedente.

Dimostrazione simile per la quaterna massima. Supponiamo infine che i sia decrescente e proviamo che la coppia ammissibile $(\zeta \cap \xi, \eta \cap \xi)$ è stretta : per 5.2 ciò equivale a dire che $(\zeta \cap \xi) \cup (\eta \cap \xi) = \xi$ è localmente chiuso in ω. Siano $a, b \in \xi$, $c \in \omega$, $a < c < b$ e proviamo che $c \in \xi$; poiché $\xi \subset \zeta \cup \eta \subset \omega'_n \cup \omega''_n$, i tre punti sono contigui e $a \in \omega_{n-1}$, $c \in \omega_n$, $b \in \omega_{n+1}$: allora $a \in \zeta = \alpha - \gamma$, $b \in \eta = \beta - \delta$ e $c \in (\alpha - \delta) = \zeta \cup \eta$; quindi c sta in ξ, per la contiguità con a e b.

c.v.d.

Dimostrazione di 6.2. Per 6.1 abbiamo i morfismi u :

$$\mathcal{E}^n_{i'_\xi}(A) \xrightarrow{u'_\xi} \mathcal{E}^n_i(A) \xrightarrow{u''_\varepsilon} \mathcal{E}^n_{i''_\varepsilon}(A) \qquad\qquad \xi, \varepsilon \in \Xi_i$$

la cui composizione è il morfismo u tra i termini estremi ; quindi : se $\xi = \varepsilon$, essa è un isomorfismo per 4.2 (i'_ξ e i''_ξ sono n-equivalenti per loro definizione), mentre se $\xi \neq \varepsilon$, è nulla per 4.5 (i noccioli n-esimi di i'_ξ , i''_ε sono rispettivamente $\vartheta \cap \xi$, $\vartheta \cap \varepsilon$; ma ξ ed ε sono disgiunti come classi di equivalenza di $\zeta \cup \eta$).

Resta da provare che $\Sigma_\xi \, Im\, u'_\xi = \mathcal{E}^n_i(A)$; posto $i'_\xi = (\alpha_\xi, \beta_\xi, \gamma_\xi, \delta_\xi)$, abbiamo per 3.1 un diagramma commutativo :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}^n_{i'_\xi}(A) & \xrightarrow{u'_\xi} & \mathcal{E}^n_i(A) \\
\| & & \| \\
\dfrac{A^n_{\beta_\xi} \cap d^{-1} A_{\delta_\xi}}{A^n_{\gamma_\xi} + d\, A^{n-1}_{\alpha_\xi}} & \xrightarrow{u_\xi} & \dfrac{A^n_\beta \cap d^{-1} A_\delta}{A^n_\gamma + dA^{n-1}_\alpha}
\end{array}$$

Poiché:

$$\sum_{\xi \in \Xi_i} Im\, u_\xi = \frac{\Sigma_\xi (A^n_{\beta_\xi} \cap d^{-1} A_{\delta_\xi})}{A^n_\gamma + dA^{n-1}_\alpha}$$

è sufficiente provare che:

$$A^n_\beta \cap d^{-1} A_\delta \subset \sum_{\xi \in \Xi_i} (A_{\beta_\xi} \cap d^{-1} A_{\delta_\xi}) + A_\gamma + dA_\alpha .$$

Sia $x \in A^n_\beta \cap d^{-1} A_\delta$, e per ogni $\xi \in \Xi_i$ poniamo:

$$x_\xi = \sum_{a \in \xi} x^a , \quad x' = \Sigma_\xi\, x_\xi .$$

Poichè $\bigcup_{\xi \in \Xi_i} \xi = \zeta \cup \eta$, $\sigma(x - x') \subset \sigma(x) - \eta \subset \beta - (\beta - \delta) = \delta$, quindi $x - x' \in A_\gamma$, e resta da verificare che $x_\xi \in A_{\beta_\xi} \cap d^{-1} A_{\delta_\xi}$ (per ogni $\xi \in \Xi_i$) per avere la tesi; si noti che, essendo $\sigma(x)$ finito, solo un numero finito di x_ξ sono non nulli.

Anzitutto $x_\xi \in A_{\beta_\xi}$ perché:

$$\sigma(x_\xi) = \sigma(x) \cap \xi \subset \beta \cap \xi = (\beta - \delta) \cap \xi = \eta \cap \xi = \beta_\xi - \delta_\xi \subset \beta_\xi .$$

Sia ora $a \in \sigma(dx_\xi)$ e supponiamo per assurdo che $a \notin \delta_\xi$; di conseguenza esiste un antecedente immediato b di a, che sta in $\sigma(x_\xi) \subset \beta_\xi$: allora $a > b$ (in ω) implica $a \in \beta_\xi$; per ipotesi $a \notin \delta_\xi$, quindi $a \in \beta_\xi - \delta_\xi$. Detto c un qualunque antecedente immediato di a, proviamo che $x^c_\xi = x^c$; se $x^c = 0$ ciò è ovvio, altrimenti $c \in \sigma(x) \subset \beta$ e $c \notin \delta$ perché $c < a$, ed a sta in $\eta \cap \xi \subset \beta - \delta$: allora $c \in \beta - \delta = \eta$, ed essendo contiguo ad $a \in \eta \cap \xi$ sta anch'esso in ξ, onde $x^c_\xi = x^c$, come volevasi. Ne viene $(dx)^a = (dx_\xi)^a \neq 0$, quindi $a \in \sigma(dx) \subset \delta$ (perché $x \in d^{-1} A_\delta$), assurdo perché $a \in \eta \cap \xi \subset \beta - \delta$.

La naturalezza della rappresentazione è ovvia, trattandosi di morfismi u. c.v.d.

15. Dimostrazioni del n. 7.

Dimostrazione di 7.1. Per 3.1 abbiamo un isomorfismo naturale:

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) = \frac{A_\beta \cap d^{-1} A_\delta}{A_\gamma + dA_\alpha} = \frac{(A_\beta \cap d^{-1} A_\delta) + A_{\beta \cap \gamma}}{A_\gamma + dA_\alpha}$$

e, per la modularità del reticolo dei sottomoduli di A:

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) = \frac{A_\beta \cap (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta)}{A_\gamma + dA_\alpha}.$$

Basta allora provare la biiettività dell'omomorfismo (indotto dalle inclusioni):

$$\frac{A_{\beta-\gamma} \cap (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta)}{A_{\beta-\gamma} \cap (A_\gamma + dA_\alpha)} \to \frac{A_\beta \cap (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta)}{A_\gamma + dA_\alpha}.$$

Esso è iniettivo perché:

$$(A_{\beta-\gamma} \cap (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta) \cap (A_\gamma + dA_\alpha) \subset A_{\beta-\gamma} \cap (A_\gamma + dA_\alpha).$$

È suriettivo perché:

$$(A_{\beta-\gamma} \cap (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta)) + (A_\gamma + dA_\alpha) \supset$$

$$\supset (A_{\beta-\gamma} \cap (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta)) + A_{\beta \cap \gamma} =$$

$$= (A_{\beta-\gamma} + A_{\beta \cap \gamma}) \cap (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta) = A_\beta \cap (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta). \qquad \text{c.v.d.}$$

Dimostrazione di 7.2. Posso supporre i n-ridotta (5, II). Poiché $A_\vartheta = A^c$, per 7.1 è sufficiente provare che:

$$a)\ (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta)^c = (\overbrace{d_2^{-1}\, d_1\, d_2^{-2} \ldots B_p}^{p} \cap \overbrace{d_1^{-1}\, d_2\, d_1^{-1} \ldots B_q}^{q})^c$$

$$b)\ (A_\gamma + dA_\alpha)^c = (\overbrace{d_1\, d_2^{-1}\, d_1 \ldots B_{r+1}}^{r} + \overbrace{d_2\, d_1^{-1}\, d_2 \ldots B_{s+1}}^{s})^c.$$

Dimostriamo a). Siano $c_0 = c$, e (ricordando che $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$):

$$c_1 = c + e_1\,,\; c_2 = c_1 - e_2\,,\; c_3 = c_2 + e_1\,,\; c_4 = c_3 - e_2\,, \ldots$$

$$c_{-1} = c + e_2\,,\; c_{-2} = c_{-1} - e_1\,,\; c_{-3} = c_{-2} + e_2\,,\; c_{-4} = c_{-3} - e_1\,, \ldots$$

Essendo $\vartheta = \{c\}$, $\eta - \vartheta = (\beta \cap \gamma) - \delta$ è costituito dai punti c_t, per $-p \leq t \leq q$ e $t \neq 0$. Indichiamo inoltre con $\bar{p}$ e $\bar{q}$ le parti intere di $p/2$ e $q/2$.

Sia x un elemento del secondo membro della a): ciò equivale a dire che $x \in A^c$ ed esistono $x_t \in A^{c_{2t}}$ $(-\bar{p} \leq t \leq \bar{q},\ t \neq 0)$ tali che, posto $x_0 = x$, si abbia:

(1) $\bar{d}_1\, x_t = \bar{d}_2\, x_{t+1}$ per $-\bar{p} \leq t < \bar{q}$

(2) $\bar{d}_2\, x_{-\bar{p}} = 0$ se p è dispari

(3) $\bar{d}_1\, x_{\bar{q}} = 0$ se q è dispari.

Posto:

$$z = \sum_{-\bar{p}}^{\bar{q}}{}_t\, (-1)^t\, x_t$$

$\sigma(x - z)$ è costituito al più dai punti c_{2t} $(-\bar{q} \leq t \leq \bar{p},\ t \neq 0)$ quindi è contenuto in $\eta - \vartheta$ e $x - z \in A_{\beta \cap \gamma}$; basta allora provare che $dz \in A_\delta$ per avere $x \in (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta)^c$. Per (1) è facile vedere che:

$$dz = (-1)^{\bar{q}}\, \bar{d}_1\, x_{\bar{q}} + (-1)^{\bar{p}}\, \bar{d}_2\, x_{-\bar{p}}\,.$$

Ora: $\bar{d}_1\, x_{\bar{q}} \in A_\delta$ perché se q è dispari $\bar{d}_1\, x_{\bar{q}} = 0$ per (3), mentre se $q = 2\bar{q}$ il suo supporto è costituito al più dal punto $c_{q+1} = c_{2\bar{q}} + e_1 > c_q \in \beta - \delta$: allora c_{q+1} sta in $\beta \cup \complement\, \omega$, e poichè non sta in $\beta - \delta$, sta anche in $\delta \cup \complement\, \omega$, e quanto asserito è vero. Analogamente si prova che $\bar{d}_2\, x_{-\bar{p}} \in A_\delta$.

Viceversa sia $x \in (A_{\beta \cap \gamma} + d^{-1} A_\delta)^c$: allora $dx \in dA_{\beta \cap \gamma} + A_\delta$, cioè $dx = y + dz$, $y \in A_\delta$, $z \in A_{\beta \cap \gamma}$. Possiamo supporre $\sigma(z) \subset \complement\, \delta$ perché altrimenti si sostituisce z con $z' = \sum_{a \notin \delta} z^a$ e y con $y' = y + d(z - z')$: infatti $z - z' \in A_\delta$ e quindi anche $y' \in A_\delta$.

Poniamo $x_0 = x$ e:

$$x_t = -(-1)^t\, z^{c_{2t}} \qquad \text{per } -\bar{p} \leq t \leq \bar{q},\ t \neq 0$$

e verifichiamo che gli x_t soddisfano le condizioni (1), (2), (3). Se $q \geq 1$:

$$\bar{d}_1 x_0 = \bar{d}_1 x = (dx)^{c_1} = y^{c_1} + \bar{d}_1 z^c + \bar{d}_2 z^{c_2} = \bar{d}_2 z^{c_2} = \bar{d}_2 x_1 \tag{4}$$

(infatti $c_1 \notin \delta$ perché $q \geq 1$ mentre $y \in A_\delta$; $c \in \beta - \gamma$ mentre $z \in A_\gamma$). Analogamente, se $p \geq 1$:

$$\bar{d}_2 x_0 = \bar{d}_1 x_{-1} . \tag{5}$$

Sia ora $-p-1 \leq 2t \leq q-1$, $t \neq 0$, $t \neq -1$:

$$(dz)^{c_{2t+1}} = (dx)^{c_{2t+1}} - y^{c_{2t+1}} = 0$$

come si vede facilmente; quindi :

$$\bar{d}_1 x_t = -(-1)^t \bar{d}_1 (z^{c_{2t}}) = (-1)^t \bar{d}_2 (z^{c_{2t+2}}) = \tag{6}$$

$$= -(-1)^{t+1} \bar{d}_2 (z^{c_{2(t+1)}}) = \bar{d}_2 x_{t+1} \text{ per } -p-1 \leq 2t \leq q-1, t \neq 0, t \neq -1.$$

Da (4), (5), (6) si deduce immediatamente (1); (6) implica pure (2) e (3), perché se q è dispari : $q = 2\bar{q} + 1$ e

$$\bar{d}_1 x_{\bar{q}} = \bar{d}_2 x_{\bar{q}+1} = (-1)^{\bar{q}} \bar{d}_2 z^{c_{q+1}}$$

e c_{q+1} sta in $\delta \cup \complement \omega$ (se q è dispari) come già visto, mentre $\sigma(z)$ è contenuto in $\complement \delta$; ciò prova (3); discorso analogo per (2).

Il punto *b*) si dimostra in modo simile. c.v.d.

16. Dimostrazioni del n. 8.

DIMOSTRAZIONE DI 8.3. Siano A, B oggetti di $C^2(R, \omega)$, e s_1, $s_2 : A \longrightarrow B$ omomorfismi di gradi $(-1, 0)$, $(0, -1)$ tali che :

$$s_1 \bar{d}_2 + \bar{d}_2 s_1 = s_2 \bar{d}_1 + \bar{d}_1 s_2 = 0.$$

$D = s_1 \bar{d}_1 + \bar{d}_1 s_1 + s_2 \bar{d}_2 + \bar{d}_2 s_2$ è un morfismo di A in B (di grado $(0, 0)$) e si deve provare che $D_* = \mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta}(D)$ è nullo. Per 3.1 c'è un diagramma commutativo :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta}(A) & \xrightarrow{D_*} & \mathcal{E}^n_{\alpha\beta\gamma\delta}(B) \\
\Big\| & & \Big\| \\
\dfrac{A^n_\beta \cap d^{-1} A_\delta}{A^n_\gamma + dA^{n-1}_\alpha} & \xrightarrow{D'_*} & \dfrac{B^n_\beta \cap d^{-1} B_\delta}{B^n_\gamma + dB^{n-1}_\alpha}
\end{array}$$

e quindi basta verificare che $D(A^n_\beta \cap d^{-1} A_\delta) \subset B_\gamma + dB_\alpha$.

Sia $x \in A^n_\beta \cap d^{-1} A_\delta$: $Dx = s_1 \bar{d}_1 x + \bar{d}_1 s_1 x + s_2 \bar{d}_2 x + \bar{d}_2 s_2 x$, e:

(1) $$s_1 \bar{d}_1 x + \bar{d}_1 s_1 x = \sum_{(p,q)\in\omega} (s_1 \bar{d}_1 x^{p-1,q} + \bar{d}_1 s_1 x^{p,q-1}).$$

Distinguiamo due casi:

a) $(p-1, q)$ e $(p, q-1)$ non stanno in $\sigma(x) - \gamma$: in tal caso $s_1 \bar{d}_1 x^{p-1,q}$ e $\bar{d}_1 s_1 x^{p,q-1}$ stanno in B_γ.

b) $(p-1, q)$ o $(p, q-1)$ sta in $\sigma(x) - \gamma$; consideriamo la relazione:

$$s_1 \bar{d}_1 x^{p-1,q} + \bar{d}_1 s_1 x^{p,q-1} = (s_1 \bar{d}_1 x^{p-1,q} + s_1 \bar{d}_2 x^{p,q-1}) +$$
$$+ (\bar{d}_2 s_1 x^{p,q-1} + \bar{d}_1 s_1 x^{p,q-1}) = s_1 (dx)^{p,q} + d(s_1 x^{p,q-1}).$$

Ora: $\sigma(x) - \gamma \subset (\beta - \gamma) \cap \omega_n$ perché $x \in A^n_\beta$; sfruttando quindi la proprietà (0_n) soddisfatta da $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ si ottiene che (p, q) e $(p-1, q-1)$ stanno in $(\alpha - \delta) \cup \complement\omega$ perché $(p-1, q)$ o $(p, q-1)$ sta in $(\beta - \gamma) \cap \omega_n$; di conseguenza $(dx)^{p,q} = 0$, essendo $dx \in A_\delta$, e $d(s_1 x^{p,q-1}) \in dB_\alpha$. Ciò prova che $s_1 \bar{d}_1 x^{p-1,q} + \bar{d}_1 s_1 x^{p,q-1} \in dB_\alpha$.

In definitiva tutti i termini della somma (1) stanno in B_γ o in dB_α, e essa sta in $B_\gamma + dB_\alpha$.

Analogamente si prova che

$$s_2 \bar{d}_2 x + \bar{d}_2 s_2 x = \sum_{(p,q)\in\omega} (s_2 \bar{d}_2 x^{p,q-1} + \bar{d}_2 s_2 x^{p-1,q})$$

sta in $B_\gamma + dB_\alpha$.

Per la *necessità*: se la quaterna $i = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ non verifica (0_n) esistono un punto $a \in (\beta - \gamma) \cap \omega_n$ ed un punto b contiguo ad a, $b \notin (\alpha - \delta) \cup \complement\, \omega$: due casi possono darsi. Se b è un antecedente immediato di a: $b = a - e_k$ $(1 \leq k \leq m)$, allora $b \notin \gamma$ e quindi per la ipotesi $b \in \omega - \alpha$; costruiamo il complesso A di $C^2(R, \omega)$ ponendo

$$A^a = A^b = R \qquad (A^b \overset{\bar{d}_k}{\dashrightarrow} A^a) = 1_R$$

e nulli gli altri dati; un'omotopia $(s_h)_{1 \leq h \leq m}$ di A in sé si ha ponendo

$$(A^a \xrightarrow{s_k} A^b) = 1_R$$

e zero negli altri casi. Si vede facilmente, ad es. con 3.1, che

$$\mathcal{E}_i^n(sd + ds) : \mathcal{E}_i^n(A) \longrightarrow \mathcal{E}_i^n(A)$$

è il morfismo identico di R, non nullo se R non lo è.

Se b è un successore immediato di a si costruisce un analogo controesempio. c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. Buchsbaum. *Exact categories and duality.* Trans. A.M.S. 80 (1955), p. 1-34.

[2] H. Cartan - S. Eilenberg. Homological Algebra. Princeton U.P., 1956.

[3] R. Deheuvels. *Topologie d'une fonctionnelle.* Ann. of Math. 61 (1955), p. 13-72.

[4] S. Eilenberg. *La suite spectrale. I: Construction générale.* Sém. Cartan, 3e année (1950/51), exp. n. 8.

[5] A. Grothendieck. *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tôhoku Math. J. 9 (1957), p. 119-221.

[6] S. Mac Lane. Homology. Springer (Berlin), 1963.

[7] B. Mitchell. Theory of Categories. Academic Press (New York), 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 dicembre 1967.